

УДК 517.929.7

Т. А. Григорова, канд. техн. наук,
В. П. Ляшенко, канд. фіз.-мат. наук

Кременчуцький національний університет
імені Михайла Остроградського, м. Кременчук

МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСІВ ВИСОКОТЕМПЕРАТУРНОЇ ДИФУЗІЇ ПІД ЧАС СПІКАННЯ ПОРОШКОВИХ МАТЕРІАЛІВ

Розглянуто математичну модель температурного поля виробу, що складається з порошку та пластифікатора, і процесу дифузії пластифікатора у виробі під час спікання і відпалу у вигляді системи крайових задач для рівнянь теплопровідності та дифузії. Задача розглядається в циліндричній системі координат і розв'язана чисельними методами. У результаті розв'язку побудовані графіки температурного розподілу і зміни концентрації легкоплавких домішок у виробі в залежності від координат та часу.

Ключові слова: високотемпературна дифузія, математична модель, температурний розподіл, розподіл концентрації.

Під час гарячого пресування та спікання спресованого виробу із порошкових матеріалів концентрація пластифікатора та легкоплавких домішок змінюється за рахунок дифузії, витрат на хімічні реакції та конвективного переносу уздовж однієї або всіх координатних осей зі швидкістю $\vec{v}_p = \{v_r, v_z, v_t\}$. Породжувані усередині, а також діючі із зовні джерела тепла приводять до нагрівання виробу та дифузії легкоплавких домішок, по порах та границях зерен за його межі.

Математична модель, де розглядалася дифузія легкоплавких компонентів під час спікання та гарячого пресування виробів не враховувала залежність зміни концентрації пластифікатора та легкоплавких домішок у виробі від температури, а також було розглянуто самий простий випадок з граничними умовами першого роду [3, с. 58—64; 4, с. 65—68].

Метою роботи є дослідити залежність зміни концентрації пластифікатора у виробі протягом часу спікання під дією температури нагрівання.

Потік пластифікатора через поверхню спресованого виробу відбувається за законом $D \frac{\partial C}{\partial r} + \chi(C - C_0) = 0$, де C_0 — концентрація домішок в оточуючому виріб середовищі, а на його вісі потік відсутній — $\frac{\partial C}{\partial r} = 0$. Зазвичай, він залежить від температури спікання та координат. Тут χ — коефіцієнт поглинання, D — коефіцієнт дифузії.

Тоді математична модель температурного поля виробу, що складається з порошку та пластифікатора, і процесу дифузії пластифікатора у виробі під час спікання та відпалів призводить до розв'язання системи крайових задач для рівнянь теплопровідності та дифузії:

$$\begin{aligned} \lambda \Delta T - c_2 \rho_2 (\vec{v}_p \text{grad} T) - c_1 \rho_1 T_t &= -w(T, P), \quad P \in \Omega, \quad t > 0, \\ m \Delta C - (\vec{v}_p \text{grad} C) - m C_t &= f(T, C, P), \quad P \in \Omega, \quad t > 0, \end{aligned} \quad (1)$$

де c_i , ρ_i — теплофізичні характеристики спресованого порошку та пластифікатора, \vec{v}_p — швидкість у напрямі однієї з координатних осей, $\Delta = \text{div grad}$ — оператор Лапласа; $w(T, P)$ — щільність джерел тепла; $f(T, C, P)$ — щільність інтенсивності витрати пластифікатора.

Знак “+” у правій частині другого рівняння у формулі (1) означає не джерела, а стоки речовини. У прес-формі виріб розігрівається передачею тепла за законом Ньютона та Стефана—Больцмана.

Представимо задачу у циліндричній системі координат у області $\Omega \times t$: $\{0 < r < r_0, 0 < z < l, t > 0\}$:

$$\begin{aligned} \lambda_{1,2} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T_{1,2}}{\partial r} \right) + \lambda_{1,2} \frac{\partial^2 T_{1,2}}{\partial z^2} - c_{1,2} \rho_{1,2} \frac{\partial T_{1,2}}{\partial t} = \\ = \begin{cases} -\frac{I^2 \rho_0 (1 + \beta T_{1,2})}{S^2}, & r - \Delta \leq r < r_0, \\ 0, & 0 < r < r_0 - \Delta, \end{cases} \end{aligned} \quad (2)$$

$$D \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial C}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 C}{\partial z^2} \right) - v_z \frac{\partial C}{\partial z} - v_r \frac{\partial C}{\partial r} - \frac{\partial C}{\partial t} = f(T, C, P), \quad (3)$$

$$0 < z < l, \quad T_{1,2} > 0,$$

$$T_{1,2}(r, z, 0) = T_0, \quad (4)$$

$$T_{1,2}(r, 0, t) = T_0, \quad T_{1,2}(r, l, t) = T_l, \quad (5)$$

$$\lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial r} \Big|_{r=r_0} + \alpha_1 (T_1 - T_c) + \varepsilon_1 \sigma (T_1^4 - T_c^4) = 0, \quad (6)$$

$$\lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial r} \Big|_{r=r_0 - \Delta} + \alpha_2 (T_1 - T_c) + \varepsilon_2 \sigma (T_1^4 - T_c^4) = 0, \quad (7)$$

$$\lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial r} \Big|_{r=r_0 - \Delta} - \alpha_2 (T_2 - T_{cl}) - \varepsilon_2 \sigma (T_2^4 - T_{cl}^4) = 0, \quad \frac{\partial T_2}{\partial r} \Big|_{r=0} = 0, \quad (8)$$

$$D \frac{\partial C}{\partial r} \Big|_{r=r_0+\Delta-0} =$$

$$= -\chi \left(\beta C + \frac{k_T D}{T_2} \left(\frac{\alpha_2}{\lambda} (T_2 - T_{c1}) + \frac{\varepsilon_2 \sigma D}{\lambda} (T_2^4 - T_{c1}^4) \right) \right), \quad \frac{\partial C}{\partial r} \Big|_{r=0} = 0, \quad (9)$$

$$D \frac{\partial C}{\partial z} \Big|_{z=0} - \beta C = 0, \quad \frac{\partial C}{\partial z} \Big|_{z=l} + \beta C = 0, \quad (10)$$

де $\alpha_{1,2}$, $\varepsilon_{1,2}$, $\lambda_{1,2}$, $T_{c,c1}$ — коефіцієнти тепловіддачі, теплопровідності, ступінь чорноти і температура середовища зовні та усередині прес-форми, $f(T, C, P) = \gamma T(r, z, t)$.

Тут перше з рівнянь теплопровідності у системі (2) описує температурне поле циліндричної прес-форми, а друге — температурне поле холодно спресованого виробу.

Друге рівняння цієї системи описує зміну концентрації пластифікатора і легкоплавких домішок у виробі. Граничні умови (8), (9) відображають залежність зміни концентрації пластифікатора та легкоплавких домішок у виробі, що спікається під дією температури.

Для дослідження температурного поля у внутрішньому циліндрі достатньо знати усереднений температурний розподіл у зовнішньому. Застосовуючи оператор осереднення, одержуємо одномірну початково-крайову задачу відносно температури $T(z, t)$ визначення температурного поля прес-форми [2].

Визначення температурного розподілу та концентрації пластифікатора у внутрішньому циліндрі в області $\Omega \times t$: $\{0 < r < r_0 - \Delta, 0 < z < l, t > 0\}$ має вигляд

$$\lambda_2 \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T_2}{\partial r} \right) + \lambda_2 \frac{\partial^2 T_2}{\partial z^2} - c_2 \rho_2 \frac{\partial T_2}{\partial t} = 0, \quad (11)$$

$$D \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial C}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 C}{\partial z^2} \right) - v_z \frac{\partial C}{\partial z} - v_r \frac{\partial C}{\partial r} - \frac{\partial C}{\partial t} = f(T, C, P), \quad (12)$$

$$T_2(r, z, 0) = T_0, \quad (13)$$

$$T_2(r, 0, t) = T_0, \quad T_2(r, l, t) = T_l \quad (14)$$

Умови (7)—(10) залишаються без змін.

Отримані крайові задачі розв'язуємо чисельними методами. Спочатку розв'язуємо задачу для отримання температурного розподілу на границі зовнішнього та внутрішнього циліндрів. Отриману матрицю значень температур використовуємо як граничну умову для пошуку температурного розподілу у внутрішньому циліндрі [2] рис. 1.

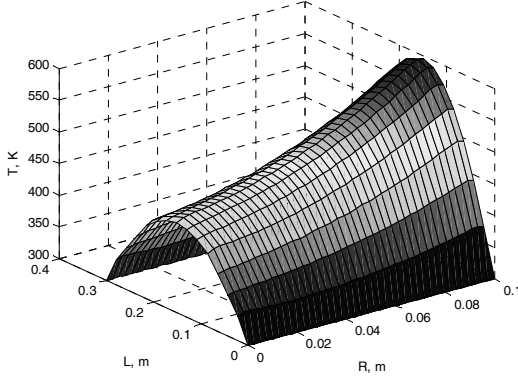


Рис. 1. Температурний розподіл на границі внутрішнього циліндру

Розглянемо випадок, коли швидкістю руху домішок у напрямі координатних осей можна знехтувати. Для розв'язку задачі для рівняння (12) застосовуємо метод змінних напрямів [1, с. 139—141], будуємо кінцево-різницеву схему Дугласа-Ганна в області $\bar{\Omega} \times t \{0 \leq r \leq r_0 - \Delta, 0 \leq z \leq l, t > 0\}$ з інтервалами $h_1 = (r_0 - \Delta) / N$, $h_2 = l / M$, $\Delta t = t_0 / j_0$, яка має вигляд

$$\begin{aligned} \frac{u_{n,m}^{j+1/2} - u_{n,m}^j}{\Delta t / 2} &= D \frac{u_{n+1,m}^{j+1/2} - u_{n,m}^{j+1/2}}{2h_1} + D \frac{u_{n-1,m}^{j+1/2} - 2u_{n,m}^{j+1/2} + u_{n+1,m}^{j+1/2}}{h_1^2} + \\ &+ D \frac{u_{n,m-1}^j - 2u_{n,m}^j + u_{n,m+1}^j}{h_2^2} - \gamma T_m^{j+1}, \\ \frac{u_{n,m}^{j+1} - u_{n,m}^{j+1/2}}{\Delta t / 2} &= \frac{D}{r_0} \frac{u_{n+1,m}^{j+1/2} - u_{n,m}^{j+1/2}}{2h_1} + D \frac{u_{n-1,m}^{j+1/2} - 2u_{n,m}^{j+1/2} + u_{n+1,m}^{j+1/2}}{h_1^2} + \\ &+ D \frac{u_{n,m-1}^{j+1} - 2u_{n,m}^{j+1} + u_{n,m+1}^{j+1}}{h_2^2} - \gamma T_n^{j+1} \end{aligned}$$

на границях області

$$\begin{aligned} \frac{-u_{2,m}^{j+1} + 4u_{1,m}^{j+1} - 3u_{0,m}^{j+1}}{2h_1} &= 0, \text{ для } n = 0, \\ \frac{-u_{N,m}^{j+1} + 4u_{N-1,m}^{j+1} - 3u_{N-2,m}^{j+1}}{2h_1} &= \\ -\chi \left(\beta C + \frac{k_T D}{T_n^{j+1}} \left(\frac{\alpha_2}{\lambda} (T_n^{j+1} - T_N^{j+1}) + \frac{\varepsilon_2 \sigma D}{\lambda} ((T_n^{j+1})^4 - (T_N^{j+1})^4) \right) \right) & \end{aligned}$$

для $n = N$.

Визначення температурного розподілу у системі прес-форма, виріб, що розігрівається внутрішніми джерелами тепла, розглянуто в роботі [2, с. 47—52].

Проведено чисельні розрахунки температурного поля та зміни концентрації домішок. Побудовані графіки, що відображають зміну концентрації легкоплавких домішок у виробі, під час процесу спікання, у залежності від координат та часу.

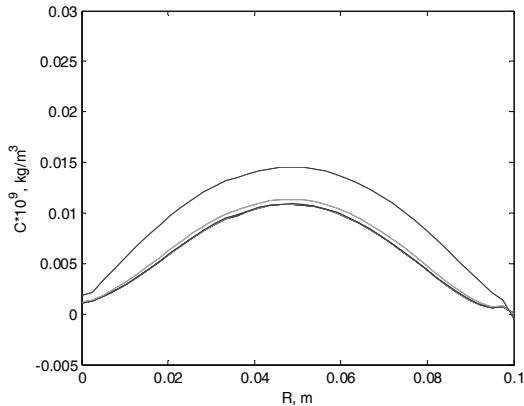


Рис. 2. Розподіл концентрації пластифікатора вздовж радіуса у внутрішньому циліндрі

На рис. 2 зображено зменшення концентрації легкоплавких домішок біля поверхні виробу, а на рис. 3 — зменшення концентрації у залежності від часу.

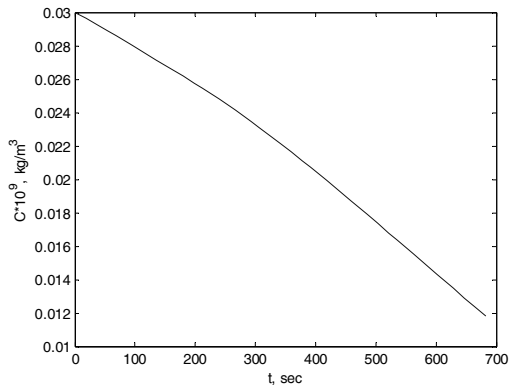


Рис. 3. Розподіл концентрації пластифікатора залежно від часу у внутрішньому циліндрі

Із збільшенням часу спікання настає просторова локалізація домішок, їх кількість у виробі зменшується та прямує до нуля.

Запропонована математична модель дозволить оцінити вплив температури на процес дифузії легкоплавких домішок під час створення виробу з порошкового матеріалу. Що суттєво скоротить час і витрати на виробництво виробів при розробці систем управління технологічним процесом.

Список використаних джерел:

1. Андерсон Д. Вычислительная гидромеханика и теплообмен : в 2 т. / Д. Андерсон, Дж. Таннехилл, Р. Плетчер ; пер. с англ. С. В. Сенина, Е. Ю. Шальмана. — М. : Мир, 1990. — 384 с.
2. Ляшенко В. П. Дослідження температурного поля двошарового циліндра з різними теплофізичними характеристиками / В. П. Ляшенко, Т. А. Григорова // Вісник Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна. — Харків, 2010. — № 890. — С. 47–52.
3. Ляшенко В. П. Математична модель переносу речовини під час спікання порошкових матеріалів / В. П. Ляшенко // Вісник Кременчуцького державного університету імені Михайла Остроградського. — Кременчук : КДУ, 2010. — Вип. 5/2010 (64), ч. 1. — С. 58–64.
4. Ляшенко В. П. Математична модель високотемпературної дифузії у замкненій області / В. П. Ляшенко, Т. А. Григорова // Вісник Кременчуцького державного університету імені Михайла Остроградського. — Кременчук : КДУ, 2010. — № 5/(64), ч. 1. — С. 65–68.

The mathematical model of temperature field of the product, consisting of powder and plasticizer, and the process of diffusion of plasticizer in the product during sintering and annealing is considered. Is of the form of boundary value problems for equations of heat conduction and diffusion. The problem is considered in cylindrical coordinates and solved by numerical methods. By solving graphs of temperature distribution and graph of changes in concentration of fusible component in the product depending on the coordinates and time are constructed.

Key words: *high-temperature diffusion, mathematical model, temperature distribution, the distribution of concentration.*

Отримано: 16.02.2012