

Вибродиагностические параметры усталостного повреждения прямоугольных пластин. Сообщение 2. Прямолинейные трещины постоянной глубины

В. В. Матвеев, О. Е. Богинич

Институт проблем прочности им. Г. С. Писаренко НАН Украины, Киев, Украина

Рассматриваются результаты аналитического определения вибродиагностических параметров усталостного повреждения прямоугольной пластины типа прямолинейных трещин нормального отрыва постоянной глубины при различных условиях закрепления и формах колебаний однородной пластины постоянной толщины. Показано, что в диапазоне изменения относительной глубины трещины до 0,3 параметр искажения моногармоничности колебаний при супергармоническом резонансе второго порядка превышает величину относительного изменения собственной частоты колебаний пластины на 1-2 порядка.

Ключевые слова: прямоугольная пластина, усталостное повреждение, трещина нормального отрыва, закрывающаяся трещина, вибродиагностические параметры повреждения, собственная частота колебаний, основной и супергармонический резонансы.

Введение. Полученные ранее [1] зависимости (15), (16), (19), (21)–(23) для приближенного определения вибродиагностических параметров повреждения пластины типа усталостных трещин нормального отрыва, расположенных параллельно одной из сторон пластины, выражаются через относительную энергетическую характеристику повреждения:

$$\kappa = \frac{\Delta\Pi_{\tau}}{\Pi_0},$$

где Π_0 – потенциальная энергия деформации неповрежденной пластины при заданном нагружении; $\Delta\Pi_{\tau}$ – изменение потенциальной энергии деформации пластины при идентичном ее нагружении, обусловленное наличием трещины и определяемое через коэффициент интенсивности напряжений K_1 .

Выражение для определения указанной характеристики (12) [1] можно представить в виде

$$\kappa = \frac{t^3}{6D^2} \frac{\Phi_{\tau}}{\Phi_0}, \quad (1)$$

где

$$\Phi_{\tau} = \iint_{(S)} [K_1(\sigma_{\tau})]^2 \delta\bar{\rho} \cos\theta d\Gamma; \quad (2)$$

$$\Phi_0 = \int_0^L \int_0^B \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + 2\nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2(1-\nu) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] dx dy; \quad (3)$$

D – цилиндрическая жесткость неповрежденной пластины, $D = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}$;

t – толщина пластины; $K_1(\sigma_T)$ – коэффициент интенсивности нормальных напряжений; σ_T – номинальное максимальное нормальное напряжение изгиба в сечении расположения трещины ($x = x_T$); $\delta\vec{\rho}$ – вектор возможного смещения точек фронта (контур Γ) трещины; θ – угол между $\delta\vec{\rho}$ и нормалью к фронту трещины; w – собственная форма колебаний пластины, $w = w(x, y)$.

Ниже представлены результаты определения с использованием зависимостей (1)–(3) относительной энергетической характеристики κ и основных вибродиагностических параметров наличия в прямоугольной пластине (рис. 1) прямолинейных поверхностных трещин постоянной глубины, расположенных параллельно одной из сторон пластины, при различных условиях ее закрепления и формах колебаний, а также при разных количестве трещин и их расположении. Результаты исследования прямоугольных пластин с поверхностными полуэллиптическими и сквозными трещинами будут представлены в сообщении 3.

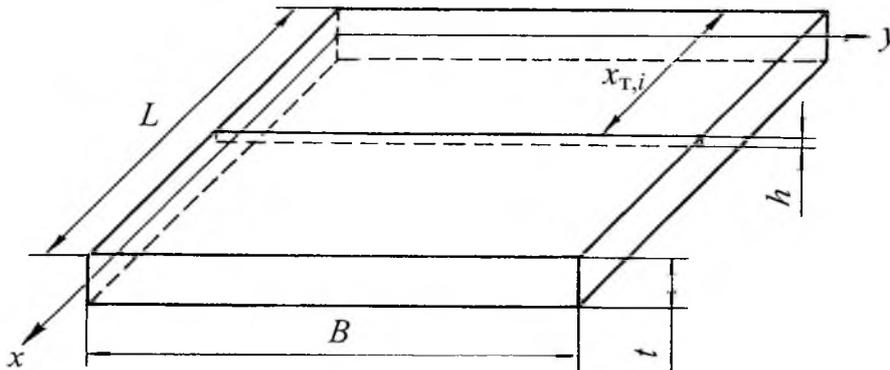


Рис. 1. Схема однородной прямоугольной пластины постоянной толщины t с прямолинейной плоской поверхностной трещиной постоянной глубины h .

1. Определение относительной энергетической характеристики повреждения пластины. Для рассматриваемых прямолинейных трещин постоянной глубины h , расположенных в сечениях с координатами $x_{T,i}$ ($i=1, 2, \dots, N$) вдоль всей ширины B пластины, что, например, может иметь место при наличии относительно хрупкого покрытия постоянной толщины, $\rho = h$, $\theta = 0$, $d\Gamma = dy$, и выражение для функции (2) при наличии N значимо невзаимодействующих трещин приводится к виду

$$\Phi_T = \sum_{i=1}^N \int_0^B \int_0^h K_1^2(\sigma_{T,i}, h) dh dy. \quad (4)$$

Рассмотрим случаи наличия трещин одинаковой глубины на одной и на обеих поверхностях пластины.

1.1. **Прямолинейные трещины на одной поверхности пластины.** Допуская в приближении возможность использования для коэффициента интенсивности напряжений K_1 , например, формулу, полученную для полосы конечной длины с поперечной краевой трещиной при чистом изгибе [2],

$$K_1 = \sigma_{\tau} \sqrt{\pi h} F_{1,1}(\gamma),$$

где

$$F_{1,1}(\gamma) = 1,122 - 1,40\gamma + 7,33\gamma^2 - 13,08\gamma^3 + 14,0\gamma^4;$$

$$\gamma = \frac{h}{t} < 0,6; \quad \sigma_{\tau} = \frac{6M_{x=x_{\tau}}}{t^2},$$

в соответствии с (4) найдем

$$\Phi_{\tau} = \pi \int_0^h h F_{1,1}^2(\gamma) dh \sum_{i=1}^N \int_{(B)} \sigma_{\tau,i}^2(y) dy = \pi t^2 H_{1,1}(\gamma) \sum_{i=1}^N \int_{(B)} \sigma_{\tau,i}^2(y) dy. \quad (5)$$

Здесь

$$H_{1,1}(\gamma) = \int_0^{\gamma} \gamma F_{1,1}^2(\gamma) d\gamma = 0,6295\gamma^2 - 1,0472\gamma^3 + 4,602\gamma^4 - 9,9752\gamma^5 + 20,2948\gamma^6 - 32,9933\gamma^7 + 47,0408\gamma^8 - 40,6933\gamma^9 + 19,6\gamma^{10}; \quad (6)$$

$\sigma_{\tau,i}$ – номинальные максимальные напряжения изгиба,

$$\sigma_{\tau,i}(y) = 6 \frac{D}{t^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)_{x=x_{\tau,i}}. \quad (7)$$

При этом для закрывающейся трещины $\int_{(B)} \sigma_{\tau,i}^2(y) dy$ вычисляется в интервале значений координаты y , определяющей при $x = x_{\tau,i}$ величину $\sigma_{\tau,i} > 0$. С целью упрощения обнаружения основных закономерностей возможного влияния появления трещин на вибрационные характеристики пластины ограничимся далее рассмотрением наиболее просто описываемых форм колебаний.

1.1.1. *Пластина, шарнирно опертая по всем краям.* Как известно, формы колебаний такой пластины описываются функцией

$$w(x, y) = A_{mn} \sin \frac{m\pi}{L} x \sin \frac{n\pi}{B} y, \quad m = 1, 2, 3, \dots; \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad (8)$$

которая определяет следующее выражение для максимальных напряжений изгиба (7) в сечениях расположения трещин ($x = x_{\tau,i}$) при заданных значениях m и n :

$$\sigma_{\tau,i}(y) = \sigma_{\max} \sin \frac{m\pi}{L} x_{\tau,i} \sin \frac{n\pi}{B} y, \quad (9)$$

где

$$\sigma_{\max} = 6\pi^2 \left[\left(\frac{m}{L} \right)^2 + \nu \left(\frac{n}{B} \right)^2 \right] \frac{D}{t^2} A_{mn}. \quad (10)$$

Подставляя (9) в (5), для случая наличия N трещин получаем

$$\Phi_{\tau} = \pi \sigma_{\max}^2 t^2 H_{1.1}(\gamma) \sum_{i=1}^N \sin^2 \frac{m\pi}{L} x_{\tau,i} \int_{(B)} \sin^2 \frac{n\pi}{B} y dy. \quad (11)$$

Выше отмечалось, что для закрывающейся трещины $\int_{(B)} \sin^2 \frac{n\pi}{B} y dy$ вычисляется в интервале значений координаты y , определяющей значение напряжения растяжения $\sigma_{\tau,i}(y)$, т.е. в данном случае должно выполняться условие

$$\sin \frac{m\pi}{L} x_{\tau,i} \sin \frac{n\pi}{B} y > 0.$$

Используя формулы (3), (8) и выражая в соответствии с равенством (10) A_{mn} через σ_{\max} , найдем

$$\Phi_0 = \frac{BLt^4}{144D^2} \lambda_{m,n}^2 \sigma_{\max}^2, \quad (12)$$

где

$$\lambda_{m,n} = \frac{\left(\frac{m}{L} \right)^2 + \left(\frac{n}{B} \right)^2}{\left(\frac{m}{L} \right)^2 + \nu \left(\frac{n}{B} \right)^2}.$$

Тогда выражение (1) для параметра κ примет вид

$$\kappa_{1.1.N} = 24 \frac{\pi t H_{1.1}(\gamma)}{BL \lambda_{m,n}^2} \sum_{i=1}^N \sin^2 \frac{m\pi}{L} x_{\tau,i} \int_{(B)} \sin^2 \frac{n\pi}{B} y dy. \quad (13)$$

При определении параметра κ для закрывающихся трещин по формуле (13) следует учитывать отмеченную ранее особенность вычисления интеграла $\int_{(B)} \sin^2 \frac{n\pi}{B} y dy$. При наличии трещин разной глубины h_i в указанной

формуле под знак суммирования необходимо ввести функцию $H_{1,1}(\gamma_i)$, где $\gamma_i = h_i/t$. Кроме того, при наличии нескольких трещин в зависимости от места их расположения, обусловливаемого значением координат $x_{\tau,i}$, и рассматриваемой формы колебаний, которая характеризуется величинами m и n , параметр κ может иметь как одинаковое, так и разное значение на полуциклах разного (\pm) знака.

Для определенности вычисления интеграла $\int_{(B)} \sin^2 \frac{n\pi}{B} y dy$ рассмотрим

формы колебаний при $n = 1$ и наиболее вероятном расположении трещин в сечениях с наибольшим значением максимальных напряжений изгиба, т.е. при

$$x_{\tau,i} = \frac{1 + 2(i-1)}{2m} L, \quad i = 1, 2, 3, \dots, \quad N = m. \quad (14)$$

В этом случае $\sin \frac{m\pi}{L} x_{\tau,i} = 1$, $\int_{(B)} \sin^2 \frac{n\pi}{B} y dy = \frac{B}{2}$, и с учетом того, что

ослабленными сечениями являются те, где $\sin \frac{m\pi}{L} x_{\tau,i} \sin \frac{\pi}{B} y > 0$, выражение для параметра κ при колебаниях по m -й форме для четных значений m примет вид

$$\kappa_{1,1,m} = 6\pi m \frac{t}{L} \frac{H_{1,1}(\gamma)}{\lambda_{m,1}^2}, \quad (15)$$

для нечетных значений m –

$$\kappa_{1,1,m(\pm)} = 6\pi(m \pm 1) \frac{t}{L} \frac{H_{1,1}(\gamma)}{\lambda_{m,1}^2}, \quad (16)$$

где

$$\lambda_{m,1} = \frac{m^2 \left(\frac{B}{L}\right)^2 + 1}{m^2 \left(\frac{B}{L}\right)^2 + \nu}. \quad (17)$$

Как видно, в случае четных значений m параметр κ при наличии трещин во всех сечениях с наибольшим значением изгибающего момента M_x , т.е. $N = m$, не зависит от знака полуцикла $\kappa_{(+)} = \kappa_{(-)}$, в то время как в случае нечетных значений m на полуциклах разных знаков он будет отличаться.

При наличии закрывающейся трещины в одном из сечений с наибольшим значением напряжения изгиба получаем единую формулу (15), где следует принять $m=1$ независимо от формы колебаний пластины, которая будет учитываться только коэффициентом $\lambda_{m,1}$ при соответствующем значении m .

$$\kappa_{1.1.m} = 6\pi(1 \pm 1) \frac{t}{L} \frac{H_{1.1}(\gamma)}{\lambda_{m,1}^2}. \quad (18)$$

При N открытых, т.е. незакрывающихся, трещинах одинаковой глубины, расположенных в каких-либо сечениях $x_{T,i}$ (см. (14)), выражения (15), (16) приводятся к виду

$$\kappa_{1.1.N}^{\text{отк}} = 12\pi N \frac{t}{L} \frac{H_{1.1}(\gamma)}{\lambda_{m,1}^2}. \quad (19)$$

Параметр κ не зависит от знака полуцикла колебаний как для симметричных, так и несимметричных форм колебаний, т.е. $\kappa_{1.1.N(+)} = \kappa_{1.1.N(-)}$. При наличии трещин во всех указанных сечениях в формуле (19) следует принять $N = m$.

Заметим, что при расположении трещин в сечениях с наибольшим значением максимальных напряжений изгиба $\sigma_{T,i}(y)$ использование зависимости (4) более правомочно, поскольку в этих сечениях действуют только изгибающие моменты, значение крутящих моментов равно нулю.

1.1.2. *Пластина, по двум краям ($x = 0$; $x = L$) шарнирно опертая и по двум свободная.* При наиболее простых балочных формах колебаний пластины

$$w(x, y) = A_m \sin \frac{m\pi}{L} x, \quad m = 1, 2, 3, \dots, \quad (20)$$

для которых приемлемо использование зависимости (4), максимальные напряжения изгиба в сечениях расположения трещин равны

$$\sigma_{T,i} = \sigma_{\max} \sin \frac{m\pi}{L} x_{T,i}, \quad (21)$$

где σ_{\max} определяется выражением (10) при $n = 0$.

Подставляя выражение (21) в формулу (5), найдем

$$\Phi_T = \pi \sigma_{\max}^2 B t^2 H_{1.1}(\gamma) \sum_{i=1}^N \sin^2 \frac{m\pi}{L} x_{T,i}. \quad (22)$$

Здесь для закрывающихся трещин под знаком суммирования учитываются сечения $x_{T,i}$, определяющие $\sigma_{T,i} > 0$.

Используя формулу (20) и выражая A_m через σ_{\max} , в соответствии с (3) записываем

$$\Phi_0 = \frac{BLt^4}{72D^2} \sigma_{\max}^2. \quad (23)$$

Тогда согласно обозначениям (1) получим следующее выражение для параметра κ :

$$\kappa_{1,2.N} = 12\pi \frac{t}{L} H_{1,1}(\gamma) \sum_{i=1}^N \sin^2 \frac{m\pi}{L} x_{\tau,i}, \quad (24)$$

где $H_{1,1}(\gamma)$ определяется выражением (6).

Для наиболее вероятного расположения трещин в сечениях с наибольшим значением максимальных напряжений изгиба ($x_{\tau,i} = \frac{1+2(i-1)}{2m}L$, $i=1, 2, 3, \dots, N=m$) при колебаниях пластины по m -й форме для четных значений m будем иметь

$$\kappa_{1,2.m} = 6\pi m \frac{t}{L} H_{1,1}(\gamma), \quad (25)$$

для нечетных значений –

$$\kappa_{1,2(\pm).m} = 6\pi(m \pm 1) \frac{t}{L} H_{1,1}(\gamma). \quad (26)$$

При наличии трещины в каком-либо одном сечении с наибольшим значением напряжений изгиба получаем единую формулу (26), где принимаем $m=1$ независимо от формы колебаний пластины.

В случае N незакрывающихся трещин, расположенных в каких-либо N сечениях (14), также получаем единую формулу, не зависящую от знака полуцикла колебаний:

$$\kappa_{1,2.N}^{\text{отк}} = 12\pi N \frac{t}{L} \frac{H_{1,1}(\gamma)}{\lambda_{m,1}^2}. \quad (27)$$

1.1.3. *Пластина, жестко закрепленная по краям $x=0$ и $x=L$ и свободная по остальным.* При наиболее простых формах колебаний, описываемых балочной функцией

$$w(x,y) = A_{kj}[(\sin k_j x - \text{sh } k_j x) - B_j(\cos k_j x - \text{ch } k_j x)], \quad (28)$$

максимальные напряжения изгиба в сечениях расположения трещин $x_{\tau,i} \equiv x_i$ определяются выражением

$$\sigma_{\tau,i} = \frac{6M_{xi}}{t^2} = \frac{6(k_j L)^2}{t^2 L^2} [(\sin k_j x_i + \text{sh } k_j x_i) - B_j(\cos k_j x_i + \text{ch } k_j x_i)] A_{kj},$$

где $k_1 L = 4,73$; $k_2 L = 7,853$; $k_j = \frac{\pi}{2}(2j+1)$, $j=3, 4, \dots$; $B_1 = 1,0178$; $B_2 = 0,999223$; $B_3 = 1,0000335$; $B_4 = 0,9999986$; $B_5 = 1,0000001 \dots$

Представим $\sigma_{\tau,i}$ через максимальное напряжение изгиба (σ_{\max}), соответствующее сечению с некоторой координатой x_{mj} ($0 < x_{mj} < L$):

$$\sigma_{\tau,i} = \sigma_{\max} \frac{(\sin k_j x_i + \operatorname{sh} k_j x_i) - B_j(\cos k_j x_i + \operatorname{ch} k_j x_i)}{(\sin k_j x_{mj} + \operatorname{sh} k_j x_{mj}) - B_j(\cos k_j x_{mj} + \operatorname{ch} k_j x_{mj})}, \quad (29)$$

где

$$\sigma_{\max} = \frac{6(k_j L)^2}{t^2 L^2} [(\sin k_j x_{mj} + \operatorname{sh} k_j x_{mj}) - B_j(\cos k_j x_{mj} + \operatorname{ch} k_j x_{mj})] A_{kj}. \quad (30)$$

Координата x_{mj} соответствует одной из координат, вычисляемых из уравнения

$$(\cos k_j x_j + \operatorname{ch} k_j x_j) + B_j(\sin k_j x_j - \operatorname{sh} k_j x_j) = 0.$$

Используя выражения (5), (29) и учитывая, что $\int_{(B)} \sigma_{\tau,i}^2(y) dy = \sigma_{\tau,i}^2 B$,

при наличии N трещин найдем

$$\Phi_{\tau} = \pi B t^2 H_{1,1}(\gamma) \sigma_{\max}^2 \frac{\sum_{i=1}^N [(\sin k_j x_i + \operatorname{sh} k_j x_i) - B_j(\cos k_j x_i + \operatorname{ch} k_j x_i)]^2}{[(\sin k_j x_{mj} + \operatorname{sh} k_j x_{mj}) - B_j(\cos k_j x_{mj} + \operatorname{ch} k_j x_{mj})]^2}. \quad (31)$$

Выражая A_{kj} через σ_{\max} и учитывая (3) и (28), получаем

$$\Phi_0 \approx \frac{B t^4 L \sigma_{\max}^2}{36 D^2 [(\sin k_j x_{mj} + \operatorname{sh} k_j x_{mj}) - B_j(\cos k_j x_{mj} + \operatorname{ch} k_j x_{mj})]^2}. \quad (32)$$

Тогда в соответствии с (1) определяем выражение для κ :

$$\kappa_{1.3.N} = 6\pi \frac{t}{L} H_{1,1}(\gamma) \sum_{i=1}^N [(\sin k_j x_i + \operatorname{sh} k_j x_i) - B_j(\cos k_j x_i + \operatorname{ch} k_j x_i)]^2. \quad (33)$$

Для случая закрывающихся трещин под знаком суммирования учитываются только сечения x_i , определяющие растягивающие максимальные напряжения изгиба.

Заметим, что значения функции (6) для рассматриваемого случая жесткого закрепления краев пластины, обуславливающего статическую неопределимость системы и требующего решения задачи механики разрушения в перемещениях, как следует из анализа данных работы [3], можно использовать с допустимой для инженерной практики погрешностью при условии наличия неглубокой ($\gamma < 0,3$) трещины, которая расположена вдали от заземленных краев достаточно гибкой пластины ($t/L < 0,1$). Поэтому, используя функцию (6) при данных условиях закрепления пластины, ограничимся

рассмотрением низшей формы колебаний ($j = 1$; $k_1 L = 4,73$; $B_1 = 1,0178$) при наличии одной закрывающейся трещины ($N = 1$), расположенной в сечении действия наибольшего изгибающего момента M_x ($x_i = L/2$). Учитывая, что в данном случае

$$\left(\sin k_1 \frac{L}{2} + \operatorname{sh} k_1 \frac{L}{2} \right) - B_1 \left(\cos k_1 \frac{L}{2} + \operatorname{ch} k_1 \frac{L}{2} \right) = 1,6164,$$

имеем

$$\kappa_{1.3.1(\pm)} = 7,84(1 \pm 1)\pi \frac{t}{L} H_{1.1}(\gamma). \quad (34)$$

Для оценки влияния условий закрепления пластины на параметр κ сравним выражение (34) с (16) и (26) для полуцикла знака (+) при $m = 1$, т.е. для случая низшей формы колебаний и наличия одной трещины.

Как видно, $\kappa_{1.1.1} > \kappa_{1.2.1}$ и $\kappa_{1.3.1} > \kappa_{1.2.1}$. Значение $\kappa_{1.1.1}$ зависит также от соотношения размеров пластины (B/L) и коэффициента Пуассона ν . При $\nu = 0,3$ для отношений $(B/L) \leq 2$ имеем $\kappa_{1.1.1} > \kappa_{1.3.1}$, т.е. в этом случае $\kappa_{1.1.1} > \kappa_{1.3.1} > \kappa_{1.2.1}$.

1.2. Прямолинейные симметричные трещины. Рассмотрим N пар трещин постоянной глубины h , расположенных в сечениях $x = x_{T,i}$ ($i = 1, 2, \dots, N$) вдоль всей ширины B пластины, что может иметь место, например, при наличии относительно хрупкого покрытия одинаковой толщины на обеих ее поверхностях.

В этом случае для функции (2) при условии отсутствия значимого взаимовлияния между парами трещин пригодно выражение (4). Для коэффициента интенсивности напряжений с определенным допущением используем, например, формулу, полученную для полосы с двумя симметричными краевыми трещинами при чистом изгибе [2]:

$$K_1 = \sigma_T \sqrt{\pi h} F_{1.2}(\gamma),$$

где

$$F_{1.2}(\gamma) = \frac{1}{(1-\gamma)^{3/2}} \left\{ \frac{4}{3\pi} \left[1 + \frac{1}{2}(1-\gamma) + \frac{3}{8}(1-\gamma)^2 + \frac{5}{16}(1-\gamma)^3 \right] - \right. \\ \left. - 0,47(1-\gamma)^4 + 0,663(1-\gamma)^5 \right\}; \quad \gamma = \frac{2h}{t}; \quad \sigma_T = \frac{6M_{x=x_T}}{t^2}.$$

Тогда в случае наличия N закрывающихся трещин для функции (2) получим выражения, идентичные формулам (5), (11), (22), (31), для характеристики $\kappa_{2,N}$ – выражения, идентичные характеристике $\kappa_{1,N}$ (13), (24), (33), при следующем значении функции $H_1(\gamma)$:

$$H_{1.2}(\gamma) = \frac{1}{4} \int_0^\gamma \gamma F_{1.2}^2(\gamma) d\gamma = -0,04612 + 0,02252(1-\gamma)^{-2} + 0,06218(1-\gamma)^2 -$$

$$-0,06024(1-\gamma)^3 + 0,01601(1-\gamma)^4 + 0,00315(1-\gamma)^5 - 0,01293(1-\gamma)^6 + \\ + 0,03643(1-\gamma)^7 - 0,03321(1-\gamma)^8 + 0,01221(1-\gamma)^9.$$

При одинаковой величине γ имеем $H_{1,2}(\gamma) > H_{1,1}(\gamma)$.

Учитывая, что трещины расположены на обеих поверхностях пластины, накладываемое ранее условие $\sigma_{T,i}(y) > 0$ утрачивает смысл, поскольку одна из симметричных трещин при любом полупероде колебаний пластины будет раскрываться, т.е. суммирование производится по всем N сечениям независимо от знака $\sigma_{T,i}$.

При расположении закрывающихся симметричных трещин одинаковой глубины при данной m -й форме колебаний пластины во всех сечениях, определяемых координатами (14), характеристику $\kappa_{2,m}$ для разных условий закрепления пластины можно выразить через соответствующие выражения характеристики $\kappa_{1,m}$ (15), (16), (25), (26), (34) для четных значений m в виде

$$\kappa_{2,m} = 2\kappa_{1,m} \frac{H_{2,1}(\gamma)}{H_{1,1}(\gamma)}, \quad (35)$$

для нечетных значений –

$$\kappa_{2,m} = \frac{2m}{m \pm 1} \kappa_{1,m(\pm)} \frac{H_{2,1}(\gamma)}{H_{1,1}(\gamma)}. \quad (36)$$

Для незакрывающихся симметричных трещин, расположенных при данной форме колебаний в каких-либо N сечениях (14), найдем

$$\kappa_{2,N} = 2\kappa_{1,N} \frac{H_{2,1}(\gamma)}{H_{1,1}(\gamma)}, \quad (37)$$

где $\kappa_{1,N}$ определяются выражениями (19), (27) и (34) на полупероде знака (+).

Заметим, что при наличии как открытых, так и закрывающихся симметричных трещин величина κ одинакова для полуперодов разного знака, и колебания упругой пластины, как и в случае открытых односторонних трещин, описываются линейным уравнением.

1.3. Оценка влияния относительных размеров трещины на характеристику повреждения пластины. В качестве иллюстрации возможной зависимости характеристики κ от относительных размеров закрывающихся трещин и пластины на рис. 2, а, б приведены данные расчетов по формулам (15), (16) и (25), (26) соответственно с использованием значений функции (6). Результаты представлены в виде зависимости обобщенного параметра $\kappa L/t$ от относительной глубины $\gamma = h/t$ одинаковых трещин, расположенных для данной формы колебаний в сечениях с наибольшим значением максимальных напряжений изгиба, для разных форм колебаний пластин, характеризуемых числом m .

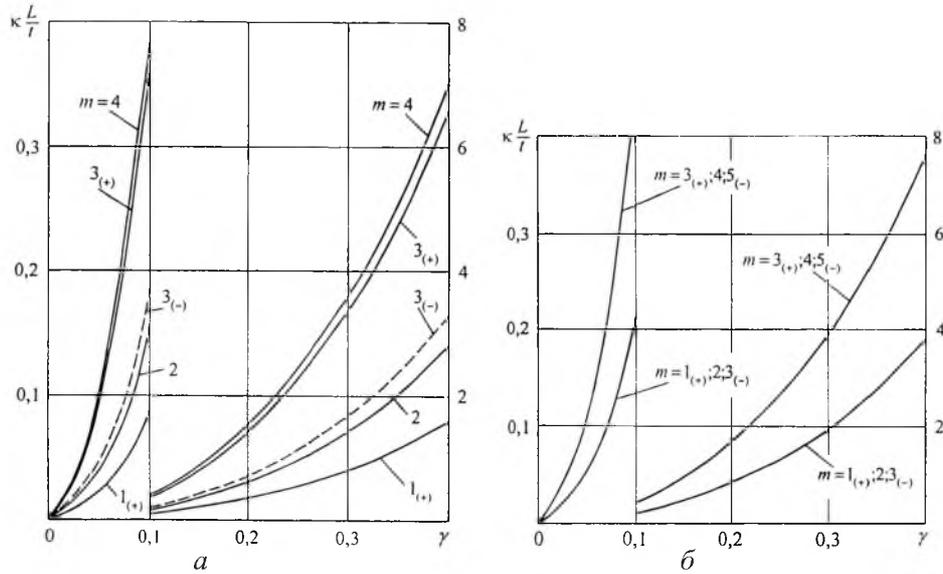


Рис. 2. Зависимость обобщенного параметра повреждения $\kappa L/t$ от относительной глубины $\gamma = h/t$ одинаковых трещин, расположенных в сечениях с наибольшим значением максимальных напряжений изгиба: *a* – шарнирно опертая по всем краям квадратная пластина при $m = 1, \dots, 4$; *б* – шарнирно опертая по двум краям квадратная пластина при $m = 1, \dots, 5$.

Использование обобщенного параметра $\kappa L/t$ позволяет по найденной его величине для заданного значения γ определять характеристику κ при разных отношениях длины L к толщине t пластины.

Для пластины, шарнирно опертой по всем краям, данные на рис. 2,а получены при $B/L = 1$. При другом значении отношения размеров пластины параметр $\kappa L/t$ можно определить умножением приведенных на рис. 2 данных на коэффициент

$$\bar{\lambda}_{m,1}\left(\frac{B}{L}\right) = \frac{\lambda_{m,1}^2\left(\frac{B}{L} = 1\right)}{\lambda_{m,1}^2\left(\frac{B}{L}\right)}, \quad (38)$$

где $\lambda_{m,1}$ находится по формуле (17).

Зависимость $\bar{\lambda}_{m,1}$ от отношения B/L для разных значений m показана на рис. 3.

При наличии закрывающейся трещины только в одном сечении с наибольшим максимальным напряжением изгиба при m -й форме колебаний пластины приведенные значения параметра $\kappa L/t$ уменьшаются в $m/2$ раза для четных m и в $(m \pm 1)/2$ раза для нечетных.

Для пластины, шарнирно опертой только по двум краям (рис. 2,б), параметр $\kappa L/t$, как видно из формулы (24), не зависит от отношения B/L . Следует также заметить, что при наличии трещины только в одном из сечений с наибольшим максимальным напряжением изгиба параметр $\kappa L/t$ не зависит от формы колебаний и его значение равно таковому при первой форме колебаний (на рис. 2,б $m = 1$).

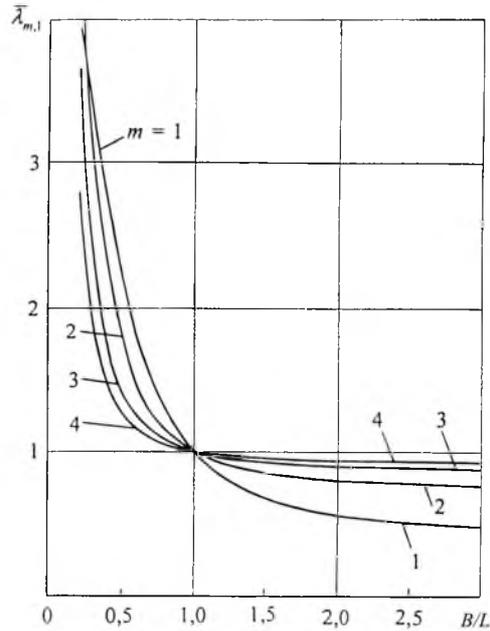


Рис. 3. Зависимость коэффициента $\bar{\lambda}_{m,1}$ от отношения размеров пластины B/L для разных значений параметра m .

2. Определение вибродиагностических параметров повреждения пластины. В качестве вибродиагностических параметров повреждения пластины в [1] рассматривались относительное изменение собственной частоты колебаний при открытой (β_T) и периодически закрывающейся ($\beta_{T,3}$) трещине, а также такие параметры искажения моногармоничности колебательного процесса при наличии закрывающейся трещины, как относительная величина постоянной составляющей A_0/A_1 и амплитуды второй гармоники A_2/A_1 при основном резонансе ($\nu = \omega_0$) и слабом ($A_2 < A_1$) супергармоническом резонансе 2-го порядка ($\nu = 0,5\omega_0$). Указанные параметры выражаются через рассмотренную ранее характеристику κ :

$$\beta_T = \frac{\sqrt{1+\kappa}-1}{\sqrt{1+\kappa}}; \quad \beta_{T,3} = \frac{\sqrt{1+\kappa}-1}{\sqrt{1+\kappa}+1}; \quad (39)$$

$$\frac{A_0}{A_1} \approx \frac{\kappa}{\pi(1+\kappa)}; \quad \frac{A_2}{A_1} \approx \frac{2\kappa}{9\pi(1+\kappa)} \quad \text{при } \nu = \omega_0; \quad (40)$$

$$\frac{A_2}{A_1} \approx \frac{\pi\kappa(1+\sqrt{1+\kappa})[(8-\pi)(1+\kappa)-\pi]}{16(1+\kappa)^2\delta} \quad \text{при } \nu = 0,5\omega_0, \quad (41)$$

где δ – логарифмический декремент колебаний пластины.

При этом для случая наличия нескольких закрывающихся трещин, когда в зависимости от места их расположения и формы колебаний пластины не

все трещины закрываются или открываются на полциклах разного знака (\pm) и нелинейность колебательной системы определяется различием параметра κ на этих полциклах ($\kappa_{(+)}$; $\kappa_{(-)}$), в формулах (40), (41) указанный параметр принимаем равным

$$\kappa = \left| \frac{\kappa_{(+)} - \kappa_{(-)}}{1 + \kappa_{(-)}} \right|. \quad (42)$$

Заметим также, что использование выражения (41) с достаточной для инженерной практики точностью ограничивалось условием $\kappa < \frac{2,25\delta}{\pi - 2,25\delta}$.

Анализ приведенных зависимостей показал, что возможные значения параметров (39) и (40) примерно одного порядка, при этом $\beta_T > \beta_{T,3} \approx \frac{A_0}{A_1} > \frac{A_2}{A_1}$, и на порядок и более ниже значений параметра (41), определяемого при супергармоническом резонансе. Поэтому в дальнейшем ограничимся рассмотрением только выражений (39) и (41).

С помощью этих формул и полученной ранее зависимости характеристики κ от относительной глубины γ трещины для пластины, шарнирно опертой по всем краям (15), (16) и шарнирно опертой только по двум краям (18), (25), (26), можно оценить возможное относительное изменение собственных частот β_T , $\beta_{T,3}$ и относительной амплитуды второй гармоники A_2/A_1 при супергармоническом резонансе 2-го порядка от относительной глубины трещины γ для рассмотренных случаев расположения трещин, условий закрепления и форм колебаний пластины.

В качестве примера на рис. 4 показаны расчетные зависимости изменения собственных частот колебаний β_T и $\beta_{T,3}$ квадратной пластины при разных условиях закрепления и формах колебаний от относительной глубины γ одинаковых соответственно открытых и закрывающихся односторонних поверхностных трещин, расположенных для m -й формы колебаний в сечениях с наибольшим значением максимальных напряжений изгиба σ_{\max}

($x_{T,i} = \frac{1+2(i-1)}{2m}$, $i = 1, 2, \dots, N = m$). Для шарнирно опертой по двум краям пластины при наличии трещины только в одном из сечений с σ_{\max} зависимости β_T и $\beta_{T,3}$ от γ не зависимо от формы колебаний соответствуют приведенным для случая $m = 1$.

Как видно, при наличии только одной трещины практическое диагностирование наличия повреждения, предусматривающее возможность надежной регистрации изменения собственных частот элементов конструкций при $\beta > 5\%$, для рассмотренных относительных размеров пластины может быть осуществлено только при относительной глубине данного вида трещины $\gamma > 0,3$. Кроме того, как отмечалось ранее [1], использование собственной частоты в качестве вибродиагностического параметра повреждения требует трудоемкой процедуры паспортизации исходных значений частот диагностируемого объекта в воспроизводимых условиях его закрепления.

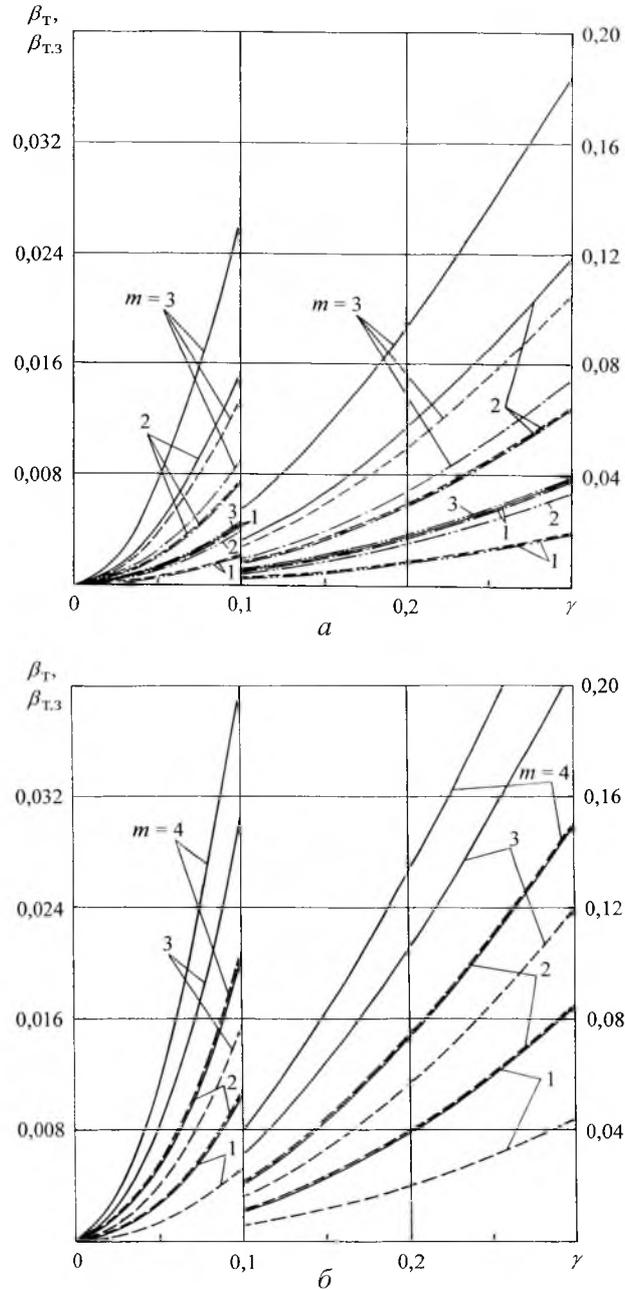


Рис. 4. Зависимости относительного изменения собственных частот колебаний β_T (сплошные линии) и $\beta_{T,3}$ (штриховые линии) квадратной пластины при $t/L = 0,1$ от относительной глубины $\gamma = h/t$ одинаковых трещин, расположенных в сечениях с наибольшим значением максимальных напряжений изгиба, при разных формах колебаний ($m = 1, \dots, 4$): а – шарнирно опертая по контуру (штрихпунктирные линии – значения β_T , штрихпунктирные с двумя точками – $\beta_{T,3}$ для случая наличия одной трещины); б – шарнирно опертая по двум краям.

При этом собственная частота колебаний пластины является наименее чувствительной к наличию закрывающихся трещин. Однако закрывающаяся трещина обуславливает нелинейность колебательной системы, и в этом

случае весьма высокую чувствительность к повреждению проявляет характерный параметр нарушения моногармоничности колебательного процесса при супергармоническом резонансе, определяемый формулой (41). В качестве иллюстрации возможной зависимости этого параметра, т.е. относительной амплитуды второй гармоники при супергармоническом резонансе 2-го порядка, от относительной глубины односторонней трещины на рис. 5 для квадратной пластины, шарнирно опертой по контуру, при разных формах и значениях логарифмического декремента колебаний приведены указанные зависимости (сплошные линии) для случая расположения трещины в одном из сечений с наибольшим значением максимального напряжения изгиба. Для сопоставления там же представлены зависимости относительного изменения собственной частоты колебаний пластины $\beta_{Т,3}$ от γ (штриховые линии). Как видно, в области рассматриваемых значений относительной глубины трещины ($\gamma \leq 0,3$) чувствительность параметра A_2/A_1 на один-два порядка превышает чувствительность собственной частоты.

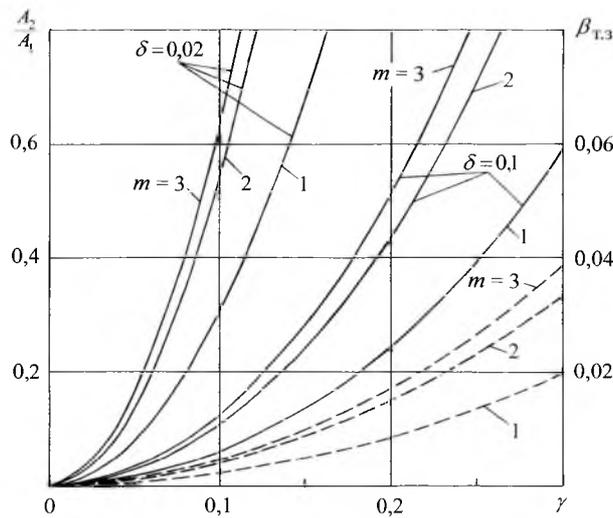


Рис. 5. Зависимости относительной амплитуды второй гармоники A_2/A_1 для случая супергармонического резонанса 2-го порядка (сплошные линии) шарнирно опертой по контуру прямоугольной пластины при $l/L = 0,1$, $\delta = 0,02$ и $0,1$, а также относительного изменения собственной частоты колебаний пластины $\beta_{Т,3}$ (штриховые линии) от относительной глубины $\gamma = h/l$ закрывающейся трещины, расположенной в одном из сечений с наибольшим значением максимального напряжения изгиба, при разных формах колебаний, $m = 1, 2, 3$.

Однако при наличии нескольких закрывающихся трещин, расположение которых при исследуемой форме колебаний обуславливает равенство значений характеристики κ на полциклах разного знака ($\kappa_{(+)} = \kappa_{(-)} = \kappa$) и, следовательно, нулевое значение характеристики (42), упругая пластина ведет себя как линейная система, т.е. супергармонический резонанс не возбуждается и искажение моногармоничности вынужденных колебаний отсутствует ($A_2/A_1 = 0$). Для данного расположения незакрывающихся односторонних трещин ($x_{Т,i} = \frac{1+2(i-1)}{2m}L$, $i = 1, 2, 3, \dots, N = m$) условие $\kappa_{(+)} = \kappa_{(-)}$ имеет место при четных формах ($m = 2, 4, \dots$) колебаний пластины.

В этом случае наряду с собственной частотой колебаний чувствительной характеристикой повреждения может быть обусловленное изменением жесткости пластины относительное изменение характеристики демпфирования колебаний. Наиболее удобной характеристикой демпфирования является логарифмический декремент колебаний δ , методы определения которого как при свободных, так и резонансных колебаниях упругих систем хорошо известны [4].

Исходя из энергетического определения декремента колебаний пластины при заданном уровне амплитуды максимального номинального напряжения изгиба σ_{\max} как отношения рассеянной за цикл колебаний энергии в системе $\Delta W(\sigma_{\max})$ к удвоенному амплитудному значению потенциальной энергии ее деформации $2\Pi(\sigma_{\max})$, т.е. $\delta(\sigma_{\max}) = \frac{\Delta W(\sigma_{\max})}{2\Pi(\sigma_{\max})}$, с использованием соотношения $\Pi_{\tau}(\sigma_{\max}) = (1 + \kappa)\Pi_0(\sigma_{\max})$ (см. (7), (8) [1]) найдем следующие выражения для декрементов колебаний неповрежденной пластины (δ_0) и пластины с трещинами (δ_{τ}) при одинаковом уровне амплитуды номинального максимального напряжения σ_{\max} :

$$\delta_0 = \frac{\Delta W_0}{2\Pi_0}; \quad \delta_{\tau} = \frac{\Delta W_0 + \Delta W_{\tau}}{2\Pi_{\tau}} = \frac{\Delta W_0 + \Delta W_{\tau}}{2(1 + \kappa)\Pi_0},$$

где ΔW_0 – рассеяние энергии колебаний вне трещины; ΔW_{τ} – рассеяние энергии, обусловленное наличием трещины.

Тогда относительное изменение декремента колебаний пластины при наличии трещины будет

$$\bar{\delta} = \frac{\delta_{\tau} - \delta_0}{\delta_0} = \frac{\frac{\Delta W_{\tau}}{2(1 + \kappa)\Pi_0} - \frac{\Delta W_0}{2\Pi_0}}{\frac{\Delta W_0}{2\Pi_0}}. \quad (43)$$

Если рассеянием энергии, обусловленным трещиной, по сравнению с рассеянием энергии вне ее можно пренебречь, то получим

$$|\bar{\delta}| = \frac{\kappa}{1 + \kappa}. \quad (44)$$

Как видно, наличие трещины обуславливает относительное уменьшение декремента колебаний пластины, превышающее относительное уменьшение собственной частоты колебаний, определяемое формулой (39) для β_{τ} , примерно в 1,9 раза при $\kappa \leq 0,3$. Однако, в отличие от параметра искажения моногармоничности колебаний (A_2/A_1), практическое использование параметра $\bar{\delta}$, как и определение собственной частоты колебаний, требует обеспечения идентичных условий виброиспытаний пластины в исходном состоянии и при наличии трещин.

Заключение. С использованием изложенной ранее авторами методики получены приближенные аналитические выражения для определения относительной энергетической характеристики повреждения k прямоугольной пластины, обусловленного наличием прямолинейных поверхностных трещин постоянной глубины, при различном их расположении и разных условиях закрепления и формах колебаний пластины. Приведены расчетные зависимости указанного параметра от относительной глубины закрывающихся трещин для шарнирно опертой по контуру и шарнирно опертой по двум краям пластины. С помощью полученных зависимостей для квадратной пластины рассчитаны вибродиагностические параметры повреждения и приведены зависимости относительного изменения собственной частоты и относительной амплитуды второй гармоники при супергармоническом резонансе 2-го порядка от относительной глубины трещин. Показано, что в рассмотренном диапазоне изменения относительной глубины трещины $0 \leq \gamma \leq 0,3$ значение параметра искажения моногармоничности колебаний на один-два порядка превышает величину относительного изменения собственной частоты колебаний пластины.

Резюме

Розглянуто результати аналітичного визначення вібродіагностических параметрів пошкодження прямокутної пластини у вигляді прямолінійних тріщин нормального відриву постійної глибини за різних умов закріплення та форм коливань однорідної пластини постійної товщини. Показано, що в діапазоні зміни відносної глибини тріщини до 0,3 параметр спотворення моногармонічності коливань при супергармонічному резонансі 2-го порядку перевищує величину відносної зміни власної частоти коливань пластини на один-два порядки.

1. *Матвеев В. В., Богинич О. Е.* Вибродиагностические параметры усталостного повреждения прямоугольных пластин. Сообщ. 1. Методика определения параметров повреждения // Пробл. прочности. – 2004. – № 6. – С. 5 – 16.
2. *Справочник по коэффициентам интенсивности напряжений: В 2 т. Т. 1 / Под ред. Ю. Мураками.* – М.: Мир, 1990. – 448 с.
3. *Вайниток В. А.* Инженерный метод расчета коэффициентов интенсивности напряжений для трещин в статически неопределимых системах // Пробл. прочности. – 1987. – № 6. – С. 46 – 49.
4. *Матвеев В. В.* Демпфирование колебаний деформируемых тел. – Киев: Наук. думка, 1985. – 264 с.

Поступила 11. 03. 2004