

С. А. Цирук

Влияние геометрии компонент трехслойного цилиндра на краевые эффекты

(Представлено академиком НАН Украины А. Н. Гузем)

A three-layer thick-walled cylinder with isotropic layers under a uniform axial end load is considered. In the exact statement, a problem on the influence of the thickness of layers on end effects is investigated, the total thickness of the cylinder being constant. As mathematical and mechanical models, the axisymmetric problem of elasticity theory in cylindrical coordinates and the model of piecewise-homogeneous media are used. An approximate solution of a differential problem is found by a method of nets with using the base schemes. The example of calculations is given.

В [1, 2] рассмотрены в точной постановке задачи о краевых эффектах (КЭ) в трехслойном цилиндре с изотропными слоями для конкретных конструкций. Ниже, в продолжение этих работ, исследуется вопрос о влиянии на КЭ геометрии слоев цилиндра. Исследуется осесимметричная задача о КЭ в трехслойном цилиндре с изотропными слоями. По торцам действует осевая нагрузка постоянной интенсивности P_{33} . В силу симметрии нагрузки, рассматривается верхняя половина цилиндра (рис. 1). Длина Z выбирается так, что на границе $z = 0$ имеет место невозмущенное напряженное состояние σ_{ij}^0 .

Для решения задачи о КЭ необходимо сформулировать критерий оценки зон КЭ, найти величины, входящие в формулу критерия, а затем исследовать, в должной мере, границы зон и напряжения в пределах зон КЭ.

Сформулируем (первый [3]) критерий оценки зон КЭ. Для напряжений σ_{ij}^q граница зоны КЭ определяется из соотношения

$$\sigma_{ij}^q = \frac{0}{\sigma_{33}} q(\delta_{3j} + 0,01\rho), \quad (1)$$

где $q = 1, 2, 3$ — номер слоя цилиндра (см. рис. 1); σ_{ij} (σ_{ij}^0) — возмущенные (невозмущенные) напряжения; ρ — заданная в процентах величина возмущения напряжения σ_{ij}^q , которая разделяет напряжение в теле конструкции на возмущенное напряжение σ_{ij} и невозмущенное σ_{ij}^0 .

Сформулируем задачу теории упругости для возмущенного напряженного состояния σ_{ij} , входящего в формулу (1). В области, занятой расчетной схемой (см. рис. 1), отыскивается функция $\mathbf{u} = (u_1, u_3) \equiv (u, w)$, удовлетворяющая в пределах компоненты таким соотношениям:

уравнениям равновесия

$$\begin{aligned} -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r\sigma_{11}) - \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial z} + \frac{\sigma_{22}}{r} &= 0, \\ -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r\sigma_{13}) - \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial z} &= 0; \end{aligned} \quad (2)$$

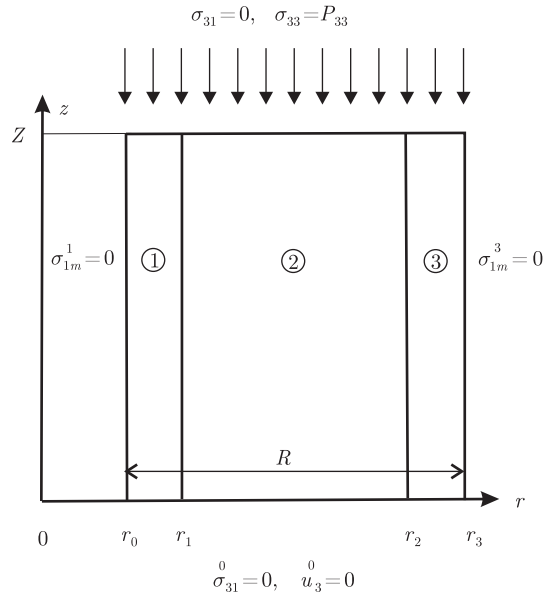


Рис. 1

граничным условиям

$$\begin{aligned}
 \sigma_{31}^0 &= 0 \wedge u_3^0 = 0, & r_0 \leq r \leq r_3 \wedge z = 0, \\
 \sigma_{1m}^3 &= 0, & r = r_3 \wedge 0 \leq z \leq Z, \\
 \sigma_{31} &= 0 \wedge \sigma_{33} = P_{33}, & r_0 \leq r \leq r_3 \wedge z = Z, \\
 \sigma_{1m}^1 &= 0, & r = r_0 \wedge 0 \leq z \leq Z;
 \end{aligned} \tag{3}$$

условиям идеального контакта

$$[u_m] = 0 \wedge [\sigma_{1m}] = 0, \quad (r = r_1 \vee r = r_2) \wedge 0 \leq z \leq Z. \tag{4}$$

Закон Гука в пределах компоненты описывается следующими уравнениями:

$$\begin{aligned}
 \sigma_{ij} &= A_{ik}\varepsilon_{kk}, & \sigma_{31} &= 2G\varepsilon_{31}, & \sigma_{12} &= \sigma_{23} = 0; \\
 \varepsilon_{11} &= \frac{\partial u}{\partial r}, & \varepsilon_{22} &= \frac{u}{r}, & \varepsilon_{33} &= \frac{\partial w}{\partial z}, & \varepsilon_{31} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r} \right), & \varepsilon_{21} &= \varepsilon_{23} = 0; \\
 A_{ii} &= \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)}, & A_{ij} &= \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}, & i &\neq j.
 \end{aligned} \tag{5}$$

Соотношения закона Гука, обратные соотношениям (5), имеют вид

$$\varepsilon_{ii} = \frac{1}{E} \{ \sigma_{ii} - \nu(\sigma_{jj} + \sigma_{kk}) \}, \quad \varepsilon_{31} = \frac{\sigma_{31}}{2G}, \quad \varepsilon_{12} = \varepsilon_{23} = 0, \quad i \neq j \neq k. \tag{6}$$

Обозначения в соотношениях (2)–(6) общепринятые.

В формуле (1) напряжения σ_{33}^0 неизвестны. Для определения тензора напряжений σ^0 отыскивается решение задачи теории упругости для рассматриваемого цилиндра (см.

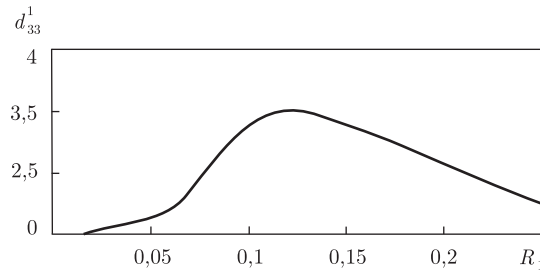


Рис. 2

рис. 1), в случае нагружения $\sigma_{33}^{0q} = P_{33}^{0q}$, обеспечивающее в теле конструкции выполнение соотношения $\varepsilon_{33}^{0q} = \varepsilon^0 = \text{const}$ и имеющее ненулевые компоненты решения

$$\sigma_{33}^{0q} = P_{33}^{0q} = E^q \varepsilon^0. \quad (7)$$

Из (7), условий равновесия цилиндра и отсутствия на линии $z = 0$ напряжения возмущений σ'_{ij} находим

$$\varepsilon^0 = \frac{P_{33}R}{E_1 R_1^2 + E_2 R_2^2 + E_3 R_3^2}, \quad (8)$$

где $R_q = r_q - r_{q-1}$ и $R = r_3 - r_0$.

Приближенное решение задачи (2)–(6) отыскивается методом конечных разностей, когда сеточные уравнения строятся модифицированным вариационно-разностным методом, использующим концепцию базовой схемы [4].

Рассматривается пример расчета цилиндра, у которого крайние слои имеют одинаковые характеристики. При расчетах фиксируются: механические характеристики E^q , ν^q ; размеры Z , $r_0 r_3$; нагрузка P_{33} ; отношение R/r_0 , указывающее на то, что цилиндр толстостенный. Изменяются величины $R_q = r_q - r_{q-1}$, $q = \overline{1, 3}$. При этом толщина R цилиндра не изменяется.

Исходные данные следующие:

$$E^1 = E^3 = 200, \quad \nu^1 = \nu^3 = 0,25, \quad G^1 = G^3 = 80; \quad E^2 = 54, \quad \nu^2 = 0,35, \\ G^2 = 20; \quad Z = 6, \quad R = 1, \quad r_0 = 1, \quad P_{33} = -1.$$

В работе исследуются величины d_{33}^1 протяженности КЭ для напряжения σ_{33}^1 при $\rho = 0$ и различных значениях R_q . В этом случае формула (1) для фиксированного варианта расчета примет вид

$$\sigma_{33}^1 = E^1 \varepsilon^0, \quad (9)$$

где ε^0 определяется из (8).

При расчетах толщины слоев изменялись в интервалах

$$0,0156 \leq R_1 = R_3 \leq 0,25 \wedge 0,5 \leq R_2 \leq 0,988. \quad (10)$$

Для каждого последующего варианта расчета величина R_1 в (10) уменьшилась вдвое по сравнению с предыдущим вариантом, и по формулам (8), (9) определялись величины ε^0 и σ_{33}^1 .

На рис. 2 представлен график зависимости величины протяженности краевого эффекта d_{33}^1 в первом слое цилиндра от толщины R_1 этого слоя (см. рис. 1). Из графика видно, что функция d_{33}^1 возрастает, достигает максимума, после чего начинает убывать. Наличие экстремума у функции d_{33}^1 имеет, очевидно, определенное практическое значение.

1. Коханенко Ю. В., Цирук С. А., Латкин Д. П. Напряжения и краевые эффекты в трехслойном цилиндре // Доп. НАН України. – 2001. – № 8. – С. 37–39.
2. Коханенко Ю. В., Цирук С. А., Латкин Д. П. Визначення напруженого стану та крайових ефектів у тришаровому циліндрі // Пробл. прочності. – 2002. – № 6. – С. 72–78.
3. Механика композитов. В 12 т. / Под ред. А. Н. Гузя. Т. 1. Статика материалов. – Киев: Наук. думка, 1993. – 455 с.
4. Коханенко Ю. В. Численное исследование задач трехмерной теории устойчивости композитов слоистой и ленточной структуры // Прикл. механика. – 2001. – **37**, № 3. – С. 35–64.

*Институт механики им. С. П. Тимошенко
НАН Украины, Киев*

Поступило в редакцию 08.11.2007