УДК 519.2+600.1

И.И. ГОРБАНЬ

НАРУШЕНИЕ СТАТИСТИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ ФИЗИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ

Abstract. *The concept of statistical stability of random sequences and random processes is formalized. Parameters characterizing their statistical instability in finite observation interval are proposed. It is shown, that statistical instability processes are especial class of nostationary processes. On the base of analytical researches and computer modeling of random processes it has been proposed the hypothesis that the cause of statistical stability destruction in the finite observation interval is low frequency cyclical fluctuations of expectation. Writing of voltage of electrical supply network for two months with pause in some days has been realized. The processing of obtained records showed that oscillations of town net electrical voltage have statistical instability character. The area of statistical instability is continuous and corves the range from some hours to no less 60 hours.*

Key words: *statistical instability, theory of hyper-random phenomena, experimental researches.*

Анотація. *Формалізовано поняття статистичної стійкості послідовності випадкових величин і процесів. Запропоновано параметри, що характеризують їх статистичну нестійкість на кінцевому інтервалі спостереження. З'ясовано, що статистично нестійкі процеси – особливий клас нестаціонарних процесів. На основі дослідження аналітичних досліджень та комп'ютерного моделювання висунута гіпотеза, що причиною руйнування статистичної стійкості фізичних процесів на кінцевому інтервалі спостереження є низькочастотні періодичні коливання математичного сподівання. Проведено запис коливань напруги міської електромережі на протязі двох місяців з перервою в декілька днів. Обробка отриманих записів показала, що коливання напруги міської електромережі носять статистично нестійкій характер. Область статистичної нестійкості неперервна і перекриває діапазон від декількох одиниць годин до не менш як 60 годин.*

Ключові слова: *статистична нестійкість, теорія гіпервипадкових явищ, експериментальне дослідження.*

Аннотация. *Формализовано понятие статистической устойчивости последовательности случайных величин и процессов. Предложены параметры, характеризующие их статистическую неустойчивость на конечном интервале наблюдения. Выяснено, что статистически неустойчивые процессы – особый класс нестационарных процессов. На основе аналитических исследований и компьютерного моделирования выдвинута гипотеза, что причиной нарушения статистической устойчивости физических процессов на ограниченном интервале наблюдения являются низкочастотные периодические колебания математического ожидания. Осуществлена запись колебаний напряжения городской электросети на протяжении двух месяцев с перерывами в несколько дней. Обработка полученных записей показала, что колебания напряжения электросети носят выраженный статистически неустойчивый характер. Область статистической неустойчивости непрерывна и перекрывает диапазон от нескольких единиц часов до не менее 60 часов.*

Ключевые слова: *статистическая неустойчивость, теория гиперслучайных явлений, экспериментальные исследования.*

1. Введение

На протяжении веков теория вероятностей формировалась как прикладная теория, ориентированная на описание реальных событий, величин, процессов и полей. Лишь в начале прошлого столетия в результате строгой формализации ее базовых понятий и систематизации основных положений [1] она приобрела черты математической теории и была признана разделом математики. Современную теорию вероятностей можно рассматривать как физико-математическую теорию, имеющую обширную область практического применения.

Физической основой прикладной части теории вероятностей служит гипотеза статистической устойчивости (статистической стабильности) реальных массовых явлений. Экспериментальные исследования эффекта статистической устойчивости проводились на протяжении столетий. Известно, например, что частоту выпадения той или иной стороны монеты при подбрасывании исследовали Лаплас, Бюффон, К. Пирсон и многие другие ученые. Бюффон бросал монету 4040 раз. К. Пирсон провел две серии опытов. В первой серии опытов монета подбрасывалась 12000 раз, во второй серии – 24000 раз. Во всех экспериментах частота выпадения герба была близка к 0,5. Описание этих и других подобных исследований приведено в ряде литературных источников, в частности [2, 3]. Результаты многих экспериментов указывают на правдоподобность гипотезы статистической устойчивости реальных явлений, а это позволяет предположить, как отмечал Б.В. Гнеденко [2, стр. 42] «наличие не зависящих от испытателя закономерностей течения явления, проявление которых и заключается в указанном почти постоянстве частоты».

На основе гипотезы статистической устойчивости массовых явлений Р. Мизес предлагал определить понятие вероятности события как предел частоты при устремлении количества опытов к бесконечности [4]. Хотя в результате продолжительных научных споров подход Мизеса был отвергнут математиками и принят аксиоматический подход А.Н. Колмогорова (возведенный в настоящее время даже в ранг международного стандарта [5]), понятие статистической устойчивости продолжает играть для теории вероятностей и математической статистики по-прежнему ключевую роль.

Известные математики, говоря о статистической устойчивости, проявляют большую осторожность в формулировках, обращая внимание на то, что понятие статистической устойчивости – математическая абстракция и реальные массовые физические явления могут быть статистически неустойчивыми.

Например, авторы известного справочника по математике [6, стр. 607] пишут: «Статистическая устойчивость в каждой конкретной ситуации есть эмпирический физический закон, который может быть проверен только опытом. Часто точность предсказания некоторой статистики возрастает с возрастанием объема выборки (физический закон больших чисел)». В.Н. Тутубалин в своей книге [7, стр. 6, 7] отмечает, что «Научная добросовестность требует от каждого исследователя применения доступных методов проверки статистической устойчивости, но наличие ее редко можно вполне гарантировать». Далее он очерчивает область применения классической теории вероятностей: «Все мыслимые эксперименты можно разделить на три группы. К первой группе относятся хорошие эксперименты, в которых обеспечивается полная устойчивость исхода опытов. Ко второй группе относятся эксперименты похуже, где полной устойчивости нет, но есть статистическая устойчивость. К третьей группе относятся совсем плохие эксперименты, когда нет и статистической устойчивости. В первой группе все ясно без теории вероятностей, в третьей группе она бесполезна. Вторая группа составляет настоящую сферу применения теории вероятностей, но мы вряд ли когда-нибудь можем быть вполне уверены, что интересующий нас эксперимент относится ко второй, а не к третьей группе».

Серьезные сомнения автора настоящей статьи в статистической устойчивости реальных массовых явлений побудили его к разработке физико-математической теории гиперслучайных явлений [8], ориентированной на описание статистически неустойчивых физических событий, величин, процессов и полей.

Теория гиперслучайных явлений содержит две компоненты: математическую и физическую. Не вдаваясь в подробности математической составляющей этой теории, отметим, что ее физическая часть опирается на гипотезу существования в реальном мире статистически неустойчивых физических явлений и гипотезу гиперслучайного устройства мира, суть которой в том, что статистически неустойчивые явления (адекватно представляемые гиперслучайными моделями) носят массовый характер.

В настоящее время основные теоретические положения теории гиперслучайных явлений уже достаточно детально проработаны. Однако до сих пор остается спорным главный вопрос, ради чего она разрабатывается: обладают ли реальные явления свойством статистической неустойчивости (статистической нестабильности). Если обладают, то теория гиперслучайных явлений имеет шанс быть востребованной практикой, если нет, то она обречена остаться навсегда абстрактной теорией.

Заметим, что ответ на поставленный вопрос важен не только для будущего теории гиперслучайных явлений, но и вообще для прикладной науки в целом.

Целью настоящей статьи является формализация понятия статистической устойчивости, изучение нарушений статистической устойчивости случайных процессов, установление возможных причин таких нарушений и исследование статистической устойчивости напряжения городской электрической сети.

2. Описание экспериментов по изучению статистической устойчивости напряжения городской электросети

В экспериментальных исследованиях использовались компьютер и согласующее устройство (понижающий трансформатор с делителем напряжения), обеспечивающие запись и обработку колебаний напряжения электросети.

Ввод сигнала осуществлялся с частотой дискретизации 5 кГц. По каждым 1024 отсчетам вычислялись действующие (эффективные) значения напряжения, записываемые в память компьютера. Запись проводилась сеансами на протяжении двух месяцев с перерывами в несколько дней. Продолжительность каждого сеанса составляла около 60 часов. За время сеанса записывалось $N = 2^{20} \approx 1$ млн отсчетов напряжения.

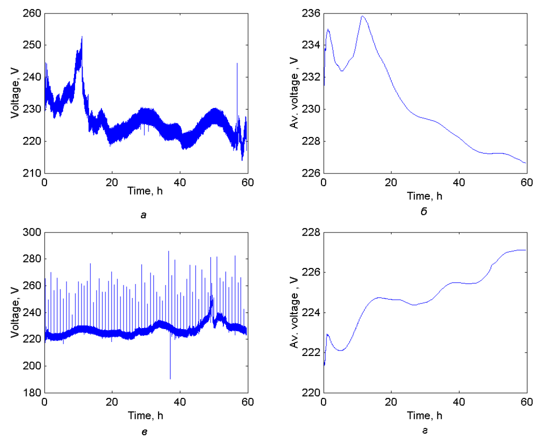


Рис. 1. Изменение во времени напряжения электросети в двух сеансах записи (а, в) и соответствующие накопленные средние (б, г)

Напряжение сети постоянно менялось. В разных сеансах изменения носили разный характер. Для примера на рис. 1 приведены зависимости напряжения сети от времени (в часах), полученные в двух сеансах, и соответствующие им накопленные средние.

Анализ полученного экспериментального материала выявил характерную особенность, присущую всем записям: незатухающий характер накопленного среднего (рис. 1 б, в).

Этот результат, странный на первый взгляд, резко контрастирует с известными теоретическими результатами, демонстрирующими затухание накопленного среднего при увеличении времени накопления. В качестве примера на рис. 2 представлены модель белого гауссовского шума (модель 1), модель гармонического колебания (модель 2) и соответствующие им накопленные средние.

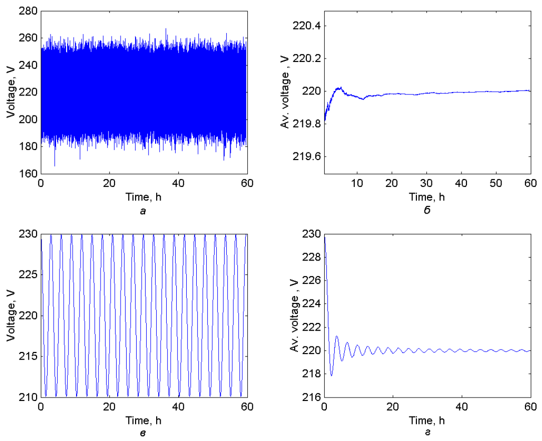


Рис. 2. Модель белого гауссовского шума (модель 1) (а), модель гармонического колебания (модель 2) (в) и соответствующие им накопленные средние (б, г)

3. Исходные теоретические положения

Последовательность $X_1, X_2, \ldots$ случайных величин (случайную выборку) будем называть статистически устойчивой (статистически стабильной), если при устремлении объема выборки N к бесконечности математическое ожидание выборочной дисперсии $\bar{D}_{Y_N} = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}(Y_n - \bar{m}_{Y_N})^2$ флуктуации выборочного среднего $Y_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ $(n = \overline{1, N})$ стремится к нулю, где $\bar{m}_{Y_N} = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} Y_n$ – выборочное среднее флуктуации среднего. Последовательности, не удовлетворяющие этому условию, будем называть статистически неустойчивыми.

В данном случае тип сходимости не столь существен, но для придания определениям необходимой математической строгости будем подразумевать сходимость по вероятности.

Известная теорема Чебышёва, касающаяся закона больших чисел, утверждает [2], что для последовательности $X_1, X_2, \ldots$ попарно независимых случайных величин, имеющих конечные дисперсии и математические ожидания $m_{x_1}, m_{x_2}, \ldots$, при устремлении N к бесконечности выборочное среднее $Y_N = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} X_n$ стремится по вероятности к среднему $m_{y_N} = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} m_{x_n}$ математических ожиданий $m_{x_1}, m_{x_2}, \ldots$.

Обратим внимание на одну тонкость, ускользающую от многих: эта теорема не говорит о сходимости ни выборочного среднего Y_N, ни среднего математических ожиданий m_{y_N}, а утверждает сходимость этих величин друг к другу или, иначе, утверждает сходимость к нулю их разности. Это означает, что выборочное среднее Y_N и среднее математических ожиданий m_{y_N} могут не иметь предела. Они могут, например, флуктуировать вокруг константы, но при флуктуации меняются синхронно.

Из теоремы Чебышёва следует, что при выполнении условий теоремы последовательность случайных величин тогда и только тогда статистически устойчива, когда при устремлении объема выборки N к бесконечности выборочная дисперсия флуктуации среднего математических ожиданий m_{y_N} стремится к нулю. Для последовательности случайных величин, удовлетворяющих условиям теоремы, это положение может использоваться как определение понятия статистической устойчивости.

Случайный процесс $X(t)$ будем называть статистически устойчивым (статистически стабильным), если при $T \to \infty$ интеграл $\frac{1}{T}\int_0^T (Y(t) - \bar{m}_{y_T})^2 \mathrm{d}t$ стремится к нулю, где $Y(t) = \frac{1}{t}\int_0^t X(t_1)\mathrm{d}t_1$ – накопленное среднее, $\bar{m}_{y_T} = \frac{1}{T}\int_0^T Y(t)\mathrm{d}t$ – среднее накопленного среднего. Процессы, не удовлетворяющие этому условию, будем называть статистически неустойчивыми.

Заметим, что детерминированную величину x_0 приближенно можно рассматривать как частный случай случайной величины, у которой функция распределения имеет вид функции единичного скачка в точке x_0 [9], а детерминированную функцию $x_0(t)$ – как частный случай случайной функции, у которой функция распределения $F(x;t) = \mathrm{rect}(x - x_0(t))$. Поэтому понятия статистической устойчивости и неустойчивости применимы также для последовательности детерминированных величин и функций.

Статистически устойчивыми являются однородная последовательность случайных величин с ограниченными первыми двумя моментами, а также неоднородная последовательность случайных величин с ограниченными первыми двумя моментами при условии, что среднее математических ожиданий этих величин имеет предел.

Если при устремлении объема выборки к бесконечности среднее математических ожиданий случайных величин не имеет предела (например, флуктуирует), то последовательность – статистически неустойчива. Статистически неустойчивым является числовой несходящийся ряд.

Подчеркнем, что для случайных процессов понятия нестационарности и статистической неустойчивости не тождественны.

Стационарные эргодические по отношению к математическому ожиданию процессы [10] статистически устойчивы. Среди нестационарных встречаются как статистически устойчивые, так и статистически неустойчивые процессы. Таким образом, статистически неустойчивые – особый класс нестационарных процессов.

Установить факт статистической устойчивости или неустойчивости реальной последовательности ограниченного объема или реального процесса ограниченной длительности принципиально невозможно, поскольку для установления этого факта последовательность или процесс должны быть бесконечными.

По аналогии формализации широко используемого инженерами понятия интервала стационарности (под которым обычно подразумевается интервал, на котором процесс не только стационарен, но и практически эргодичен) можно формализовать понятие статистической устойчивости на конечном интервале наблюдения.

Основой для формализации может служить выявление тенденции стабилизации уровня выборочного среднего при увеличении объема обрабатываемых данных или стабилизации уровня математического ожидания среднего. Эти тенденции могут служить качественными показателями статистической устойчивости процесса. Прежде чем переходить к количественным показателям, проанализируем возможные причины нарушения статистической устойчивости.

4. Возможные причины нарушения статистической устойчивости случайных процессов

Представим нестационарный случайный процесс $X(t)$ в виде суммы его математического ожидания $m_{x(t)}$ и случайного процесса $\overset{\circ}{X}(t)$ с нулевым математическим ожиданием:

$$X(t) = m_{x(t)} + \overset{\circ}{X}(t).$$

Математическое ожидание среднего $m_{y(t)}$ определяется математическим ожиданием $m_{x(t)}$:

$$m_{y(t)} = \frac{1}{t}\int_0^t m_{x(t_1)} \mathrm{d}t_1 .$$

Поэтому для изучения статистической устойчивости особый интерес представляет математическое ожидание $m_{x(t)}$.

Рассмотрим последовательно случайные процессы с тремя типами изменения математического ожидания $m_{x(t)}$: периодическими, скачкообразными и апериодическими.

4.1. Случайные процессы с периодически меняющимся математическим ожиданием

Пусть $m_{x(t)}$ – периодическая функция с периодом T. Тогда ее можно разложить в ряд Фурье:

$$m_{x(t)} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \dot{a}_k \exp\left(\frac{\mathrm{j}2\pi}{T} kt\right), \tag{1}$$

где $\dot{a}_k = a_k \exp(\mathrm{j}\varphi_k)$ – комплексный коэффициент разложения.

При этом математическое ожидание среднего

$$m_{y(t)} = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \frac{\sin \pi tk/T}{\pi tk/T} \cos(\pi tk/T + \varphi_k). \tag{2}$$

Из выражения (2) следует, что переменная часть математического ожидания среднего описывается гармоническими функциями, затухающими по закону $\sin x / x$. Скорость затухания этих функций определяется величиной периода T: по мере увеличения периода скорость затухания уменьшается, а при $T \to \infty$ она стремится к нулю.

Минимальная скорость затухания – у первого члена ряда (соответствующего $k = 1$). В математическом ожидании среднего (2) гармоники высшего порядка, присутствующие в разложении (1), оказываются подавленными. Чем выше порядок гармоники, тем сильнее подавление.

Если длительность t интервала наблюдения существенно меньше периода T, изменения математического ожидания среднего $m_{y(t)}$ – незначительны. Это – область выраженной статистической устойчивости. Ситуация, однако, меняется по мере приближения длительности t к периоду T. На интервале наблюдения $t \in [0,T]$, как видно из выражения (2), происходят значительные изменения математического ожидания. Это означает, что на интервале $[0,T]$ статистическая устойчивость оказывается нарушенной.

Заметим, что ощутимые изменения математического ожидания среднего и нарушения статистической устойчивости могут также регистрироваться и на интервалах наблюдения, больших периода T. Это имеет место, когда гармоники высшего порядка достаточно велики, а их номера не очень большие.

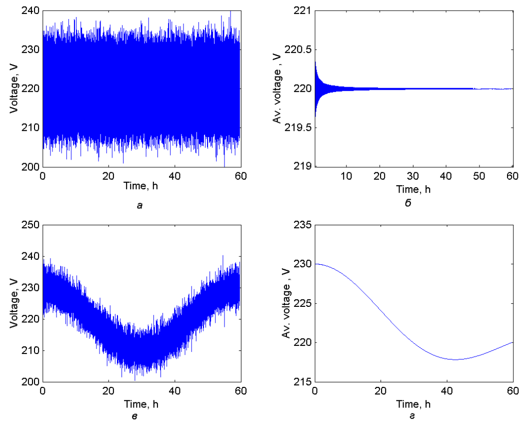


Рис. 3. Модели случайного процесса с высокой (модель 3) (а) и низкой (модель 4) (в) частотой колебания математического ожидания и соответствующие накопленные средние (б, г)

Описанные особенности проиллюстрированы рис. 3 (модели 3, 4).

При расчетах использовалась последовательность

$$x_n = a + \sigma_1 \left| n_0^l \right| n_n + \sigma_2 \cos(2\pi f n / N),$$

рассматриваемая как функция времени $t = \Delta t n$ в часах ($n = \overline{1,N}$, $\Delta t = 0,2$ с), с двумя различными значениями частоты f. В модели 3 $f = 400$ (рис. 3 а, б), а в модели 4 – $f = 1$ (рис. 3 в, г). В обеих моделях $a = 220$, $\sigma_1 = 1$, множество отсчетов разбито на L блоков по M отсчетов в каждом ($N = ML$, $M = 64$), n_0^l – соответствующий l-у блоку отсчет гауссовской случайной величины с нулевым математическим ожиданием и единичной дисперсией, n_n – n-й отсчет случайной величины с нулевым математическим ожиданием и единичной дисперсией, $\sigma_2 = 10$.

Из выражения (2) следует, что при $t \to \infty$ флуктуации математического ожидания среднего $m_{y(t)}$ стремятся к нулю. Это означает, что, несмотря на нарушения статистической устойчивости на определенном интервале наблюдения, случайный процесс с периодически меняющимся математическим ожиданием в целом статистически устойчив.

Рассмотрим случайный процесс $X(t)$, представляющий собой сумму Q примерно одинаковых по уровню процессов $X_q(t)$ с периодами изменения математического ожидания $T_1, T_2, \ldots, T_Q$. Период T_{q+1} каждого следующего процесса $X_{q+1}(t)$ значительно больше периода T_q предыдущего процесса $X_q(t)$.

На интервале наблюдения от нуля до t, значительно меньшем T_1, флуктуации математических ожиданий практически не проявляются и поэтому процесс $X(t)$ можно считать практически статистически устойчивым. При приближении t к T_1 процесс $X_1(t)$ (а, следовательно, и процесс $X(t)$) становится статистически неустойчивым. При дальнейшем увеличении времени наблюдения начинают проявляться статистические свойства процесса $X_1(t)$ и он постепенно приобретает характер статистически устойчивого процесса. При этом процесс $X(t)$ также начинает походить на статистически устойчивый процесс.

При приближении t к T_2 процесс $X_2(t)$ становится статистически неустойчивым. Это приводит к тому, что статистическая устойчивость процесса $X(t)$ нарушается и т.д. При $Q \to \infty$ чередование статистически устойчивых и неустойчивых состояний охватывает бесконечный интервал наблюдения.

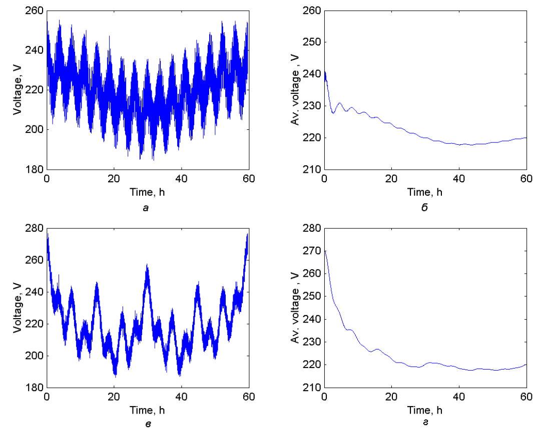


Рис. 4. Модели случайного процесса с математическим ожиданием, содержащим три сильно отстоящих друг от друга по частоте гармоники (модель 5) (а) и пять близко расположенных по частоте гармоник (модель 6) (в), а также соответствующие им накопленные средние (б, г)

Когда периоды связаны неравенствами $T_{q+1} < 2T_q$, области неустойчивых состояний сливаются между собой и практически на всем интервале $[T_1, T_Q)$ процесс оказывается статистически неустойчивым.

Описанная схема формирования статистически неустойчивых областей проиллюстрирована моделями 5 и 6 (рис. 4 *а–г*). Модель 5 описывается выражением $x_n = a + \sigma_1 \left| n_0^l \right| n_n + \sigma_2 \sum_{i=1}^{3} \cos(2\pi f_i n / N)$, где $f_1 = 256$, $f_2 = 16$, $f_3 = 1$, а модель 6 – выражением $x_n = a + \sigma_1 \left| n_0^l \right| n_n + \sigma_2 \sum_{i=1}^{5} \cos(2\pi f_i n / N)$, где $f_1 = 16$, $f_2 = 8$, $f_3 = 4$, $f_4 = 2$, $f_5 = 1$. В обеих моделях неоговоренные параметры такие же, как в модели 3.

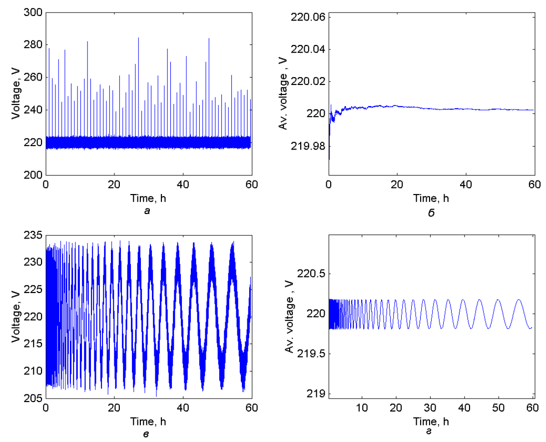


Рис. 5. Модель случайного процесса с периодически скачкообразным изменением математического ожидания (модель 7) (а), модель случайного процесса с апериодически меняющимся математическим ожиданием (модель 8) (в) и соответствующие им накопленные средние (б, г)

Описанная аддитивная модель может использоваться в качестве модели реальных процессов. Наличием в ней случайных составляющих с периодически меняющимися математическими ожиданиями можно объяснить чередование в реальных процессах статистически устойчивых и неустойчивых состояний.

4.2. Случайные процессы со скачкообразно меняющимся математическим ожиданием

С точки зрения статистической устойчивости, случайный процесс со скачкообразно меняющимся математическим ожиданием не представляет особого интереса, поскольку при наличии сильно выделяющихся отсчетов среднее откликается на воздействие всплесками уровня, но с течением времени они быстро сглаживаются (модель 7, рис. 5 *а*, *б*).

В рассматриваемой модели отсчеты входного процесса описываются выражением $x_n = a + \sigma_1 n_{1n} + \sigma_2 \varepsilon_p (1+|n_{2n}|)$, где $\sigma_2 = 20$, n_{1n}, n_{2n} – гауссовские случайные величины с нулевым математическим ожиданием и единичной дисперсией, $\varepsilon_p = \begin{cases} 0, \text{ } если \text{ } n \text{ } некратно \text{ } p, \\ 1, \text{ } если \text{ } n \text{ } кратно \text{ } p, \end{cases}$ $p = 4000$, а остальные параметры такие же, как в модели 3.

4.3. Случайные процессы с апериодически меняющимся математическим ожиданием

Заметим, что случайные процессы с периодически меняющимся математическим ожиданием, рассмотренные в подразд. 4.2, на интервале наблюдения длительностью менее периода T можно интерпретировать как процессы с апериодически меняющимся математическим ожиданием. Отсюда следует, что такие процессы могут быть статистически неустойчивыми на определенных интервалах наблюдения.

Пусть $m_{x(t)}$ допускает разложение в ряд Маклорена:

$$m_{x(t)} = \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k . \qquad (3)$$

Тогда

$$m_{y(t)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k t^k}{k+1} . \qquad (4)$$

Из выражения (4) следует, что изменение математического ожидания $m_{x(t)}$ по закону t^k приводит к такому же закону изменения математического ожидания среднего $m_{y(t)}$. Это означает, что если $m_{x(t)} = t^k$, то случайный процесс статистически неустойчив на любом интервале наблюдения.

Заметим, что из-за наличия в разложении (4) дополнительных по сравнению с разложением (3) коэффициентов $(k+1)^{-1}$ в общем случае закон изменения $m_{y(t)}$ не повторяет закон изменения $m_{x(t)}$, а потому не обязательно процесс с апериодически меняющимся математическим ожиданием является статистически неустойчивым.

Рассмотрим случайный процесс, у которого математическое ожидание $m_{x(t)}$ в логарифмическом масштабе меняется периодически с периодом T. В этом случае математическое ожидание может быть представлено рядом

$$m_{x(t)} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \dot{a}_k \exp\left(\frac{\mathrm{j}2\pi}{T} k \ln t \right).$$

Интегрирование этого выражения с нормировкой на t дает математическое ожидание среднего $m_{y(t)}$, которое путем несложных аналитических преобразований приводится к виду

$$m_{y(t)} = a_0 + 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{\sqrt{1+4\pi^2 k^2 / T^2}} \sin(2\pi k \ln t/T + \varphi_k + \mathrm{arctg}(T / 2\pi k)).$$

Как видно, для периодической в логарифмическом масштабе функции $m_{x(t)}$ математическое ожидание среднего $m_{y(t)}$ описывается рядом незатухающих гармонических функций. Это означает, что такой процесс – статистически неустойчив на интервале наблюдения $[0, \infty)$.

На рис. 5 в, г приведены результаты расчетов для модели, представляемой функцией $x_n = a + \sigma_1 n_n + \sigma_2 \cos(2\pi f \lg n/\lg N)$ (модель 8), где $\sigma_2 = 10$, $f = 20$, а остальные параметры и величины такие же, как и в модели 3.

Математические ожидания реальных процессов вряд ли описываются функциями типа t^k или косинус-логарифмической функции. Основная причина тому – их неинвариантность к сдвигу. При этом, однако, не следует исключать возможность, что отдельные фрагменты реализаций могут описываться подобными функциями с вытекающими из этого последствиями.

5. Количественная оценка статистической неустойчивости случайных процессов на конечном интервале наблюдения

Для количественной характеристики статистической неустойчивости случайной последовательности или случайного процесса с ограниченными первыми двумя моментами на конечном интервале наблюдения можно использовать параметры, характеризующие флуктуацию выборочного среднего Y_N или флуктуацию среднего математических ожиданий m_{y_N}.

Уровень флуктуации выборочного среднего Y_N характеризует выборочная дисперсия $\bar{D}_{Y_N}$ флуктуации выборочного среднего Y_n.

В качестве параметра статистической неустойчивости случайной последовательности можно предложить параметр статистической неустойчивости выборочного среднего $\gamma_{1N} = \frac{\mathrm{M}\left[\bar{D}_{Y_N}\right]}{ND_{y_N}}$, представляющий собой математическое ожидание выборочной дисперсии $\bar{D}_{Y_N}$, нормированное на дисперсию выборочного среднего $D_{y_N} = \frac{1}{N^2}\sum_{n=1}^{N} D_{x_n}$ и объем выборки N, где $\mathrm{M}[\bullet]$ – оператор математического ожидания, D_{x_n} – дисперсия случайной величины X_n.

Уровень флуктуации среднего математических ожиданий m_{y_N} представляет дисперсия флуктуации математического ожидания выборочного среднего $\bar{D}_{m_{y_N}} = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}(m_{y_n} - \bar{m}_{m_{y_N}})^2$, где

$\bar{m}_{m_{y_N}} = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} m_{y_n}$ – среднее флуктуаций математического ожидания m_{y_n} выборочного среднего. Поэтому параметром статистической неустойчивости случайной последовательности может служить также параметр статистической неустойчивости среднего математических ожиданий $\gamma_{2N} = \frac{\bar{D}_{m_{y_N}}}{ND_{y_N}}$, представляющий собой дисперсию флуктуации математического ожидания выборочного среднего $\bar{D}_{m_{y_N}}$, нормированную на дисперсию выборочного среднего D_{y_N} и объем выборки N.

Нетрудно убедиться, что параметр статистической неустойчивости выборочного среднего и параметр статистической неустойчивости среднего математических ожиданий описываются соответственно выражениями

$$\gamma_{1N} = \frac{\mathrm{M}\left[\sum_{n=1}^{N}(Y_n - \bar{m}_{Y_N})^2\right]}{\sum_{n=1}^{N} D_{x_n}}, \qquad \gamma_{2N} = \frac{\sum_{n=1}^{N}(m_{y_n} - \bar{m}_{m_{y_N}})^2}{\sum_{n=1}^{N} D_{x_n}}.$$

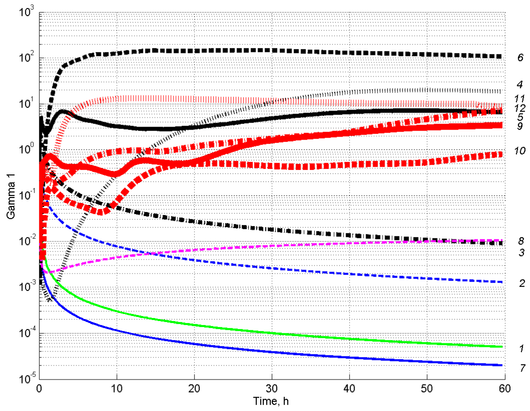
На основании теоремы Чебышёва при $N \to \infty$ параметр статистической неустойчивости выборочного среднего γ_{1N} стремится к параметру статистической неустойчивости среднего математических ожиданий γ_{2N}, причем как в случае статистически устойчивых, так и в случае статистически неустойчивых последовательностей. Для статистически устойчивой последовательности их предельные значения равны нулю (т.к. $\mathrm{M}\left[\bar{D}_{Y_N}\right] \to 0$, а ND_{y_N} – конечно), а для статистически неустойчивой последовательности эти величины могут принимать некоторое положительное значение, флуктуировать или стремиться к бесконечности.

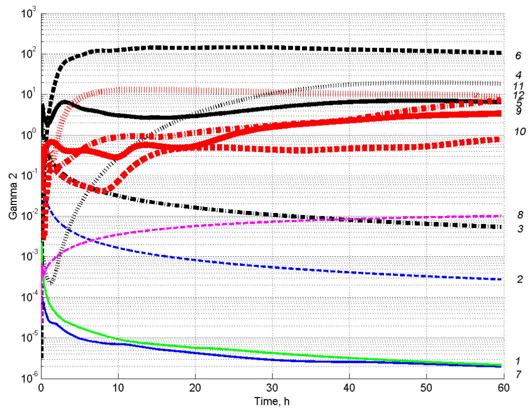
Величины параметров статистической неустойчивости γ_{1N}, γ_{2N} зависят как от величины математического ожидания выборочной дисперсии $\mathrm{M}\left[\bar{D}_{Y_N}\right]$ флуктуации выборочного среднего и дисперсии флуктуации математического ожидания $\bar{D}_{m_{y_N}}$ выборочного среднего, так и от дисперсии выборочного среднего D_{y_N}: при уменьшении параметров флуктуации $\mathrm{M}\left[\bar{D}_{Y_N}\right]$ и $\bar{D}_{m_{y_N}}$ параметры статистической неустойчивости γ_{1N}, γ_{2N} уменьшаются, а при уменьшении дисперсии выборочного среднего D_{y_N} – возрастают.

Результаты расчетов параметра статистической неустойчивости выборочного среднего γ_{1n} и параметра устойчивости среднего математических ожиданий γ_{2n} для описанных восьми моделей и четырех экспериментально полученных записей, включая представленные на рис. 1, приведены на рис. 6.

Тонкими линиями 1 – 2 и 7 – 8 изображены результаты расчетов для моделей 1 – 2 и 7 – 8 соответственно, полужирными линиями 3 – 6 – результаты расчетов для моделей 3 – 6 соответственно, а жирными линиями 9 – 12 – результаты расчетов для четырех записей напряжения электросети.

При расчетах входящие в параметры статистической неустойчивости дисперсии заменялись оценками, формируемыми по выборке.





а) б)

Рис. 6. Параметры статистической неустойчивости выборочного среднего γ_{1n} (*а*) и статистической неустойчивости среднего математических ожиданий γ_{2n} (*б*)

Из рисунков видно, что для всех моделей и реальных процессов параметры статистической неустойчивости выборочного среднего γ_{1n} и среднего математических ожиданий γ_{2n} практически совпадают, что позволяет использовать при оценке статистической неустойчивости любой из этих параметров.

Для моделей 1 – 3 и 7, соответствующих статистически устойчивым процессам, с увеличением времени наблюдения t значения параметров статистической неустойчивости монотонно уменьшаются, а для моделей 4 – 6 и 8, соответствующих статистически неустойчивым процессам, – возрастают. Для всех экспериментально полученных процессов в области больших времен наблюдения значения этих параметров либо возрастают, либо, достигнув максимума, колеблются, оставаясь при этом примерно на одном и том же уровне.

В области больших времен наблюдения для моделей статистически неустойчивых процессов параметры γ_{1n}, γ_{2n} принимают значения большие, чем для моделей статистически устойчивых процессов. Это обстоятельство подтверждает возможность использования параметров γ_{1n}, γ_{2n} для установления факта нарушения статистической устойчивости.

Для всех экспериментально полученных записей (не только приведенных на рис. 6) значения параметров статистической неустойчивости в конце 60-часового наблюдения оказались более чем на два порядка больше, чем для статистически устойчивых моделей. Это обстоятельство позволяет сделать вывод, что колебания напряжения электросети носят выраженный статистически неустойчивый характер.

Интервал, на котором параметры статистической неустойчивости принимают большие значения, начинается от нескольких часов и доходит до конца записей. Отсюда следует, что область статистической неустойчивости непрерывна и перекрывает диапазон от нескольких единиц часов до не менее 60 часов.

6. Заключение

На основании проведенных исследований можно сделать следующие выводы.

1. Формализовано понятие статистической устойчивости последовательности случайных величин и случайных процессов. Установлено, что статистически неустойчивые процессы – особый класс нестационарных процессов.

2. Выяснено, что для последовательности случайных величин, подчиняющихся закону больших чисел, выборочное среднее и среднее математических ожиданий не всегда обладают свойством сходимости. Выборочное среднее и среднее математических ожиданий могут не иметь предела (в частности, флуктуировать).

3. Для последовательностей случайных величин и случайных процессов, обладающих свойством статистической устойчивости, выборочное среднее и среднее математических ожиданий сходятся к фиксированной величине, а не обладающих таким свойством – синхронно флуктуируют или синхронно стремятся к бесконечности.

4. В результате аналитических исследований и компьютерного моделирования выдвинута гипотеза, что причиной нарушения статистической устойчивости физических процессов на ограниченном интервале наблюдения являются низкочастотные периодические колебания математического ожидания.

5. Предложена аддитивная модель реальных физических процессов в виде суммы случайных процессов, у которых математические ожидания описываются периодическими функциями с разными периодами. Наличием таких случайных составляющих можно объяснить чередование в реальных процессах статистически устойчивых и неустойчивых состояний.

6. Предложены параметры, характеризующие статистическую неустойчивость на конечном интервале наблюдения – параметры статистической неустойчивости.

7. Осуществлена запись колебаний напряжения городской электросети на протяжении двух месяцев с перерывами в несколько дней. Обработка полученных записей показала, что колебания напряжения электросети носят выраженный статистически неустойчивый характер. Область статистической неустойчивости непрерывна и перекрывает диапазон от нескольких единиц часов до не менее 60 часов.

8. Результаты проведенных экспериментальных исследований подтверждают гипотезу существования в реальном мире статистически неустойчивых физических явлений, лежащую в основе физико-математической теории гиперслучайных явлений.

9. Устойчивый характер наблюдаемых нарушений статистической устойчивости колебаний электросети позволяет предположить, что аналогичные нарушения статистической устойчивости присущи и другим физическим (а, возможно, и не только физическим) процессам. По всей

видимости, речь идет о новом физическом эффекте нарушения статистической устойчивости. Этот вопрос требует тщательного изучения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Колмогоров А.Н. Основные понятия теории вероятностей / Колмогоров А.Н. – М.: ОНТИ, 1936. – 175 с.
2. Гнеденко Б.В. Курс теории вероятностей / Гнеденко Б.В. – М.: Изд-во физ.-мат. литературы, 1961. – 406 с.
3. Мостеллер Ф. Вероятность / Ф. Мостеллер, Р. Рурке, Дж. Томас. – М.: Мир, 1969. – 420 с.
4. R. von Mises Mathematical theory of probability and statistics / R. von Mises / Edited and complemented by H. Geiringer. – N.Y. and London: Acad. Press, 1964. – 232 p.
5. International standard ISO 3534-1:2006(E/F). Statistics. Vocabulary and symbols. – Part I: General statistical terms and terms used in probability. – 2006. – 136 p.
6. Корн Г. Справочник по математике для научных работников и инженеров / Г. Корн, Т. Корн. – М.: Наука, 1977. – 831 с.
7. Тутубалин В.Н. Теория вероятностей. – М.: Изд-во Московского университета, 1972. – 230 с.
8. Горбань И.И. Теория гиперслучайных явлений / Горбань И.И. – К.: ИПММС НАН Украины, 2007. – 184 с. – Режим доступа: http://ifsc.ualr.edu/jdberleant/intprob/.
9. Горбань И.И. Гипотеза гиперслучайного устройства мира и возможности познания / И.И. Горбань // Математичні машини і системи. – 2009. – № 3. – С. 44 – 66.
10. Горбань І.І. Теорія ймовірностей і математична статистика для наукових працівників та інженерів / Горбань І.І. – К.: Інститут проблем математичних машин і систем НАН України, 2003. – 245 с. – Режим доступу: http://www.immsp.kiev.ua/perspages/gorban_i_i/index.html.

Стаття надійшла до редакції 08.01.2010