УДК 519.712.1:510.51:004.42.001: 004:512

В.И. ШИНКАРЕНКО, В.М. ИЛЬМАН, Г.Г. КРОЛЬ

ГРАММАТИКО-АЛГОРИТМИЧЕСКИЕ СТРУКТУРНЫЕ МОДЕЛИ МЕТААЛГОРИТМОВ

Abstract. *The formalism of grammatical-algorithmic structures is developed on a basis of such formalisms as grammatical and algorithmic structures. Such formal structures use possibilities of structural representation of algorithms in the form of sequence of the forming algorithms connected by operations of a composition and conditional performance. Means of grammatical structures allow to separate a subset of algorithms for the decision of one or several problems from all set of algorithms which can be constructed within the algorithmic structure. Concept of metaalgorithm formalized by grammatical-algorithmic structures. Some possibilities of grammatical-algorithmic structures are shown on an example of modeling the metaalgorithm for sorting.*
Key words: *grammatical, algorithmic, grammatical-algorithmic structure, terminal, nonterminal, algorithm, metaalgorithm, abstract operator, sorting.*

Анотація. *На основі формалізмів граматичних та алгоритмічних структур розроблено формалізм граматично-алгоритмічних структур. Такі формальні структури використовують можливості структурного представлення алгоритмів у вигляді послідовності утворюючих алгоритмів, пов'язаних операціями композиції та умовного виконання. Засоби граматичних структур дозволяють виокремити із множини алгоритмів, які можуть бути побудовані у рамках алгоритмічної структури, ті, що призначені для рішення однієї або декількох задач. Засобами граматично-алгоритмічних структур формалізоване поняття метаалгоритму. Деякі можливості граматично-алгоритмічних структур показані на прикладі моделювання метаалгоритму сортування.*
Ключові слова: *граматична, алгоритмічна, граматико-алгоритмічна структура, термінал, нетермінал, алгоритм, метаалгоритм, абстрактний оператор, сортування.*

Аннотация. *На основе формализмов грамматических и алгоритмических структур разработан формализм грамматико-алгоритмических структур. Такие формальные структуры используют возможности структурного представления алгоритмов в виде последовательности образующих алгоритмов, связанных операциями композиции и условного выполнения. Средства грамматических структур позволяют выделить из всего множества алгоритмов, которые можно построить в рамках алгоритмической структуры, подмножество алгоритмов для решения одной или нескольких задач. Средствами грамматико-алгоритмических структур формализуется понятие метаалгоритма. Некоторые возможности грамматико-алгоритмических структур показаны на примере моделирования метаалгоритма сортировки.*
Ключевые слова: *грамматическая, алгоритмическая, грамматико-алгоритмическая структура, терминал, нетерминал, алгоритм, метаалгоритм, абстрактный оператор, сортировка.*

1. Введение

Под метаалгоритмом [1] будем понимать некоторый обобщенный алгоритм решения задачи, на основе которого могут быть построены конкретные алгоритмы. Термин согласуется с установившимся в объектно-ориентированном программировании понятием метакласса как абстрактного класса, на основе которого строятся конкретные классы [2].

В [1] представлена методика структурной адаптации алгоритмов и дан пример такой адаптации для алгоритмов сортировки. Показано, каким образом алгоритм может быть перестроен в процессе эксплуатации.

Одним из ключевых составляющих системы адаптации является метаалгоритм. В приведенном примере метаалгоритм сортировки включает возможности основных методов сортировки по Д. Кнуту [3, 4], а также маятниковых методов сортировки [5].

© Шинкаренко В.И., Ильман В.М., Кроль Г.Г., 2010

Предложены метод разработки метаалгоритма и способ его представления. На основе метаалгоритма может быть построено бесконечное количество конкретных алгоритмов с различными комбинациями заложенных в метаалгоритм методов.

Для изучения возможностей преобразования метаалгоритмов, улучшения их качества: читабельности, функциональности и др. – необходимо иметь формальные способы их представления.

В [6, 7] подобная задача решается алгебро-алгоритмическими средствами. Особенностью предлагаемой методологии является то, что алгоритмические конструкции средствами алгоритмических структур моделируются на основе первичных алгоритмов, в то время как классическим является алгоритмический подход к моделированию алгоритмов [8] или же алгоритмический подход к моделированию алгебраических конструкций [9].

В данной работе предлагается формализация метаалгоритмов средствами грамматико-алгоритмических структур.

Такой формализм построен на основе предложенных ранее грамматических [10] и алгоритмических [11] структур. Средствами алгоритмических структур задается бесконечное множество алгоритмов, конструируемых на основе образующих (первичных) алгоритмов. Средства грамматических структур позволяют выделить подмножество алгоритмов решения некоторой задачи (может, и бесконечное).

В работе последовательно определены основные понятия грамматических и алгоритмических структур, даны определение грамматико-алгоритмических структур и пример представления метаалгоритма сортировки средствами грамматико-алгоритмических структур.

2. Формальные грамматические структуры

Формальная структура задается упорядоченной тройкой с основным множеством (носителем) M, сигнатурой Σ и аксиоматикой Λ [10]:

$$C = \langle M, \Sigma, \Lambda \rangle . \tag{1}$$

Структура (1) не является универсальной, так как применение операций сигнатуры Σ к элементам из множества M в соответствии с аксиоматикой Λ не предполагает принадлежности результата множеству M. К тому же, результат выполнения операций сигнатуры Σ может качественно отличаться от элементов множества M.

Определение 1. Формальной грамматической структурой (ФГС) назовем совокупность трех составляющих (множеств):

$$C_G = \langle M_G, \Sigma_G, \Lambda_G \rangle , \tag{2}$$

где M_G – носитель структуры, сигнатура $\Sigma_G = \{\to^2, \{\otimes_i^2\}, \Rightarrow^2\}$ состоит из имен операций связывания "$\otimes_i$", подстановки "$\Rightarrow$" и отношения "$\to$", представленного в виде правила вывода (продукций), Λ_G – конструктивная аксиоматика, которая включает множество аксиом 1 – 6 и определений 2 – 4.

Аксиома 1 (о носителе грамматической структуры). Носитель грамматической структуры включает множества A – терминальных и B – нетерминальных символов:

$$M = (A \bigcup B), \quad A = \{a_i\},\ i = 0 \ldots I, \quad B = \{\alpha_j\},\ j = 1 \ldots J, \quad a_0 = \varepsilon, \quad \forall a, b \in A \,|\, B, \quad a \neq b.$$

Аксиома 2 (о свободном языке). Свободный язык включает все возможные цепочки, полученные в результате операций связывания "$\otimes_i$" элементов носителя:

$$L^* = \{l_i\} : l_i = \varepsilon \,|\, l_i = l_j \otimes a_k \,|\, l_i = l_j \otimes b_k,\ a_k \in A, b_k \in B, l_j \in L^*.$$

В большинстве грамматик применяется единственная операция связывания терминалов и нетерминалов в цепочки, поэтому при обозначении операции "$\otimes$" без индекса имеются в виду либо единственная, либо все операции из множества $\{\otimes_i^2\}$.

Аксиома 3 (о пустом элементе). Операция "$\otimes$" обладает свойством поглощения пустого элемента:

$$\forall a \in M \ a \otimes \varepsilon = \varepsilon \otimes a = a.$$

Аксиома 4 (правила вывода). Аксиоматика грамматической структуры должна содержать множество правил вывода $Q = \{l_i \to l_j\},\ l_i \in L^* \setminus \{\varepsilon\}, l_j \in L^*$, множество пар (l_i, l_j), связанных отношением "$\to$", при этом $0 < |l_i| < k,\ 0 < |l_j| < k,\ k \in N$, где $|l_i|$ – длина цепочки l_i.

Определение 2. Результатом операции подстановки в цепочке $l_n \otimes l_j \otimes l_m$ по правилу $l_j \to l_i$ будет цепочка $l_n \otimes l_i \otimes l_m$.

Операндами двухместной операции подстановки являются цепочка и правило вывода.

Если в $l : \neg\exists l_j \to l_i : l = l_n \otimes l_j \otimes l_m$, то результатом операции подстановки по правилу $(l_j \to l_i) \in Q$ будет исходная цепочка l.

Обозначим операцию подстановки $l_n \otimes l_i \otimes l_m = \Rightarrow (l_n \otimes l_j \otimes l_m, l_j \to l_i)$ как $l_n \otimes l_j \otimes l_m \underset{l_j \to l_i}{\Rightarrow} l_n \otimes l_i \otimes l_m$.

Аксиома 5 (о сентенциальных формах [12]). Цепочка $l = l_n \otimes l_i \otimes l_m$ является сентенциальной формой $f \in F$, если $\exists (l_j \to l_i) \in Q \,\&\, \exists l_n \otimes l_j \otimes l_m \in F$.

Аксиома 6 (о начальных символах). Для однозначного определения сентенциальных форм и формального языка необходимо задание начального символа σ (в общем случае конечное множество начальных символов $U = \{\sigma_i\}$), такого, что $\sigma \in B \,\&\, \sigma \in F$.

Определение 3. Формальным языком называется множество цепочек

$$L(C) = \{l_i\} : (l_i = a_k \,|\, l_i = l_j \otimes a_k,\ a_k \in A) \,\&\, (l_i \in F);\ L(C) \subset F \subset L^*.$$

Определение 4. Выводом цепочки l_m языка L назовем последовательность $l_0 \Rightarrow l_1 \Rightarrow \ldots \Rightarrow l_m$, если $l_0 \in U \,\&\, l_m \in L$.

3. Формальные алгоритмические структуры

Как определено в [11], любой алгоритм A реализует следующее: для любого элемента x из множества определений $X(A)$ алгоритм A за конечное число шагов выполнения находит некоторый элемент y из множества значений $Y(A)$. При этом для $\forall y \in Y, \exists x \in X$ такой, что, применив к нему алгоритм A, результатом будет y.

Для обозначения алгоритмов применим следующую нотацию: $A\big|_{x\in X}^{y\in Y}$ или $A\big|_X^Y$. Здесь A – идентификатор алгоритма, который отличает этот алгоритм от других и может быть представлен именем, адресом или выражением на естественном языке.

В процессе выполнения алгоритма, как правило, могут быть получены промежуточные результаты. Полный набор их идентификаторов обозначим q, а множество значений – $Q(A)$. Пусть набор $\langle x, q, y \rangle$ составляет словарь алгоритма, тогда множество допустимых данных алгоритма на этом словаре есть $Z(A) \subseteq X(A) \times Y(A) \times Q(A)$.

Определение 5. Алгоритмической структурой (АС) будем называть многоосновную структуру – расширение формальной структуры (1):

$$C_A = \langle M_A, V, \Sigma_A, \Lambda_A \rangle, \tag{3}$$

где $V = \{A_i^0\}$ – конечное множество образующих алгоритмов, заданное на $M_A \subseteq \bigcup_{A_i^0 \in V} (X(A_i^0) \cup Y(A_i^0))$ – носителе, в общем случае – неоднородном множестве.

Сигнатура Σ_A включает операции композиции ("$\cdot$") алгоритмов и условного выполнения (":") (определения 6, 8). Сигнатура Σ_A и аксиоматика Λ_A алгоритмической структуры полностью определены в [11].

Особенностью формальной алгоритмической структуры (далее просто алгоритмической структуры) является то, что ее операции определены на множестве алгоритмов.

Множество всех возможных сконструированных на основе алгоритмический структуры алгоритмов, удовлетворяющих определению алгоритма [11], обозначим $\Omega(C)$. Естественно, $V \subset \Omega(C)$.

Множество V может включать множества базовых алгоритмов одного или нескольких исполнителей.

Определение 6. Операция композиции "$\cdot$" определяет последовательное выполнение алгоритма $A_2\big|_{X_2}^{Y_2}$ непосредственно после $A_1\big|_{X_1}^{Y_1}$. Результатом операции есть алгоритм $A\big|_X^Y = A_1\big|_{X_1}^{Y_1} \cdot A_2\big|_{X_2}^{Y_2}$.

Определение 7. Алгоритм выбора $\widetilde{A}$ есть алгоритм с множеством определения $X(\widetilde{A}) = X_1 \bigcup X_2 \cdots \bigcup X_N$, $(\forall i, j \in [1..N], X_i \bigcap X_j = \varnothing)$ и множеством значений $Y(\widetilde{A}) = \{\theta_1, \theta_2, \ldots \theta_N\}$, такой, что $\widetilde{A}\,|_{X_i}^{\Theta=\{\theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_N\}} = \widetilde{A}\,|_{X_i}^{\Theta=\{\theta_i\}}$.

В частных случаях алгоритмических структур множество значений алгоритма выбора может быть $\{0,1\}$ или $\{true, \quad false\}$.

В алгоритмических структурах множество V может включать несколько алгоритмов выбора, что обусловливается возможностями исполнителей.

Определение 8. Алгоритм условного выполнения с множеством определения $\Theta_1 \times \Theta_2, \Theta_1 \subset \Theta, \Theta_2 = \{\theta_i \in \Theta\}$ заключается в выполнении следующей за ним операции условного выполнения $\vec{A}\,|_{\Theta_1,\Theta_2}^{\{:\}}$, которая и является значением алгоритма. Таким образом, некоммутативная операция условного выполнения ":" – $\vec{A}\,|_{\Theta_1,\Theta_2}^{\{:\}} : B_X^Y$ состоит в том, что, если $\Theta_2 \subseteq \Theta$, то алгоритм $B\,|_X^Y$ должен выполняться, в противном случае – нет.

Определение 9. Пусть "$\oplus$" произвольная операция сигнатуры Σ и алгоритм $A|_X^Y \in \Omega(C_A)$ построен на основе операций Σ над образующими алгоритмами V. Последовательную запись образующих алгоритмов $(A_1^0 \oplus A_2^0 \oplus \ldots \oplus A_N^0)\,|_X^Y = A\,|_X^Y$ назовем структурой $Str(A \setminus C_A)$ алгоритма $A\,|_X^Y$ в соответствующей алгоритмической структуре C_A или его структурной моделью.

4. Формальные грамматико-алгоритмические структуры

В формальной грамматико-алгоритмической структуре (ФГАС) основу составляет грамматическая структура, дополненная алгоритмической.

Определение 10. Грамматико-алгоритмической структурой назовем тройку

$$C_{GA} = \langle C_G, C_A \rangle = \langle M_{GA}, \Sigma_{GA}, \Lambda_{GA} \rangle, \tag{4}$$

где $M_{GA} = \langle M_G, M_A, V_A \rangle$ – неоднородный носитель, V_A – множество образующих алгоритмов, $\Sigma_{GA} = \{\rightarrow^2, \Sigma_A, \Rightarrow^2\}$ – сигнатура, $\Lambda_{GA} = \Lambda_G \bigcup \Lambda_A \bigcup \Lambda_{dGA}$. Λ_{dGA} включает аксиомы 7 – 9 и определение 10.

Аксиома 7 (о природе терминалов и нетерминалов). Терминалами ФГАС являются образующие алгоритмы ФГАС, нетерминалами – абстрактные алгоритмы.

Аксиома 8 (об операциях связывания). Операциями связывания терминалов и нетерминалов в цепочку являются операции Σ_A.

Цепочка в терминах грамматической структуры является структурой подалгоритма в терминах алгоритмической структуры.

Свойства операций из Σ_A полностью приведены в [11]. Они являются неотъемлемой частью аксиоматики алгоритмической структуры.

Аксиома 9 (о природе формального языка). Формальный язык ФГАС представляет собой множество допустимых структур алгоритмов $\{Str(A_i \setminus C_{GA})\}$.

Определение 10 (уточнение операции подстановки). При выполнении операции подстановки по правилу $S_j|_Z^U \to \lambda_j|_Z^U \quad \alpha_n \otimes S_j|_X^Y \otimes \beta_m \underset{S_j|_Z^U \to \lambda_j|_Z^U}{\Rightarrow} \alpha_n \otimes \lambda_j|_X^Y \otimes \beta_m$ выполняется подстановка входных и выходных данных в замещающей абстрактный алгоритм цепочке. Здесь $S_j|_Z^U$ – абстрактный алгоритм, $\alpha_n, \lambda_j, \beta_m$ – цепочки абстрактных и образующих алгоритмов.

Подстановка входных и выходных данных моделирует аппарат формальных и фактических параметров.

Если объектом моделирования алгоритмических структур являются любые алгоритмы, конструируемые из образующих алгоритмов с помощью операций из Σ_A, то в ФГАС множество алгоритмов ограничено правилами вывода. В терминах грамматик алгоритмическая структура моделирует свободный язык структур алгоритмов, а ФГАС – формальный.

Таким образом, ФГАС представляет собой средство для моделирования множества алгоритмов для решения некоторой задачи либо нескольких близких, а, может, даже разрозненных задач.

Наиболее простым применением ФГАС представляется моделирование бесконечного множества алгоритмов решения некоторой задачи. Далее приведена такая модель для решения задачи сортировки массива без дополнительной памяти и параллелизма.

5. Представление метаалгоритма сортировки средствами грамматико-алгоритмических структур

Основная идея построения различных алгоритмов сортировки в возможном рекурсивном разделении исходного массива на части (равные или нет, взаимно отсортированные или нет) с последующей сортировкой каждой части одним из известных методов. В [1] неформально множество возможных алгоритмов сортировки представлено в виде метаалгоритма. Разработана формальная модель алгоритмов сортировки с помощью конкретной грамматико-алгоритмической структуры.

Конкретизация ФГАС для алгоритмов сортировки заключается в конкретизации начального нетерминала и правил вывода:

$$C_{GA(AS)} = \langle M_{GA}, \Sigma_{GA}, \Lambda_{GA(AS)} \rangle, \quad (5)$$

где $\Lambda_{GA(AS)} = \Lambda_{GA} \bigcup \Lambda_{AS}$, Λ_{AS} включает аксиому 10 и аксиомы – правила вывода (6) – (33).

Аксиома 10 (о конкретном начальном нетерминале). Начальный символ $S_1|_{M,a,b,h,t}^M$ КФГАС является нетерминалом грамматической структуры, абстрактным оператором алгоритмической структуры, где M – сортируемый массив, a, b – номера начального и конечного элементов части массива, подлежащего сортировке, h – массив с последовательностью приращений для метода сортировки Шелла размерности t ($h = (31,\ 15,\ 7,\ 3,\ 1)$ [3]).

Обозначим абстрактные алгоритмы $S|_X^Y$ и $T|_X^Y$. $S|_X^Y$ отражает технологическую последовательность построения аксиоматики Λ_{AS} модифицированным методом пошаговой детализации [1]. $T|_X^Y$ – вспомогательные алгоритмы, упрощающие правила вывода.

Таблица 1. Терминальные алгоритмы КФГАС

Образующий алгоритм	Описание	Образующий алгоритм	Описание
$A_1\|_{a,b}^c$	$c := a + b$	$\tilde{A}_{11}\|_{a,b}^c$	$c := \begin{cases} 1, a = 1 \ \& \ b = 1 \\ 0, a \neq 1 \mid b \neq 1 \end{cases}$
$A_2\|_{a,b}^c$	$c := a - b$	$\tilde{A}_{12}\|_{a,b}^c$	$c := \begin{cases} 1, a \neq b \\ 0, a = b \end{cases}$
$A_3\|_a^c$	$c := a$	$\overset{w}{A}\|_{\tilde{T}_1,T_2}^{\{R_w\}}$	Цикл пока $R_w = \prod_{i=1}^{\infty} \tilde{T}_1\|_{a,b}^{y\in\{0,1\}} \cdot \vec{A}_9\|_{y,1}^{\{:\}} : T_2$
$A_4\|_{a,b}^c$	$c := a \ div \ b$	$\overset{r}{A}\|_{\tilde{T}_1,T_2}^{\{R_r\}}$	Цикл до $R_r = T_2 \cdot \prod_{i=1}^{\infty} \tilde{T}_1\|_{a,b}^{y\in\{0,1\}} \cdot \vec{A}_9\|_{y,0}^{\{:\}} : T_2$
$\tilde{A}_5\|_{a,b}^c$	$c := \begin{cases} 1, a > b \\ 0, a \leq b \end{cases}$	$\overset{f}{A}\|_{a,b,T_1}^{\{R_f\}}$	Цикл со счетчиком $R_f = \prod_{i=a}^{b} T_1$
$\tilde{A}_6\|_{a,b}^c$	$c := \begin{cases} 1, a \leq b \\ 0, a > b \end{cases}$	$\overset{b}{A}$	Прерывание цикла $R_w \mid R_r \mid R_f = \{A_1 \cdot \ldots \cdot \overset{b}{A} \cdot \ldots \cdot A_n\} = = \{A_1 \cdot \ldots \cdot \overset{b}{A}\}$
$\tilde{A}_7\|_{a,b}^c$	$c := \begin{cases} 1, a \geq b \\ 0, a < b \end{cases}$	$B_1\|_{a,b}^c$	$B_1\|_{a,b}^c \equiv A_1\|_{a,b}^c$
$\tilde{A}_8\|_{a,b}^c$	$c := \begin{cases} 1, a < b \\ 0, a \geq b \end{cases}$	$B_2\|_{a,b}^c$	$B_2\|_{a,b}^c \equiv A_2\|_{a,b}^c$
$\vec{A}_9\|_{a,1}^{\{:\}}$	Если $a = 1$, то выполняется терминал, следующий за текущим	$B_3\|_a^c$	$B_3\|_a^c \equiv A_3\|_a^c$
$\tilde{A}_{10}\|_{a,b}^c$	$c := \begin{cases} 1, a = b \\ 0, a \neq b \end{cases}$	$B_4\|_{"a",i}^{\%a}$	$\%a = "a" \& IntToStr(i)$

Образующие алгоритмы уровня языка программирования обозначим как $A_1 \ldots A_{12}$, $\overset{r}{A}$, $\overset{w}{A}$, $\overset{f}{A}$, $\overset{b}{A}$, их семантика приведена в таблице. $\tilde{A}$ – алгоритмы вычисления предикатов, $\vec{A}$, $\overset{r}{A}$, $\overset{w}{A}$, $\overset{f}{A}$, $\overset{b}{A}$ – алгоритмы управления последовательностью вычислений. Обратим внимание, что вход алгоритмов есть алгоритмы, а выходом являются действия (а не данные), такая возможность заложена в алгоритмических структурах [11].

Пусть $B_1 \ldots B_4$ – алгоритмы, используемые для формирования имен переменных, $\%q$ означает, что в качестве имени переменной нужно взять значение переменной $\%q$. Реализация алгоритмов $B_1 \ldots B_4$ может быть различной. В частности, это могут быть алгоритмы, реализующие препроцессорные переменные, как в языке программирования ПЛ/1.

Рассмотрим аксиоматику $\Lambda_{GA(AS)}$ в части правил вывода в порядке их разработки.

Имеем 4 правила вывода (6), (9) – (11) с начальным нетерминалом.

Правила вывода для формирования структуры алгоритма пирамидальной сортировки:

$$S_1 \big|^{M}_{M,a,b,h,t} \to A_4 \big|^{t_1}_{b,2} \cdot A_1 \big|^{l}_{t_1,1} \cdot A_3 \big|^{r}_{b} \cdot \overset{w}{A}\big|^{\{R_w\}}_{\tilde{A}_5|^{y}_{l,1},T_1|^{l,M,r}_{l,M,r}} \cdot \overset{w}{A}\big|^{\{R_w\}}_{\tilde{A}_5|^{y}_{r,1},T_2|^{M,r,l}_{M,r,l}},$$
$$T_1 \big|^{l,M,r}_{l,M,r} \to A_2 \big|^{l}_{l,1} \cdot S_2 \big|^{M,l,r}_{M,l,r}, \qquad T_2 \big|^{M,r,l}_{M,r,l} \to S_3 \big|^{M}_{M,1,r} \cdot A_2 \big|^{r}_{r,1} \cdot S_2 \big|^{M,l,r}_{M,l,r}, \tag{6}$$

где $r, l, i, j, x, y, t_i \in Q(A)$ и

$$S_2 \big|^{M,l,r}_{M,l,r} \to A_3 \big|^{i}_{l} \cdot A_1 \big|^{j}_{i,i} \cdot A_3 \big|^{x}_{M.(i)} \cdot A_3 \big|^{b}_{1} \cdot \overset{w}{A}\big|^{\{R_w\}}_{\tilde{T}_3|^{y}_{j,r,b},T_4|^{M}_{j,r,M,x,b,i}} \cdot A_3 \big|^{M.(i)}_{x},$$
$$\tilde{T}_3 \big|^{y}_{j,r,b} \to \tilde{A}_6 \big|^{t_1}_{j,r} \cdot \tilde{A}_{10} \big|^{t_2}_{b,1} \cdot \tilde{A}_{11} \big|^{y}_{t_1,t_2}, \tag{7а}$$

$$T_4 \big|^{M}_{j,r,M,x,b,i} \to \tilde{A}_8 \big|^{t_1}_{j,r} \cdot \vec{A}_9 \big|^{\{:\}}_{t_1,1} : (A_1 \big|^{t_2}_{j,1} \cdot \tilde{A}_8 \big|^{t_3}_{M.(j),M.(t_2)} \cdot \vec{A}_9 \big|^{\{:\}}_{t_3,1} : (A_1 \big|^{j}_{j,1})) \cdot$$
$$\cdot \tilde{A}_7 \big|^{t_4}_{x,M.(j)} \cdot \vec{A}_9 \big|^{\{:\}}_{t_4,1} : (A_3 \big|^{b}_{0}) \cdot \vec{A}_9 \big|^{\{:\}}_{t_4,0} : (A_3 \big|^{M.(i)}_{M.(j)} \cdot A_3 \big|^{i}_{j} \cdot A_1 \big|^{j}_{i,i}). \tag{7б}$$

Абстрактный алгоритм перестановки элементов массива:

$$S_3 \big|^{M}_{M,i,j} \to A_3 \big|^{x}_{M.(i)} \cdot A_3 \big|^{M.(i)}_{M.(j)} \cdot A_3 \big|^{M.(j)}_{x}. \tag{8}$$

Правила вывода для формирования структуры алгоритма быстрой сортировки:

$$S_1 \big|^{M}_{M,a,b,h,t} \to A_3 \big|^{s}_{1} \cdot A_3 \big|^{p.(1).l}_{1} \cdot A_3 \big|^{p.(1).r}_{b} \cdot \overset{r}{A}\big|^{\{R_r\}}_{\tilde{A}_{10}|^{y}_{s,0},T_5|^{p,s,M}_{p,s,M}},$$
$$T_5 \big|^{p,s,M}_{p,s,M} \to A_3 \big|^{l}_{p.(s).l} \cdot A_3 \big|^{r}_{p.(s).r} \cdot A_2 \big|^{s}_{s,1} \cdot \overset{r}{A}\big|^{\{R_r\}}_{\tilde{A}_7|^{\{:\}}_{l,r},T_6|^{l,r,p,s,M}_{l,r,p,s,M}},$$
$$T_6 \big|^{l,r,p,s,M}_{l,r,p,s,M} \to A_3 \big|^{i}_{l} \cdot A_3 \big|^{j}_{r} \cdot A_1 \big|^{t_3}_{l,r} \cdot A_4 \big|^{t_4}_{t_3,2} \cdot A_3 \big|^{x}_{M.(t_4)} \cdot \overset{r}{A}\big|^{\{R_r\}}_{\tilde{A}_5|^{y}_{i,j},T_7|^{M,x,i,j}_{M,x,i,j}} \cdot A_2 \big|^{t_{10}}_{j,l} \cdot A_2 \big|^{t_{11}}_{r,i} \cdot \tilde{A}_6 \big|^{t_{12}}_{t_{10},t_{11}} \cdot \vec{A}_9 \big|^{\{:\}}_{t_{12},1} : (\tilde{A}_8 \big|^{t_{13}}_{i,r} \cdot \tag{9}$$
$$\cdot \vec{A}_9 \big|^{\{:\}}_{t_{13},1} : (A_1 \big|^{s}_{s,1} \cdot A_3 \big|^{p.(s).l}_{i} \cdot A_3 \big|^{p.(s).r}_{r}) \cdot A_3 \big|^{r}_{j}) \cdot \vec{A}_9 \big|^{\{:\}}_{t_{12},0} : (\tilde{A}_8 \big|^{t_{14}}_{l,j} \cdot \vec{A}_9 \big|^{\{:\}}_{t_{14},1} : (A_1 \big|^{s}_{s,1} \cdot A_3 \big|^{p.(s).l}_{l} \cdot A_3 \big|^{p.(s).r}_{j}) \cdot A_3 \big|^{l}_{i}),$$
$$T_7 \big|^{M,x,i,j}_{M,x,i,j} \to \overset{w}{A}\big|^{\{R_w\}}_{\tilde{A}_8|^{y}_{M.(i),x},A_1|^{i}_{i,1}} \cdot \overset{w}{A}\big|^{\{R_w\}}_{\tilde{A}_8|^{y}_{x,M.(j)},A_2|^{j}_{j,1}} \cdot \tilde{A}_6 \big|^{t_9}_{i,j} \cdot \vec{A}_9 \big|^{\{:\}}_{t_9,1} : (S_9 \big|^{M}_{M,i,j} \cdot A_1 \big|^{i}_{i,1} \cdot A_2 \big|^{j}_{j,1}),$$

где $s, p \in Q(A)$, p – стек номеров начальных и конечных элементов сортируемых частей массива.

Правила вывода для формирования структуры алгоритма сортировки Шелла:

$$S_1 \big|^{M}_{M,a,b,h,t} \to A_3 \big|^{m}_{1} \cdot \overset{f}{A}\big|^{\{R_f\}}_{m,t,T_8|^{M}_{h,M,b}}, \qquad T_8 \big|^{M}_{h,M,b} \to A_3 \big|^{k}_{h.(m)} \cdot A_3 \big|^{s}_{-k} \cdot A_1 \big|^{i}_{k,1} \cdot \overset{f}{A}\big|^{\{R_f\}}_{i,b,T_9|^{M}_{M,i,k,s}},$$
$$T_9 \big|^{M}_{M,i,k,s} \to A_3 \big|^{x}_{M.(i)} \cdot A_2 \big|^{j}_{i,k} \cdot \tilde{A}_{10} \big|^{t_3}_{s,0} \cdot \vec{A}_9 \big|^{\{:\}}_{t_3,1} : (A_3 \big|^{s}_{-k}) \cdot A_1 \big|^{s}_{s,1} \cdot A_1 \big|^{M.(s)}_{x} \cdot \tag{10}$$
$$\cdot \overset{w}{A}\big|^{\{R_w\}}_{\tilde{A}_8|^{\{:\}}_{x,M.(j)},T_{10}|^{M}_{j,k,M}} \cdot A_1 \big|^{t_6}_{j,k} \cdot A_3 \big|^{M.(t_6)}_{x}, \qquad T_{10} \big|^{j,k,M}_{j,k,M} \to A_1 \big|^{t_5}_{j,k} \cdot A_3 \big|^{M.(t_5)}_{M.(j)} \cdot A_2 \big|^{j}_{j,k},$$

где $m, k \in Q(A)$.

Возможность разбиения массива на части начинается со следующего правила:

ISSN 1028-9763. Математичні машини і системи, 2010, № 1

$$S_1 \big|^{M}_{M,a,b,h,t} \rightarrow B_3 \big|^{i_1}_{1} \cdot B_4 \big|^{\%q}_{"q",i_1} \cdot B_3 \big|^{i_2}_{1} \cdot B_4 \big|^{\%n}_{"n",i_2} \cdot B_3 \big|^{i_3}_{1} \cdot B_4 \big|^{\%g}_{"g",i_3} \cdot B_3 \big|^{i_4}_{1} \cdot B_4 \big|^{\%f}_{"f",i_4} \cdot A_3 \big|^{z.(1)}_{a} \cdot A_3 \big|^{z.(2)}_{b} \cdot$$
$$\cdot A_3 \big|^{u_1}_{1} \cdot A_3 \big|^{u_2}_{-2} \cdot S_4 \big|^{M}_{M,a,b,h,i_1,i_2,i_3,i_4,\%q,\%n,\%g,\%f,z,v,u_1,u_2}, \tag{11}$$

где $i_1, i_2, i_3, i_4 \in Q(A)$, $\%q$ – признак, отсортирована ли часть массива при разбиении его на части, $\%n$ – направление прохода сортировки ($\%n = 1$ – сортировка в прямом направлении, $\%n = 0$ – в обратном), $\%g, \%f$ – начальный и конечный индексы частей массива, отсортированных алгоритмами вставки, z – стек пар (начало, конец) сортируемых частей массива, v – стек пар (начало, конец) отсортированных частей массива, которые после их отдельной сортировки нужно объединять, u_1 – указатель стека z, u_2 – указатель стека v.

Следующие правила задают структуру алгоритма, где в цикле задается направление прохода и выполняется сортировка одним из методов.

$$S_4 \big|^{M}_{\substack{M,a,b,h,i_1,i_2,i_3,i_4,\%q,\\ \%n,\%g,\%f,z,v,u_1,u_2}} \rightarrow A_3 \big|^{\%q}_{1} \cdot \tilde{A}_5 \big|^{t_1}_{u_1,0} \cdot \vec{A}_3 \big|^{\{:\}}_{t_1,1} : (S_5 \big|^{z,u_1,\%n,\%g,\%f}_{z,u_1} \cdot \overset{w}{A} \big|^{\{R_w\}}_{\tilde{A}_{10}\big|^{y}_{\%q,1},\, T_{11}\big|^{M}_{\substack{M,a,b,h,i_1,i_2,i_3,i_4,\%q,\\ \%n,\%g,\%f,z,v,u_1,u_2}}}),$$
$$T_{11} \big|^{M}_{\substack{M,i_1,i_2,i_3,i_4,z,v,\\ u_1,u_2,\%q,\%n,\%g,\%f}} \rightarrow S_6 \Big|^{\substack{M,i_1,i_2,i_3,i_4,z,v,\\ u_1,u_2,\%q,\%n,\%g,\%f}}_{\substack{M,i_1,i_2,i_3,i_4,z,v,\\ u_1,u_2,\%q,\%n,\%g,\%f}} \cdot \tilde{A}_{10} \big|^{t_3}_{\%q,0} \cdot \vec{A}_9 \big|^{\{:\}}_{t_3,1} : (A_2 \big|^{u_1}_{u_1,2} \cdot \overset{b}{A}) \cdot S_7 \big|^{\%n}_{\%n}. \tag{12}$$

В (13) и (14) устанавливается направление прохода сортировки. В (13) – направление прохода с начала в конец, в (14) – наоборот.

$$S_5 \big|^{z,u_1,\%n,\%g,\%f}_{z,u_1} \rightarrow A_3 \big|^{\%n}_{1} \cdot A_1 \big|^{\%g}_{z.(u_1),1} \cdot A_3 \big|^{t_1}_{u_1,1} \cdot A_3 \big|^{\%f}_{z.(t_1),1}, \tag{13}$$

$$S_5 \big|^{z,u_1,\%n,\%g,\%f}_{z,u_1} \rightarrow A_3 \big|^{\%n}_{-1} \cdot A_1 \big|^{\%g}_{z.(u_1),1} \cdot A_3 \big|^{t_1}_{u_1,1} \cdot A_3 \big|^{\%f}_{z.(t_1),1}. \tag{14}$$

Абстрактный алгоритм S_4 – алгоритм одного прохода сортировки массива.

Правилом (15) один проход разбивается на два. Применение при выводе структуры конкретного алгоритма позволит сочетать проходы сортировки различными методами.

$$S_6 \Big|^{\substack{M,i_1,i_2,i_3,i_4,z,v,\\ u_1,u_2,\%q,\%n,\%g,\%f}}_{\substack{M,i_1,i_2,i_3,i_4,z,v,\\ u_1,u_2,\%q,\%n,\%g,\%f}} \rightarrow S_6 \Big|^{\substack{M,i_1,i_2,i_3,i_4,z,v,\\ u_1,u_2,\%q,\%n,\%g,\%f}}_{\substack{M,i_1,i_2,i_3,i_4,z,v,\\ u_1,u_2,\%q,\%n,\%g,\%f}} \cdot S_7 \big|^{\%n}_{\%n} \cdot S_6 \Big|^{\substack{M,i_1,i_2,i_3,i_4,z,v,\\ u_1,u_2,\%q,\%n,\%g,\%f}}_{\substack{M,i_1,i_2,i_3,i_4,z,v,\\ u_1,u_2,\%q,\%n,\%g,\%f}} \cdot S_7 \big|^{\%n}_{\%n} \tag{15}$$

В (16) массив разбивается на две части одинакового размера, каждая часть сортируется отдельно, затем выполняется их объединение.

$$S_6 \Big|^{\substack{M,i_1,i_2,i_3,i_4,z,v,\\ u_1,u_2,\%q,\%n,\%g,\%f}}_{\substack{M,i_1,i_2,i_3,i_4,z,v,\\ u_1,u_2,\%q,\%n,\%g,\%f}} \rightarrow S_8 \big|^{M,z,u_1,v,u_2}_{M,z,u_1,v,u_2} \cdot B_1 \big|^{i_1}_{i_1,1} \cdot B_4 \big|^{\%q}_{"q",i_1} \cdot B_1 \big|^{i_2}_{i_2,1} \cdot B_4 \big|^{\%n}_{"n",i_2} \cdot B_1 \big|^{i_3}_{i_3,1} \cdot B_4 \big|^{\%g}_{"g",i_3} \cdot$$
$$\cdot B_1 \big|^{i_4}_{i_4,1} \cdot B_4 \big|^{\%f}_{"f",i_4} \cdot S_4 \big|^{M}_{\substack{M,a,b,h,i_1,i_2,i_3,i_4,\%q,\\ \%n,\%g,\%f,z,v,u_1,u_2}} \cdot S_4 \big|^{M}_{\substack{M,a,b,h,i_1,i_2,i_3,i_4,\%q,\\ \%n,\%g,\%f,z,v,u_1,u_2}} \cdot S_9 \big|^{M,v,u_2}_{M,v,u_2} \cdot B_2 \big|^{i_1}_{i_1,1} \cdot$$
$$\cdot B_4 \big|^{\%q}_{"q",i_1} \cdot B_2 \big|^{i_2}_{i_2,1} \cdot B_4 \big|^{\%n}_{"n",i_2} \cdot B_2 \big|^{i_3}_{i_3,1} \cdot B_4 \big|^{\%g}_{"g",i_3} \cdot B_2 \big|^{i_4}_{i_4,1} \cdot B_4 \big|^{\%f}_{"f",i_4}. \tag{16}$$

Правило (17) разбивает массив на две взаимно отсортированные части (как в быстрой сортировке), и каждая часть сортируется отдельно.

$$S_6\Big|^{\substack{M,i_1,i_2,i_3,i_4,z,v,\\ u_1,u_2,\%q,\%n,\%g,\%f}}_{\substack{M,i_1,i_2,i_3,i_4,z,v,\\ u_1,u_2,\%q,\%n,\%g,\%f}} \to S_{10}\,\big|^{M,l,r}_{M,l,r} \cdot B_1\,\big|^{i_1}_{i_1,1} \cdot B_4\,\big|^{\%q}_{"q",i_1} \cdot B_1\,\big|^{i_2}_{i_2,1} \cdot B_4\,\big|^{\%n}_{"n",i_2} \cdot B_1\,\big|^{i_3}_{i_3,1} \cdot B_4\,\big|^{\%g}_{"g",i_3} \cdot$$

$$\cdot B_1\,\big|^{i_4}_{i_4,1} \cdot B_4\,\big|^{\%f}_{"f",i_4} \cdot S_4\,\Big|^{M}_{\substack{M,a,b,h,i_1,i_2,i_3,i_4,\%q,\\ \%n,\%g,\%f,z,v,u_1,u_2}} \cdot S_4\,\Big|^{M}_{\substack{M,a,b,h,i_1,i_2,i_3,i_4,\%q,\\ \%n,\%g,\%f,z,v,u_1,u_2}} \cdot B_2\,\big|^{i_1}_{i_1,1} \cdot B_4\,\big|^{\%q}_{"q",i_1} \cdot \tag{17}$$

$$\cdot B_2\,\big|^{i_2}_{i_2,1} \cdot B_4\,\big|^{\%n}_{"n",i_2} \cdot B_2\,\big|^{i_3}_{i_3,1} \cdot B_4\,\big|^{\%g}_{"g",i_3} \cdot B_2\,\big|^{i_4}_{i_4,1} \cdot B_4\,\big|^{\%f}_{"f",i_4}$$

выбором, вставкой, бинарными вставками.

Правила (18) – (20) определяют абстрактные алгоритмы, выполняющие прямой, обратный и маятниковый проходы массива (соответственно) методом пузырька $(I_b, I_e \in Q(A))$.

$$S_6\Big|^{\substack{M,i_1,i_2,i_3,i_4,z,v,\\ u_1,u_2,\%q,\%n,\%g,\%f}}_{\substack{M,i_1,i_2,i_3,i_4,z,v,\\ u_1,u_2,\%q,\%n,\%g,\%f}} \to \vec{T}_{12}\,\big|^{\{:\}}_{z,u_1} : (T_{13}\,\big|^{I_e,M,z,u_1}_{I_b,I_e,M,z,u_1}) \cdot T_{14}\,\big|^{\%q}_{I_b,I_e}, \tag{18}$$

$$\vec{T}_{12}\,\big|^{\{:\}}_{z,u_1} \to A_3\,\big|^{I_b}_{z.(u_1)} \cdot A_1\,\big|^{t_5}_{u_1,1} \cdot A_3\,\big|^{I_e}_{z.(t_5)} \cdot \tilde{A}_8\,\big|^{t_7}_{I_b,I_e} \cdot \vec{A}_9\,\big|^{\{:\}}_{t_7,1},$$

$$T_{13}\,\big|^{I_e,M,z,u_1}_{I_b,I_e,M,z,u_1} \to A_3\,\big|^{i}_{I_b} \cdot A_3\,\big|^{j}_{I_b} \cdot A_2\,\big|^{t_3}_{I_e,1} \cdot \overset{f}{A}\,\big|^{\{R_f\}}_{j,t_3,T_{15}|^{j,M,i}_{j,M,i}} \cdot A_3\,\big|^{I_e}_{i} \cdot A_1\,\big|^{t_4}_{u_1,1} \cdot A_3\,\big|^{z.(t_4)}_{I_e},$$

$$T_{14}\,\big|^{\%q}_{I_b,I_e} \to \tilde{A}_7\,\big|^{t_6}_{I_b,I_e} \cdot \vec{A}_9\,\big|^{\{:\}}_{t_6,1} : (A_3\,\big|^{\%q}_{0}), \qquad T_{15}\,\big|^{j,M,i}_{j,M,i} \to A_1\,\big|^{t_1}_{j,1} \cdot \tilde{A}_5\,\big|^{t_2}_{M.(j),M.(t_1)} \cdot \vec{A}_9\,\big|^{\{:\}}_{t_2,1} : (S_3\,\big|^{M}_{M,j,t_1} \cdot A_3\,\big|^{i}_{j}).$$

$$S_6\Big|^{\substack{M,i_1,i_2,i_3,i_4,z,v,\\ u_1,u_2,\%q,\%n,\%g,\%f}}_{\substack{M,i_1,i_2,i_3,i_4,z,v,\\ u_1,u_2,\%q,\%n,\%g,\%f}} \to \vec{T}_{12}\,\big|^{\{:\}}_{z,u_1} : (T_{16}\,\big|^{I_b,M,z,u_1}_{I_b,I_e,M,z,u_1}) \cdot T_{14}\,\big|^{\%q}_{I_b,I_e}, \tag{19}$$

$$T_{16}\,\big|^{I_b,M,z,u_1}_{I_b,I_e,M,z,u_1} \to A_3\,\big|^{i}_{I_e} \cdot A_3\,\big|^{j}_{I_e} \cdot A_1\,\big|^{t_3}_{I_b,1} \cdot \overset{f}{A}\,\big|^{\{R_f\}}_{t_3,j,T_{17}|^{j,M,i}_{j,M,i}} \cdot A_3\,\big|^{I_b}_{i} \cdot A_3\,\big|^{z.(u_1)}_{I_b},$$

$$T_{17}\,\big|^{j,M,i}_{j,M,i} \to A_2\,\big|^{t_1}_{j,1} \cdot \tilde{A}_5\,\big|^{t_2}_{M.(t_1),M.(j)} \cdot \vec{A}_9\,\big|^{\{:\}}_{t_2,1} : (S_3\,\big|^{M}_{M,t_1,j} \cdot A_2\,\big|^{i}_{j,1}).$$

$$S_6\Big|^{\substack{M,i_1,i_2,i_3,i_4,z,v,\\ u_1,u_2,\%q,\%n,\%g,\%f}}_{\substack{M,i_1,i_2,i_3,i_4,z,v,\\ u_1,u_2,\%q,\%n,\%g,\%f}} \to \vec{T}_{12}\,\big|^{\{:\}}_{z,u_1} : (\tilde{A}_{10}\,\big|^{t_{10}}_{\%n,1} \cdot \vec{A}_9\,\big|^{\{:\}}_{t_{10},1} : (T_{13}\,\big|^{I_e,M,z,u_1}_{I_b,I_e,M,z,u_1}) \cdot$$

$$\cdot \vec{A}_9\,\big|^{\{:\}}_{t_{10},0} : (T_{16}\,\big|^{I_b,M,z,u_1}_{I_b,I_e,M,z,u_1})) \cdot T_{14}\,\big|^{\%q}_{I_b,I_e}). \tag{20}$$

Правило (21) предназначено для изменения направления прохода сортировки.

$$S_7\,\big|^{\%n}_{\%n} \to A_2\,\big|^{\%n}_{0,\%n}. \tag{21}$$

Разбиение массива на две части определим как

$$S_8\,\big|^{z,v,u_1,u_2}_{z,v,u_1,u_2} \to A_3\,\big|^{I_b}_{z.(u_1)} \cdot A_1\,\big|^{t_1}_{u_1,1} \cdot A_3\,\big|^{I_e}_{z.(t_1)} \cdot \tilde{A}_6\,\big|^{t_2}_{I_b,I_e} \cdot \vec{A}_9\,\big|^{\{:\}}_{t_2,1} : (A_1\,\big|^{t_3}_{u_1,2} \cdot A_3\,\big|^{z.(t_3)}_{z.(u_1)} \cdot A_1\,\big|^{t_3}_{u_1,3} \cdot A_1\,\big|^{t_4}_{u_1,1} \cdot$$

$$\cdot A_1\,\big|^{t_5}_{z.(u_1),z.(t_4)} \cdot A_4\,\big|^{z.(t_3)}_{t_5,2} \cdot A_1\,\big|^{z.(u_1)}_{z.(t_3),1} \cdot A_1\,\big|^{u_2}_{u_2,3} \cdot A_1\,\big|^{t_3}_{u_1,2} \cdot A_3\,\big|^{v.(u_2)}_{z.(t_3)} \cdot A_1\,\big|^{t_3}_{u_2,1} \cdot A_3\,\big|^{v.(t_3)}_{z.(u_1)} \cdot A_1\,\big|^{t_3}_{u_2,2} \cdot A_1\,\big|^{t_4}_{u_1,1} \cdot$$

$$\cdot A_3\,\big|^{v.(t_3)}_{z.(t_4)} \cdot A_1\,\big|^{u_1}_{u_1,2}) \cdot \vec{A}_9\,\big|^{\{:\}}_{t_2,0} : (A_1\,\big|^{t_3}_{u_1,2} \cdot A_3\,\big|^{z.(t_3)}_{1} \cdot A_1\,\big|^{t_3}_{u_1,3} \cdot A_3\,\big|^{z.(t_3)}_{1} \cdot A_1\,\big|^{u_2}_{u_2,3} \cdot A_3\,\big|^{v.(u_2)}_{1} \cdot A_1\,\big|^{t_3}_{u_2,1} \cdot \tag{22}$$

$$\cdot A_3\,\big|^{v.(t_3)}_{1} \cdot A_1\,\big|^{t_3}_{u_2,2} \cdot A_3\,\big|^{v.(t_3)}_{1} \cdot A_1\,\big|^{u_1}_{u_1,2}).$$

Объединение двух отсортированных частей массива:

$$S_9\,\big|^{M,v,u_2}_{M,v,u_2} \to A_3\,\big|^{i}_{v.(u_2)} \cdot A_1\,\big|^{t_1}_{u_2,1} \cdot A_3\,\big|^{j}_{v.(t_1)} \cdot A_1\,\big|^{t_1}_{u_2,2} \cdot A_3\,\big|^{I_e}_{v.(t_1)} \cdot A_2\,\big|^{u_2}_{u_2,3} \cdot A_3\,\big|^{q}_{j} \cdot \overset{w}{A}\,\big|^{\{R_w\}}_{\tilde{A}_8|^{y}_{i,I_e},T_{18}|^{q,j,i,M}_{q,j,i,M}},$$

$$T_{18}\,\big|^{q,j,i,M}_{q,j,i,M} \to \tilde{A}_{10}\,\big|^{t_2}_{q,j} \cdot \vec{A}_9\,\big|^{\{:\}}_{t_2,1} : (\tilde{A}_5\,\big|^{t_3}_{M.(i),M.(j)} \cdot \vec{A}_9\,\big|^{\{:\}}_{t_3,1} : (S_3\,\big|^{M,i,j}_{M,i,j} \cdot A_1\,\big|^{j}_{j,1})) \cdot \vec{A}_9\,\big|^{\{:\}}_{t_2,0} : (\tilde{A}_5\,\big|^{t_3}_{M.(q),M.(j)} \cdot \tag{23a}$$

$$\cdot \vec{A}_9 \big|^{\{:\}}_{t_3,1} : (S_3 \big|^{M,i,j}_{M,i,j} \cdot A_1 \big|^{j}_{j,1}) \cdot \vec{A}_9 \big|^{\{:\}}_{t_3,0} : (A_3 \big|^{x}_{M.(i)} \cdot A_3 \big|^{M.(i)}_{M.(q)} \cdot A_3 \big|^{t_5}_{q} \cdot A_2 \big|^{t_6}_{j,2} \cdot \overset{f}{A} \big|^{\{R_f\}}_{t_5,t_6,T_{19}|^{M}_{t_5,M}} \cdot A_2 \big|^{t_7}_{j,1} \cdot$$

$$\cdot A_3 \big|^{M.(t_7)}_{x})) \cdot A_1 \big|^{i}_{i,1} \cdot \widetilde{A}_5 \big|^{t_8}_{j,I_e} \cdot \vec{A}_9 \big|^{\{:\}}_{t_8,1} : (A_3 \big|^{j}_{q}) \cdot \widetilde{A}_{10} \big|^{t_8}_{i,q} \cdot \vec{A}_9 \big|^{\{:\}}_{t_8,1} : (A_3 \big|^{q}_{j}) \cdot \widetilde{A}_{10} \big|^{t_9}_{i,j} \cdot \vec{A}_9 \big|^{\{:\}}_{t_9,1} : (\overset{b}{A}), \qquad (23б)$$

$$T_{19}\big|^{M}_{q,M} \to A_1 \big|^{t_{10}}_{q,1} \cdot A_3 \big|^{M.(q)}_{M.(t_{10})} .$$

Разбиение массива на две взаимно отсортированные части:

$$S_{10} \big|^{M,z,u_1}_{M,z,u_1} \to A_3 \big|^{I_b}_{z.(u_1)} \cdot A_1 \big|^{t_1}_{u_1,1} \cdot A_3 \big|^{I_e}_{z.(t_1)} \cdot \widetilde{A}_8 \big|^{t_2}_{I_b,I_e} \cdot \vec{A}_9 \big|^{\{:\}}_{t_2,1} : (A_1 \big|^{t_3}_{z.(u_1),z.(t_1)} \cdot A_4 \big|^{t_4}_{t_3,2} \cdot A_3 \big|^{t_5}_{z.(t_4)} \overset{r}{A} \big|^{\{R_r\}}_{\widetilde{A}_5|^{y}_{I_b,I_e},T_{20}|^{I_b,I_e,M}_{I_b,I_e,M}} \cdot$$

$$\cdot A_1 \big|^{t_7}_{u_1,2} \cdot A_1 \big|^{t_8}_{u_1,3} \cdot A_2 \big|^{t_9}_{I_e,z.(u_1)} \cdot A_2 \big|^{t_{10}}_{z.(t_1),I_b} \cdot \widetilde{A}_8 \big|^{t_{11}}_{t_9,t_{10}} \cdot \vec{A}_9 \big|^{\{:\}}_{t_{11},1} : (A_3 \big|^{z.(t_7)}_{z.(u_1)} \cdot A_3 \big|^{z.(t_8)}_{I_e} \cdot A_3 \big|^{z.(u_1)}_{I_b}) \cdot \qquad (24)$$

$$\vec{A}_9 \big|^{\{:\}}_{t_{11},0} : (A_1 \big|^{z.(t_7)}_{I_b} \cdot A_1 \big|^{z.(t_8)}_{z.(t_1)} \cdot A_1 \big|^{z.(t_1)}_{I_e})) \cdot \vec{A}_9 \big|^{\{:\}}_{t_2,0} : (A_3 \big|^{z.(t_7)}_{I_b} \cdot A_3 \big|^{z.(t_8)}_{I_e}),$$

$$T_{20}\big|^{M}_{q,M} \to \overset{w}{A} \big|^{\{R_w\}}_{\widetilde{A}_8|^{y}_{M.(I_b),t_5},A_1|^{I_b}_{I_b,1}} \cdot \overset{w}{A} \big|^{\{R_w\}}_{\widetilde{A}_8|^{y}_{t_5,M.(I_e),},A_2|^{I_e}_{I_e,1}} \cdot \widetilde{A}_6 \big|^{t_6}_{I_b,I_e} \cdot \vec{A}_9 \big|^{\{:\}}_{t_6,1} : (S_3 \big|^{M}_{M,I_b,I_e} \cdot A_1 \big|^{I_b}_{I_b,1} \cdot A_2 \big|^{I_e}_{I_e,1}).$$

Правила (25) – (27) определяют абстрактные алгоритмы, выполняющие прямой, обратный и маятниковый проходы массива (соответственно) при сортировке выбором.

$$S_6\Big|^{\substack{M,i_1,i_2,i_3,i_4,z,v,\\ u_1,u_2,\%q,\%n,\%g,\%f}}_{\substack{M,i_1,i_2,i_3,i_4,z,v,\\ u_1,u_2,\%q,\%n,\%g,\%f}} \to \vec{T}_{12} \big|^{\{:\}}_{z,u_1} : (T_{21} \big|^{I_b,M,I_e,z,u_1}_{I_b,M,I_e,z,u_1}) \cdot T_{14} \big|^{\%q}_{I_b,I_e}, \qquad (25)$$

$$T_{21} \big|^{I_b,M,I_e,z,u_1}_{I_b,M,I_e,z,u_1} \to A_3 \big|^{t_1}_{M.(I_b)} \cdot A_3 \big|^{t_2}_{I_b} \cdot A_1 \big|^{j}_{I_b,1} \cdot \overset{f}{A} \big|^{\{R_f\}}_{j,I_e,T_{22}|^{M,j,t_1,t_2}_{M,j,t_1,t_2}} \cdot A_3 \big|^{M.(t_2)}_{M.(I_b)} \cdot A_3 \big|^{M.(I_b)}_{t_1} \cdot A_1 \big|^{I_b}_{I_b,1} \cdot A_3 \big|^{z.(u_1)}_{I_b},$$

$$T_{22} \big|^{M,j,t_1,t_2}_{M,j,t_1,t_2} \to \widetilde{A}_8 \big|^{t_3}_{M.(j),t_1} \cdot \vec{A}_9 \big|^{\{:\}}_{t_3,1} : (A_3 \big|^{t_1}_{M.(j)} \cdot A_3 \big|^{t_2}_{j}),$$

$$S_6\Big|^{\substack{M,i_1,i_2,i_3,i_4,z,v,\\ u_1,u_2,\%q,\%n,\%g,\%f}}_{\substack{M,i_1,i_2,i_3,i_4,z,v,\\ u_1,u_2,\%q,\%n,\%g,\%f}} \to \vec{T}_{12} \big|^{\{:\}}_{z,u_1} : (T_{23} \big|^{I_b,M,I_e,z,u_1}_{I_b,M,I_e,z,u_1}) \cdot T_{14} \big|^{\%q}_{I_b,I_e}, \qquad (26)$$

$$T_{23} \big|^{I_b,M,I_e,z,u_1}_{I_b,M,I_e,z,u_1} \to A_3 \big|^{t_1}_{M.(I_e)} \cdot A_3 \big|^{t_2}_{I_e} \cdot A_2 \big|^{j}_{I_e,1} \cdot \overset{f}{A} \big|^{\{R_f\}}_{I_b,j,T_{24}|^{M,j,t_1,t_2}_{M,j,t_1,t_2}} \cdot A_3 \big|^{M.(t_2)}_{M.(I_e)} \cdot A_3 \big|^{M.(I_e)}_{t_1} \cdot A_2 \big|^{I_e}_{I_e,1} \cdot A_1 \big|^{t_4}_{u_1,1} \cdot A_3 \big|^{z.(t_4)}_{I_e},$$

$$T_{24} \big|^{M,j,t_1,t_2}_{M,j,t_1,t_2} \to \widetilde{A}_5 \big|^{t_3}_{M.(j),t_1} \cdot \vec{A}_9 \big|^{\{:\}}_{t_3,1} : (A_3 \big|^{t_1}_{M.(j)} \cdot A_3 \big|^{t_2}_{j}),$$

$$S_6\Big|^{\substack{M,i_1,i_2,i_3,i_4,z,v,\\ u_1,u_2,\%q,\%n,\%g,\%f}}_{\substack{M,i_1,i_2,i_3,i_4,z,v,\\ u_1,u_2,\%q,\%n,\%g,\%f}} \to \vec{T}_{12} \big|^{\{:\}}_{z,u_1} : (\widetilde{A}_{10} \big|^{t_{10}}_{\%n,1} \cdot \vec{A}_9 \big|^{\{:\}}_{t_{10},1} : (T_{21} \big|^{I_b,M,I_e,z,u_1}_{I_b,M,I_e,z,u_1}) \cdot \vec{A}_9 \big|^{\{:\}}_{t_{10},0} : (T_{23} \big|^{I_b,M,I_e,z,u_1}_{I_b,M,I_e,z,u_1})) \cdot T_{14} \big|^{\%q}_{I_b,I_e} . \qquad (27)$$

Правила (28) – (30) определяют абстрактные алгоритмы, выполняющие прямой, обратный и маятниковый проходы массива (соответственно) при сортировке вставками.

$$S_6\Big|^{\substack{M,i_1,i_2,i_3,i_4,z,v,\\ u_1,u_2,\%q,\%n,\%g,\%f}}_{\substack{M,i_1,i_2,i_3,i_4,z,v,\\ u_1,u_2,\%q,\%n,\%g,\%f}} \to \vec{T}_{12} \big|^{\{:\}}_{z,u_1} : (T_{25} \big|^{M,I_b,I_e,z,u_1,\%g}_{M,I_b,I_e,z,u_1,\%g} \cdot A_1 \big|^{\%g}_{\%g,1} \cdot \tilde{A}_5 \big|^{t_2}_{\%g,I_e} \cdot \vec{A}_9 \big|^{\{:\}}_{t_2,1} : (A_3 \big|^{z.(u_1)}_{I_e} \cdot A_3 \big|^{I_b}_{I_e})) \cdot T_{14} \big|^{\%q}_{I_b,I_e}, \qquad (28)$$

$$T_{25} \big|^{M,I_b,I_e,z,u_1,\%g}_{M,I_b,I_e,z,u_1,\%g} \to A_3 \big|^{x}_{M.(\%g)} \cdot A_2 \big|^{j}_{\%g,1} \cdot \overset{w}{A} \big|^{\{R_w\}}_{\widetilde{T}_{26}|^{y}_{j,I_b,M,x},T_{27}|^{M}_{j,M}} \cdot A_1 \big|^{t1}_{j,1} \cdot A_3 \big|^{M.(t_1)}_{x},$$

$$\widetilde{T}_{26} \big|^{y}_{j,I_b,M,x} \to \widetilde{A}_7 \big|^{t_1}_{j,I_b} \cdot \widetilde{A}_5 \big|^{t_2}_{M.(j),x} \cdot \widetilde{A}_{11} \big|^{y}_{t_1,t_2}, \qquad T_{27} \big|^{j,M}_{j,M} \to A_1 \big|^{t_1}_{j,1} \cdot A_3 \big|^{M.(t_1)}_{M.(j)} \cdot A_2 \big|^{j}_{j,1},$$

$$S_6\Big|^{\substack{M,i_1,i_2,i_3,i_4,z,v,\\ u_1,u_2,\%q,\%n,\%g,\%f}}_{\substack{M,i_1,i_2,i_3,i_4,z,v,\\ u_1,u_2,\%q,\%n,\%g,\%f}} \to \vec{T}_{12} \big|^{\{:\}}_{z,u_1} : (T_{28} \big|^{M,I_b,I_e,z,u_1,\%f}_{M,I_b,I_e,z,u_1,\%f} \cdot A_2 \big|^{\%f}_{\%f,1} \cdot \widetilde{A}_8 \big|^{t_2}_{\%f,I_b} \cdot \qquad (29)$$

$$\cdot \vec{A}_9 \big|^{\{:\}}_{t_2,1} : (A_1 \big|^{t_3}_{u_1,1} \cdot A_3 \big|^{z.(t_3)}_{I_b} \cdot A_3 \big|^{I_b}_{I_e})) \cdot T_{14} \big|^{\%q}_{I_b,I_e},$$

$$T_{28}\,\Big|^{M,I_b,I_e,z,u_1,\%f}_{M,I_b,I_e,z,u_1,\%f} \to A_3\,\Big|^{x}_{M.(\%f)} \cdot A_1\,\Big|^{j}_{\%f,1} \cdot \overset{w}{A}\,\Big|^{\{R_w\}}_{\tilde{T}_{29}|^{y}_{j,I_e,M,x},\,T_{30}|^{j,M}_{j,M}} \cdot A_2\,\Big|^{t_1}_{j,1} \cdot A_3\,\Big|^{M.(t_1)}_{x},$$

$$\tilde{T}_{29}\,\Big|^{y}_{j,I_e,M,x} \to \tilde{A}_6\,\Big|^{t_1}_{j,I_e} \cdot \tilde{A}_8\,\Big|^{t_2}_{M.(j),x} \cdot \tilde{A}_{11}\,\Big|^{y}_{t_1,t_2}, \qquad T_{30}\,\Big|^{j,M}_{j,M} \to A_2\,\Big|^{t_1}_{j,1} \cdot A_3\,\Big|^{M.(t_1)}_{M.(j)} \cdot A_1\,\Big|^{j}_{j,1}.$$

$$\begin{gathered}
S_6\Big|^{\substack{M,i_1,i_2,i_3,i_4,z,v,\\u_1,u_2,\%q,\%n,\%g,\%f}}_{\substack{M,i_1,i_2,i_3,i_4,z,v,\\u_1,u_2,\%q,\%n,\%g,\%f}} \to T_{31}\,\Big|^{M,\%g,\%q}_{M,\%g} : (\tilde{A}_{10}\,\Big|^{t_5}_{\%n,1} \cdot \vec{A}_9\,\Big|^{\{:\}}_{t_5,1} : (T_{25}\,\Big|^{M,I_b,I_e,z,u_1,\%g}_{M,I_b,I_e,z,u_1,\%g} \cdot \tilde{A}_{12}\,\Big|^{t_6}_{\%g,\%f} \cdot \vec{A}_9\,\Big|^{\{:\}}_{t_6,1} : (A_1\,\Big|^{\%g}_{\%g,1}) \cdot \\
\cdot \vec{A}_9\,\Big|^{\{:\}}_{t_6,0} : (T_{32}\,\Big|^{M,\%g,\%q}_{M,\%g})) \cdot \vec{A}_9\,\Big|^{\{:\}}_{t_5,0} : (T_{28}\,\Big|^{M,I_b,I_e,z,u_1,\%f}_{M,I_b,I_e,z,u_1,\%f} \cdot \tilde{A}_{12}\,\Big|^{t_{12}}_{\%g,\%f} \cdot \vec{A}_9\,\Big|^{\{:\}}_{t_{12},1} : (A_2\,\Big|^{\%f}_{\%f,1}) \cdot \vec{A}_9\,\Big|^{\{:\}}_{t_{12},0} : \\
: (T_{32}\,\Big|^{M,\%g,\%q}_{M,\%g}))); \quad T_{31}\,\Big|^{M,\%g,\%q}_{M,\%g} \to A_3\,\Big|^{I_b}_{z.(u_1)} \cdot A_1\,\Big|^{t_1}_{u_1,1} \cdot A_3\,\Big|^{I_e}_{z.(t_1)} \cdot A_2\,\Big|^{t_2}_{I_e,I_b} \cdot \tilde{A}_{10}\,\Big|^{t_3}_{t_2,1} \cdot \vec{A}_9\,\Big|^{\{:\}}_{t_3,1} : \\
: (\tilde{A}_5\,\Big|^{t_3}_{M.(I_b),M.(I_e)} \cdot \vec{A}_9\,\Big|^{\{:\}}_{t_3,1} : (S_3\,\Big|^{M}_{M,I_b,I_e}) \cdot A_3\,\Big|^{\%q}_{0}) \cdot \tilde{A}_7\,\Big|^{t_4}_{I_b,I_e} \cdot \vec{A}_9\,\Big|^{\{:\}}_{t_4,1} : (A_3\,\Big|^{\%q}_{0}) \cdot \vec{A}_9\,\Big|^{\{:\}}_{t_4,0} \\
T_{32}\,\Big|^{M,\%g,\%q}_{M,\%g} \to A_2\,\Big|^{t_7}_{\%g,1} \cdot \tilde{A}_6\,\Big|^{t_8}_{M.(t_7),M.(\%g)} \cdot A_1\,\Big|^{t_9}_{\%g,1} \cdot \tilde{A}_6\,\Big|^{t_{10}}_{M.(\%g),M.(t_9)} \cdot \tilde{A}_1\,\Big|^{t_{11}}_{t_8,t_{10}} \cdot \vec{A}_9\,\Big|^{\{:\}}_{t_{11},1} : (A_3\,\Big|^{\%q}_{0}).
\end{gathered} \tag{30}$$

Правила (31) – (33) определяют абстрактные алгоритмы, выполняющие прямой, обратный и маятниковый проходы массива (соответственно) при сортировке бинарными вставками.

$$\begin{gathered}
S_6\Big|^{\substack{M,i_1,i_2,i_3,i_4,z,v,\\u_1,u_2,\%q,\%n,\%g,\%f}}_{\substack{M,i_1,i_2,i_3,i_4,z,v,\\u_1,u_2,\%q,\%n,\%g,\%f}} \to \vec{T}_{12}\,\Big|^{\{:\}}_{z,u_1} : (T_{33}\,\Big|^{M,I_b,I_e,z,u_1,\%g}_{M,I_b,I_e,z,u_1,\%g} \cdot A_1\,\Big|^{\%g}_{\%g,1} \cdot \\
\cdot \tilde{A}_5\,\Big|^{t_2}_{\%g,I_e} \cdot \vec{A}_9\,\Big|^{\{:\}}_{t_2,1} : (A_3\,\Big|^{z.(u_1)}_{I_e} \cdot A_3\,\Big|^{I_b}_{I_e})) \cdot T_{14}\,\Big|^{\%q}_{I_b,I_e},
\end{gathered} \tag{31}$$

$$T_{33}\,\Big|^{M,I_b,I_e,z,u_1,\%g}_{M,I_b,I_e,z,u_1,\%g} \to A_3\,\Big|^{x}_{M.(\%g)} \cdot A_3\,\Big|^{l}_{I_b} \cdot A_2\,\Big|^{r}_{\%g,1} \cdot \overset{w}{A}\,\Big|^{\{R_w\}}_{\tilde{A}_6|^{y}_{l,r},\,T_{34}|^{M,l,r,m}_{M,l,r,x}} \cdot A_2\,\Big|^{j}_{\%g,1} \cdot \overset{f}{A}\,\Big|^{\{R_f\}}_{j,l,T_{35}|^{j,M}_{j,M}} \cdot A_3\,\Big|^{M.(l)}_{x},$$

$$T_{34}\,\Big|^{M,l,r,m}_{M,l,r,x} \to A_1\,\Big|^{t_1}_{l,r} \cdot A_4\,\Big|^{m}_{t_1,2} \cdot \tilde{A}_8\,\Big|^{t_2}_{x,M.(m)} \cdot \vec{A}_9\,\Big|^{\{:\}}_{t_2,1} : (A_2\,\Big|^{r}_{m,1}) \cdot \vec{A}_9\,\Big|^{\{:\}}_{t_2,0} : (A_1\,\Big|^{l}_{m,1}),$$

$$T_{35}\,\Big|^{j,M}_{j,M} \to A_1\,\Big|^{t_1}_{j,1} \cdot A_3\,\Big|^{M.(t_1)}_{M.(j)},$$

$$\begin{gathered}
S_6\Big|^{\substack{M,i_1,i_2,i_3,i_4,z,v,\\u_1,u_2,\%q,\%n,\%g,\%f}}_{\substack{M,i_1,i_2,i_3,i_4,z,v,\\u_1,u_2,\%q,\%n,\%g,\%f}} \to \vec{T}_{12}\,\Big|^{\{:\}}_{z,u_1} : (T_{36}\,\Big|^{M,I_b,I_e,z,u_1,\%f}_{M,I_b,I_e,z,u_1,\%f} \cdot A_2\,\Big|^{\%f}_{\%f,1} \cdot \tilde{A}_5\,\Big|^{t_2}_{\%f,I_b} \cdot \\
\cdot \vec{A}_9\,\Big|^{\{:\}}_{t_2,1} : (A_1\,\Big|^{t_3}_{u_1,1} \cdot A_3\,\Big|^{z.(t_3)}_{I_b} \cdot A_3\,\Big|^{I_b}_{I_e})) \cdot T_{14}\,\Big|^{\%q}_{I_b,I_e},
\end{gathered} \tag{32}$$

$$T_{36}\,\Big|^{M,I_b,I_e,z,u_1,\%f}_{M,I_b,I_e,z,u_1,\%f} \to A_3\,\Big|^{x}_{M.(\%f)} \cdot A_3\,\Big|^{r}_{I_e} \cdot A_2\,\Big|^{l}_{\%f,1} \cdot \overset{w}{A}\,\Big|^{\{R_w\}}_{\tilde{A}_6|^{y}_{l,r},\,T_{37}|^{l,r,M}_{l,r,M}} \cdot A_1\,\Big|^{j}_{\%f,1} \cdot \overset{f}{A}\,\Big|^{\{R_f\}}_{j,r,T_{38}|^{j,M}_{j,M}} \cdot A_3\,\Big|^{M.(r)}_{x},$$

$$T_{37}\,\Big|^{l,r,M}_{l,r,M} \to A_1\,\Big|^{t_1}_{l,r} \cdot A_4\,\Big|^{m}_{t_1,2} \cdot \tilde{A}_8\,\Big|^{t_2}_{x,M.(m)} \cdot \vec{A}_9\,\Big|^{\{:\}}_{t_2,1} : (A_2\,\Big|^{r}_{m,1}) \cdot \vec{A}_9\,\Big|^{\{:\}}_{t_7,0} : (A_1\,\Big|^{l}_{m,1}), \qquad T_{38}\,\Big|^{j,M}_{j,M} \to A_2\,\Big|^{t_1}_{j,1} \cdot A_3\,\Big|^{M.(t_1)}_{M.(j)},$$

$$\begin{gathered}
S_6\Big|^{\substack{M,i_1,i_2,i_3,i_4,z,v,\\u_1,u_2,\%q,\%n,\%g,\%f}}_{\substack{M,i_1,i_2,i_3,i_4,z,v,\\u_1,u_2,\%q,\%n,\%g,\%f}} \to T_{31}\,\Big|^{M,\%g,\%q}_{M,\%g} : (\tilde{A}_{10}\,\Big|^{t_5}_{\%n,1} \cdot \vec{A}_9\,\Big|^{\{:\}}_{t_5,1} : (T_{33}\,\Big|^{M,I_b,I_e,z,u_1,\%g}_{M,I_b,I_e,z,u_1,\%g} \cdot \tilde{A}_{12}\,\Big|^{t_6}_{\%g,\%f} \cdot \\
\cdot \vec{A}_9\,\Big|^{\{:\}}_{t_6,1} : (A_1\,\Big|^{\%g}_{\%g,1}) \cdot \vec{A}_9\,\Big|^{\{:\}}_{t6,0} : (T_{32}\,\Big|^{M,\%g,\%q}_{M,\%g})) \cdot \vec{A}_9\,\Big|^{\{:\}}_{t5,0} : (T_{36}\,\Big|^{M,I_b,I_e,z,u_1,\%f}_{M,I_b,I_e,z,u_1,\%f} \cdot \tilde{A}_{12}\,\Big|^{t_6}_{\%g,\%f} \cdot \vec{A}_9\,\Big|^{\{:\}}_{t_6,1} : \\
: (A_2\,\Big|^{\%f}_{\%f,1}) \cdot \vec{A}_9\,\Big|^{\{:\}}_{t_6,0} : (T_{32}\,\Big|^{M,\%g,\%q}_{M,\%g}))).
\end{gathered} \tag{33}$$

Разработанная КФГАС позволяет формировать структуры алгоритмов сортировки. Выполнив последовательно операции подстановки, начиная с начального нетерминала $S_1\,|^{M}_{M,a,b,h,t}$ – абстрактного алгоритма сортировки и заканчивая цепочкой, в которой отсутствуют абстрактные операторы, получим структуру некоторого конкретного алгоритма сортировки.

Например, выполнив подстановки согласно правилам

$$(11) \Rightarrow (12) \Rightarrow (13) \Rightarrow (15) \Rightarrow (21)^3 \Rightarrow (25) \Rightarrow (29),$$

будет построена структура (с соответствующими подструктурами) следующего алгоритма сортировки. Массив сортируется чередованием прямого прохода метода выбора и обратного прохода сортировки вставками

$$Str(A_{S_1}\big|_{M,a,b,h,t}^{M} \backslash C_{GA(AS)}) = B_3\big|_1^{i_1}\cdot B_4\big|_{"q",i_1}^{\%q}\cdot B_3\big|_1^{i_2}\cdot B_4\big|_{"n",i_2}^{\%n}\cdot B_3\big|_1^{i_3}\cdot B_4\big|_{"g",i_3}^{\%g}\cdot B_3\big|_1^{i_4}\cdot B_4\big|_{"f",i_4}^{\%f}\cdot$$

$$\cdot A_3\big|_a^{z.(1)}\cdot A_3\big|_b^{z.(2)}\cdot A_3\big|_1^{u_1}\cdot A_3\big|_{-2}^{u_2}\cdot A_3\big|_1^{\%q}\cdot \tilde{A}_5\big|_{u_1,0}^{t_{20}}\cdot \vec{A}_3\big|_{t_{20},1}^{\{:\}}:(A_3\big|_1^{\%n}\cdot A_1\big|_{z.(u_1),1}^{\%g}\cdot A_3\big|_{u_1,1}^{t_{22}}\cdot A_3\big|_{z.(t_{22}),1}^{\%f}\cdot$$

$$\cdot \overset{w}{A}\big|^{\{R_w\}}_{\tilde{A}_{10}|_{\%q,1}^{y},\,A_{S_2}|^{M}_{\substack{M,a,b,h,i_1,i_2,i_3,i_4,\%q,\\ \%n,\%g,\%f,z,v,u_1,u_2}}}),$$

$$Str(A_{S_2}\big|^{M}_{\substack{M,a,b,h,i_1,i_2,i_3,i_4,\%q,\\ \%n,\%g,\%f,z,v,u_1,u_2}} \backslash C_{GA(AS)}) = A_3\big|_{z.(u_1)}^{I_b}\cdot A_1\big|_{u_1,1}^{t_{24}}\cdot A_3\big|_{z.(t_{24})}^{I_e}\cdot \tilde{A}_8\big|_{I_b,I_e}^{t_{25}}\cdot \vec{A}_9\big|_{t_{25},1}^{\{:\}}:$$

$$:(A_3\big|_{M.(I_b)}^{t_{60}}\cdot A_3\big|_{I_b}^{t_{61}}\cdot A_1\big|_{I_b,1}^{j}\cdot \overset{f}{A}\big|^{\{R_f\}}_{j,I_e,A_{S_3}|^{M,j,t_{60},t_{61}}_{M,j,t_{60},t_{61}}}\cdot A_3\big|_{M.(I_b)}^{M.(t_{61})}\cdot A_3\big|_{t_{60}}^{M.(I_b)}\cdot A_1\big|_{I_b,1}^{I_b}\cdot A_3\big|_{I_b}^{z.(u_1)};)\cdot$$

$$\cdot \tilde{A}_7\big|_{I_b,I_e}^{t_{28}}\cdot \vec{A}_9\big|_{t_{28},1}^{\{:\}}:(A_3\big|_0^{\%q}\cdot A_2\big|_{0,\%n}^{\%n}\cdot A_3\big|_{z.(u_1)}^{I_b}\cdot A_1\big|_{u_1,1}^{t_{24}}\cdot A_3\big|_{z.(t_{24})}^{I_e}\cdot \tilde{A}_8\big|_{I_b,I_e}^{t_{25}}\cdot \vec{A}_9\big|_{t_{25},1}^{\{:\}}:$$

$$:(A_3\big|_{M.(\%f)}^{x}\cdot A_1\big|_{\%f,1}^{j}\cdot \overset{w}{A}\big|^{\{R_w\}}_{A_{S_4}|^{y}_{j,I_e,M,x},\,A_{S_5}|^{j,M}_{j,M}}\cdot A_2\big|_{j,1}^{t_{75}}\cdot A_3\big|_{x}^{M.(t_{75})}\cdot A_2\big|_{\%f,1}^{\%f}\cdot \tilde{A}_5\big|_{\%f,I_b}^{t_{73}}\cdot$$

$$\cdot \vec{A}_9\big|_{t_{73},1}^{\{:\}}:(A_1\big|_{u_1,1}^{t_{74}}\cdot A_3\big|_{I_b}^{z.(t_{74})}\cdot A_3\big|_{I_e}^{I_b}))\cdot \tilde{A}_7\big|_{I_b,I_e}^{t_{28}}\cdot \vec{A}_9\big|_{t_{28},1}^{\{:\}}:(A_3\big|_0^{\%q})\cdot A_2\big|_{0,\%n}^{\%n}\cdot \tilde{A}_{10}\big|_{\%q,0}^{t_{21}}\cdot$$

$$\cdot \vec{A}_9\big|_{t_{21},1}^{\{:\}}:(A_2\big|_{u_1,2}^{u_1}\cdot \overset{b}{A})\cdot A_2\big|_{0,\%n}^{\%n}$$

$$Str(A_{S_3}\big|^{M,j,t_{60},t_{61}}_{M,j,t_{60},t_{61}} \backslash C_{GA(AS)}) = \tilde{A}_8\big|_{M.(j),t_{60}}^{t_{62}}\cdot \vec{A}_9\big|_{t_{62},1}^{\{:\}}:(A_3\big|_{M.(j)}^{t_{60}}\cdot A_3\big|_{j}^{t_{61}}),$$

$$Str(A_{S_4}\big|^{y}_{j,I_e,M,x} \backslash C_{GA(AS)}) = \tilde{A}_6\big|_{j,I_e}^{t_{76}}\cdot \tilde{A}_8\big|_{M.(j),x}^{t_{77}}\cdot \tilde{A}_{11}\big|_{t_{76},t_{77}}^{y},$$

$$Str(A_{S_5}\big|^{j,M}_{j,M} \backslash C_{GA(AS)}) = A_2\big|_{j,1}^{t_{78}}\cdot A_3\big|_{M.(j)}^{M.(t_{78})}\cdot A_1\big|_{j,1}^{j}.$$

Таким образом, предлагаемый формальный аппарат грамматико-алгоритмических структур позволил формальными средствами определить бесконечное множество возможных алгоритмов сортировки.

6. Заключение

На основе грамматических и алгоритмических структур разработан формализм грамматико-алгоритмических структур. Такие формальные структуры используют возможности структурного представления алгоритмов в виде последовательности образующих алгоритмов, связанных операциями композиции и условного выполнения. Средства грамматических структур позволяют выделить из всего множества алгоритмов, которые можно построить в рамках алгоритмической структуры, подмножество алгоритмов, предназначенное для решения некоторой задачи.

В [1] предложена неформальная модель множества алгоритмов сортировки в виде метаалгоритма. В данной работе такая модель выполнена в виде КФГАС, что является предпосылкой формализации адаптивных и в том числе структурно адаптивных алгоритмов.

Отметим, что приведенное множество образующих алгоритмов можно представить в виде некоторого подмножества базовых алгоритмов таких языков программирования, как Паскаль и Си. Для представления возможностей моделирования КФГАС отметим, что метаалгоритм на языке Паскаль, соответствующий аксиомам (6) – (33), занимает более 700 строк кода.

Моделирование средствами формальных структур позволяет сопоставлять модели, выполнять разного рода композиции моделей. Это дает возможность выйти на постановку и решение ряда задач. Практический и научный интерес вызывают задачи полноты и оптимизации. Полнота в конкретном приложении рассматривается в таком смысле: все ли возможные алгоритмы решения некоторой задачи есть в множестве алгоритмов, моделируемом КФГАС? Оптимальность можно рассматривать как применительно к набору аксиом-правил вывода, так и к алгоритму из допустимого множества.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Шинкаренко В.И. Структурная адаптация алгоритмов на основе полиморфизма / В.И. Шинкаренко // Математические машины и системы. – 2009. – № 2. – С. 28 – 44.
2. Буч Г. Объектно-ориентированный анализ и проектирование с примерами приложений / Буч Г. – М.: Издательский дом "Вильямс", 2008. – 718 с.
3. Вирт Н. Алгоритмы + структуры данных = программа / Вирт Н. – М.: Мир, 1985. – 406 с.
4. Кнут Д.Э. Искусство программирования / Кнут Д.Э. – М.: Издательский дом "Вильямс", 2000. – Т. 3: Сортировка и поиск. – 832 с.
5. Цейтлин Г.Е. Введение в алгоритмику / Цейтлин Г.Е. – К.: Сфера, 1998. – 310 с.
6. Яценко О.А. Розробка інтегрованих алгебро-алгоритмічних моделей: елементи, теорії, інструменарій, застосування: автореф. дис. на здобуття наук. ступеня канд. фіз.-мат. наук: спец. 01.05.03 / О.А. Яценко. – К.: Київський національний ун-т ім. Тараса Шевченка, 2005. – 17 с.
7. Алгебро-алгоритмические модели и методы параллельного программирования / Ф.И. Андон, А.Е. Дорошенко, Г.Е. Цейтлин и др. – К.: Академпериодика, 2007. – 634 с.
8. Глушков В.М. Алгебра. Языки. Программирование / В.М. Глушков, Г.Е. Цейтлин, Е.Л. Ющенко. – К.: Наукова думка, 1989. – 376 с.
9. Ноден П. Алгебраическая алгоритмика / П. Ноден, К. Китте. – М.: Мир, 1999. – 720 с.
10. Ільман В.М. Структурний підхід до проблеми відтворення граматик / В.М. Ільман, В.І. Шинкаренко // Проблемы программирования. – 2007. – № 1. – С. 5 – 16.
11. Шинкаренко В.И. Структурные модели алгоритмов в задачах прикладного программирования. Ч. I: Формальные алгоритмические структуры / В.И. Шинкаренко, В.М. Ильман, В.В. Скалозуб // Кибернетика и системный анализ. – 2009. – № 3. – С. 3 – 14.
12. Хантер Р. Проектирование и конструирование компиляторов / Хантер Р. – М.: Финансы и статистика, 1984. – 232 с.

Стаття надійшла до редакції 30.06.2009