ленко, Н. С. Никорюк, А. И. Пурис // Вісник Кременчуцького державного політехнічного університету. — КДПУ, 2006. — Ч. 2. — С. 137—139.
4. Стасенко В. М. Дослідження динамічних параметрів елементів талевої системи підіймального агрегату бурової установки 6 класу з лебідкою ЛБ-650Е. / В. М. Стасенко, В. М. Карпенко, О. В. Карпенко // Проблеми нафтогазової промисловості : зб. наук. праць. — К., 2006. — Вип. 3. — С. 174—189.

In the robot examines the optimal control algorithm for the formation of influence — the supply voltage at the terminals of a DC motor with series excitation in the start-up transients. The developed algorithm allows the formation of control actions to ensure performance and minimum time for recovery or down columns, with the following restrictions:

$$i \le I_{\max}; \quad u \le U_{\max}.$$

Key words: *Boring setting, system of lifting aggregate, electro-drive, system generator-engine, DC motor, starting, the supply voltage at the terminals of a DC motor, management the change of tension.*

Отримано: 25.04.2011

УДК 519.6:519.85

Є. Ю. Карпенко, канд. техн. наук

Національний технічний університет України «КПІ», м. Київ

УЗАГАЛЬНЕНИЙ ПРИНЦИП НЕВ'ЯЗКИ ПРИ РОЗВ'ЯЗАННІ ІНТЕГРАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ФРЕДГОЛЬМА І РОДУ МЕТОДОМ УСІЧЕНОГО SVD РОЗКЛАДУ

У статті розглянуто підхід до розв'язання інтегрального рівняння Фредгольма 1-го роду методом усіченого SVD розкладу з використанням узагальненого принципу нев'язки для визначення оптимального розв'язку.

Ключові слова: *інтегральне рівняння Фредгольма, SVD розклад, узагальнений принцип нев'язки.*

Вступ та постановка задачі. При використанні методу квадратур для розв'язання інтегральних рівнянь Фредгольма І роду [1], отримується апроксимуюча система лінійних алгебраїчних рівнянь

$$Ay = F, \tag{1}$$

де $A_{ij} = r_j K(x_i, s_j), F_i = f(x_i), \ i = \overline{1, l}, \ j = \overline{1, n}, \ r_j$ — коефіцієнти квадратурних формул. При збільшенні параметру дискретизації, спектр матриці наближається до спектра інтегрального оператора (в силу четвертої теореми Фредгольма найменше власне значення інтегрального оператора дорівнює нулю). Таким чином, мінімальне по модулю власне значення матриці A наближається до нуля, а число зумовленості $\mathrm{cond} \to \infty$, що призводить до нестійкості розв’язання СЛАР (1). Одним з найбільш ефективних методів розв’язання таких систем є метод псевдооберненої матриці Мура-Пенроуза, при цьому метод SVD (сингулярного) розкладу є найбільш розвинутим обчислювальним підходом для знаходження псевдооберненої матриці [2].

SVD розклад. Для розв’язання системи (1) можна скористатися методом *SVD (сингулярного)* розкладу матриці, який полягає в тому, що будь-яку матрицю A розмірності $l \times n$ можна представити у вигляді:

$$A = U \Sigma V^T , \tag{2}$$

де U — ортогональна $l \times l$-матриця, V — ортогональна $n \times n$-матриця, Σ — діагональна $l \times n$-матриця з діагональними елементами $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq ... \geq \sigma_p \geq 0,\ p = \min\{l, n\}$. Схематично таке розкладання можна представити у вигляді:

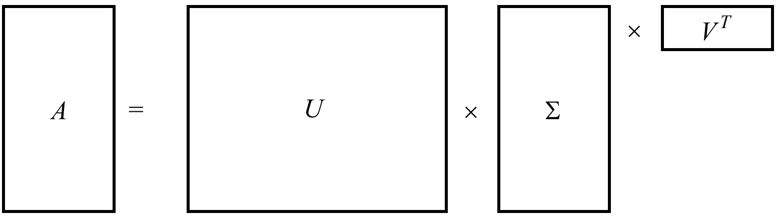

Рис. 1. *Схема SVD розкладу*

Стовпці U (або V відповідно) називаються лівими (правими) сингулярними векторами A, а σ_i — сингулярними числами. Важливою властивістю даного розкладу є той факт, що $rank(A) = r$ тоді й тільки тоді, коли $\sigma_r > 0, \sigma_{r+1} = ... = \sigma_p = 0$.

У випадку якщо $\sigma_{r+1}, ..., \sigma_p$ дуже малі в порівнянні з $\sigma_1, ..., \sigma_r$, то для обчислювальних цілей прийнято вважати, що ранг матриці A має *ефективний ранг* r. Застосувавши розклад (2) для системи (1) можна одержати розв’язок у вигляді:

$$Y = V(n, 1:r)\Sigma^+(1:r, 1:r)U^T(1:r, l)F, \tag{3}$$

де Σ^+ — діагональна матриця з елементами $1/\sigma_1, 1/\sigma_2, ..., 1/\sigma_r$, або виконавши заміну $C = \Sigma^+(1:r, 1:r)U^T(1:r, l)F$ отримаємо:

$$Y = V_{n \times r} C_{r \times 1}. \tag{4}$$

Співвідношення (4) показує, що розв’язок рівняння (1) шукається в так званому SVD базисі, базисні функції якого є стовпцями матриці $V_{n \times r}$ з коефіцієнтами зі стовпця C.

Метод SVD розкладу можна розглядати як метод регуляризації, у якому в якості параметра регуляризації служить r. На відміну від методів Тихонова та Фридмана, у яких параметр регуляризації може отримувати нескінченне число значень, у методі SVD розкладу параметр r має кінцеве число значень від 1 до $R-1$, де R — номер першого нульового сингулярного значення.

Узагальнений принцип нев'язки (УПН) для метода SVD розкладу. Аналогічно тому, як УПН діє в методі регуляризації Тихонова, його можна застосувати і для методу SVD розкладу, а саме стоїть задача знайти таке значення r, при якому $abs\left(\chi(r)\right)$ приймало б мінімальне значення. Для інтегрального рівняння Фредгольма I роду $\chi(r)$ знаходиться з формули:

$$\chi(r) = \beta(r) - \zeta(r), \tag{5}$$

де

$$\beta(r) = \int_c^d \left[\int_a^b \tilde{K}(x,s) y_r(s) ds - \tilde{f}(x) \right]^2 dx, \tag{6}$$

$$\zeta(r) = \left(\delta + \xi \sqrt{\gamma(r)} \right)^2 + \mu, \tag{7}$$

$$\gamma(r) = \int_a^b y_r^2(s) ds. \tag{8}$$

Чисельний алгоритм. Нехай права частина рівняння $f(x)$ задана на нерівномірній сітці вузлів $\{x_i\}_{i=1}^{l}$: $c = x_1 < x_2 < ... < x_l = d$, а розв'язок $y_\alpha(s)$ шукається на нерівномірній сітці $\{s_j\}_{j=1}^{n}$, що збігається із $t-$сіткою: $a = s_1 = t_1 < s_2 = t_2 < ... < s_n = t_n = b$.

Застосувавши квадратурну формулу трапецій можна перейти до СЛАР (1). Для матриці A знаходиться SVD розклад

$$A_{l\times n} = U_{l\times l} \Sigma_{l\times n} V_{n\times n}^T, \tag{9}$$

у підсумку одержуємо систему

$$U_{l\times l} \Sigma_{l\times n} V_{p\times n}^T y = F, \tag{10}$$

розв'язок якої представимо у вигляді

$$y_{n\times 1} = V_{n\times n} \Sigma_{n\times l}^{+} U_{l\times l}^T F_{l\times 1}, \tag{11}$$

де Σ^+ — діагональна матриця з діагональними елементами $1/\sigma_1, 1/\sigma_2, ..., 1/\sigma_p$, $p = \min\{l, n\}$.

Чисельна апроксимація функцій $\beta(\alpha)$ і $\|y_r\| = \sqrt{\gamma(r)}$, що входять в (6)—(8) має вигляд:

$$\beta(r) = \sum_{i=1}^{l} p_i \left[\sum_{j=1}^{n} r_j \tilde{K}_{ij} (y_r)_j - \tilde{f}_i \right]^2 , \qquad (12)$$

$$\|y_r\|_{L_2} = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} r_j (y_r)_j^2} . \qquad (13)$$

Чисельний алгоритм необхідно виконувати у 2 етапи. На першому етапі знаходимо SVD розклад матриці A та для ряду значень $r = 1, R-1$, визначаються розв'язки y_{r_i} згідно (11), а також значення нев'язки $\beta(r_i)$, норми розв'язку $\|y_{r_i}\|$, і знаходиться значення

$$\mu = \beta(r_F), \qquad (14)$$

де

$$r_F = \min_{i=\overline{1,R-1}} \{ r_i : \beta(r_i) \le \beta(r_{i-1}) \}, \qquad (15)$$

є мінімальне значення r_i. при якому ще має місце монотонність функції $\beta(r)$. На другому етапі, знову змінюючи r від 1 до r_F, але не виконуючи обчислення (11) знаходимо значення r_d з умови

$$|\chi(r_i)| = \min_{r_i = \overline{1, r_F}} \qquad (16)$$

де

$$\chi(r_i) = \beta(r_i) - \left(\delta + \xi \|y_{r_i}\| \right)^2 - \mu .$$

Список використаних джерел:

1. Верлань А. Ф. Интегральные уравнения: методы алгоритмы, программы / А. Ф. Верлань, В. С. Сизиков. — К. : Наук. думка, 1986. — 544 с.
2. Сизиков В. С. Устойчивые методы обработки результатов измерений : учебное пособие / В. С. Сизиков. — СПб. : СпецЛит, 1999. — 240 с.

The article considers an approach to solving a Fredholm integral equation of the first kind by truncated SVD decomposition using the generalized residual principle for determining the optimal solution.

Key words: *Fredholm integral equation, SVD decomposition, generalized residual principle.*

Отримано: 24.05.2011