

## **Анализ деформаций гiba трубы на основе смешанного подхода. Сообщение 3. Расчет перемещений оси гiba методом начальных параметров**

**И. В. Орыняк, С. А. Радченко**

Институт проблем прочности им. Г. С. Писаренко НАН Украины, Киев, Украина

*Рассмотрена задача о деформировании криволинейной оболочки при нагружении внутренним давлением, осевой силой и перепадом температур. Получены физические уравнения, связывающие перемещения и углы поворотов линии центра масс поперечных сечений оболочки с параметрами нагружения. Приведена общая постановочная система уравнений для криволинейного элемента при его деформировании. С помощью метода начальных параметров получено аналитическое решение дифференциальных уравнений для перемещений и углов поворота линии центров с учетом действия распределенных сил и моментов.*

**Ключевые слова:** гиб трубы, изгиб в плоскости, изгиб из плоскости, центр масс, криволинейный стержень.

**Введение.** Теория стержней, т.е. тел, два размера которых значительно меньше третьего, называемого осью тела, в последнее время очень широко используется в численных приложениях [1, 2]. Это связано прежде всего с необходимостью решения геометрически нелинейных задач. Предпосылкой успешного применения теории стержней даже для сравнительно объемных тел является правильное определение физических (упругих) характеристик сечений, перпендикулярных оси тела. Получение этих характеристик (податливостей) непосредственно следует из обычных теорий балок Эйлера–Бернулли или Тимошенко–Рейсснера, когда из определенных гипотез распределения деформаций в сечении устанавливаются зависимости между приложенными усилиями и перемещениями [3]. Однако применение указанных теорий ограничено для определенных видов деформирования, а также для сравнительно массивных тел. Эти ограничения снимаются, если характеристики сечений получены с помощью теории упругости для сплошных сечений [4] либо на основе теории оболочек для тонкостенных сечений [5]. При этом используются точные по Сен-Венану решения, т.е. решения, где распределения внешних сил и моментов на краях тела соответствуют распределениям во внутренних сечениях. Связь решения по Сен-Венану с балочными (стержневыми) постановками была однозначно показана в работах [6, 7].

Обычно при расчете трубопроводов их рассматривают как стержневые конструкции, локальные характеристики податливости которых определяются из решения для тороидальной оболочки [8, 9]. При этом само понятие податливости относится к изменению угла поворота сечения. Это нечеткое определение податливости, поэтому могут возникать проблемы при его трактовке для криволинейного элемента большой кривизны  $\alpha$ . Из теории криволинейных стержней известно, что нейтральная ось сохраняет свою длину при нагружении изгибающим моментом [10], но она не совпадает с

осью симметрии (либо центром масс). Это значит, что при чистом растяжении линия центров масс также изменяет кривизну, а при чистом изгибе – длину. Поэтому только на основе совместного балочно-оболочечного решения можно четко определить понятие податливости и получить уравнения для перемещений линии центров масс поперечных сечений трубопровода. Эта задача решена в сообщениях 1 и 2 при нагружении чистым моментом. В данном сообщении эти уравнения будут уточнены с учетом перемещений от давления, растягивающей силы и температурных деформаций. Особенность настоящего решения по Сен-Венану состоит в том, что поперечные силы не учитываются в окончательных уравнениях для деформаций, они важны для приращения моментов.

Цель данного сообщения заключается в получении и аналитическом решении дифференциальных уравнений для перемещений и углов поворота линии центров (балки как целой) с учетом действия распределенных сил и моментов. Обычно в литературных источниках приводятся выражения только для моментов и сил, а перемещения находятся как интегралы Мора по длине криволинейного участка от произведения действующих нагрузок на обобщенные единичные силы и моменты [11, 12]. Это затрудняет вычисления и ограничивает возможности применения многочисленных методов теории стержней. Авторы являются сторонниками метода начальных параметров, который очень просто алгоритмизируется при наличии таких решений. Применительно к трубопроводам этот метод описан ранее [13], и в данной работе обсуждаться не будет.

**1. Перемещения от внутреннего давления.** Заметим, что при анализе балки как целой рассматривается линия центров. Поэтому все силы и моменты должны определяться относительно нее. Это важно еще потому, что при переходе от прямой трубы к криволинейному участку сохраняется непрерывность моментов, которая претерпела бы разрыв, если рассматривать нейтральную линию.

Итак, пусть на гиб трубы действует только внутреннее давление

$$P = \frac{t}{R} \bar{\sigma} f_p. \quad (1)$$

Здесь для удобства введены следующие обозначения:  $f_p$  – безразмерный коэффициент, характеризующий величину внешнего нагружения;  $\bar{\sigma}$  – единичное нормировочное напряжение;  $t$  – толщина стенки;  $R$  – радиус сечения. Значения соответствующих окружной и осевой сил заданы формулами (2) [14]. Задача состоит в определении перемещений и поворотов линии центров. Оказывается, что невозможно подобрать перемещения, которые в соответствии с законом Гука отвечали бы заданному распределению осевых сил. Это значит, что при нагружении внутренним давлением в сечениигиба трубы не может существовать безмоментное напряженное состояние, задаваемое формулами (2) [14]. Покажем, что оболочечные напряжения от момента достаточно малы. С этой целью примем следующее распределение перемещений точек поверхностигиба трубы от давления  $u_p, v_p, w_p$ :

$$u_p = U_0(\theta) + \theta_z(\theta)R \sin \varphi; \quad (2a)$$

$$v_p = -W_y \cos \varphi + D \cos \varphi; \quad (2б)$$

$$w_p = W_0 - W_y \sin \varphi + D \sin \varphi, \quad (2в)$$

где направления перемещений и углов поворотов центра масс сечения  $U_0$ ,  $W_y$ ,  $\theta_z$  совпадают с таковыми, приведенными в [15]; величина  $W_0$  соответствует равномерному расширению сечения ггиба;  $D$  – некоторая константа, смысл которой и ее отличие от  $W_y$  можно показать выражением проекций  $v_p$  и  $w_p$  на оси  $z$  и  $y$ , равных соответственно  $-D \sin 2\varphi$  и  $-D \cos 2\varphi$ . Для осевых сил с использованием закона Гука запишем следующие выражения:

$$N_x - \mu N_\varphi = Et \varepsilon_\theta; \quad (3a)$$

$$N_\varphi - \mu N_x = Et \varepsilon_\varphi. \quad (3б)$$

Подставим в (3) выражения для осевых сил (формулы (2) [14]) и деформаций (формулы (14) [15]) и умножим полученные выражения на  $(1 + \alpha \sin \varphi)$ :

$$\begin{aligned} & \bar{p}(1 + \alpha \sin \varphi - \mu\alpha - \alpha\mu \sin \varphi)B = \\ & = U'_0 + \theta'_z R \sin \varphi - W_y + W_0 \sin \varphi + D \cos 2\varphi; \end{aligned} \quad (4a)$$

$$\begin{aligned} & \bar{p}(2 + \alpha \sin \varphi - \mu - \alpha\mu \sin \varphi)R = \\ & = W_0 + W_0 \alpha \sin \varphi - 2D \sin \varphi - D\alpha + D\alpha \cos 2\varphi, \end{aligned} \quad (4б)$$

где  $\bar{p} = \frac{PR}{2Et}$ . В обоих уравнениях члены при  $\cos 2\varphi$  не могут быть уравнены.

Сопоставляя в (4б) члены при единице и  $\sin \varphi$ , определяем неизвестные коэффициенты с точностью до  $\alpha^2$ :

$$W_0 = (2 - \mu)\bar{p}R; \quad (5a)$$

$$D = \bar{p}R\alpha/2. \quad (5б)$$

Подставляя (5) в (4a) и сопоставляя члены при единице и  $\sin \varphi$ , получаем два уравнения балочного типа для деформированной оси центров, уточненные на случай действия внутреннего давления:

$$\frac{\partial U_0}{B_0 \partial \theta} - \frac{W_y}{B_0} = \bar{p}(1 - 2\mu) = \frac{PR(1 - 2\mu)}{2Et}; \quad (6a)$$

$$\frac{\partial \theta_z}{B_0 \partial \theta} = -\bar{p} = -\frac{PR}{2Et}. \quad (66)$$

Эти выражения являются основным результатом данного раздела.

Оценим теперь дополнительные напряжения, связанные с коэффициентом  $D$  в выражении (46). Из формулы (166) [15], связывающей  $\chi_\varphi$  с  $D$ , с учетом, что распределенный оболочечный момент  $M_\varphi \approx H\delta\chi_\varphi$ , получаем его приближительную оценку:

$$M_\varphi \approx \frac{\alpha t^3 \bar{\sigma} f_p}{12(1-\mu^2)R}. \quad (7)$$

Связь между моментами и изгибающими напряжениями  $\sigma_\varphi$  позволяет оценить максимальные неучтенные  $\sigma_\varphi$ :

$$\sigma_\varphi = \frac{6M_\varphi}{t^2} \approx \frac{\alpha \bar{\sigma} f_p t}{2(1-\mu^2)R}. \quad (8)$$

Аналогично оценим дополнительные напряжения, связанные с коэффициентом  $D$  в (4а). Как видно из (3а), (4а) и (5б), могут возникнуть дополнительные силы  $N_x \approx \frac{PR}{4} \alpha^2 \cos 2\varphi$ . Такая оценка показывает, что анализ напряженно-деформированного состояния гiba трубы при нагружении внутренним давлением при больших  $\alpha$  требует более подробного исследования, однако при малых и средних  $\alpha$  дополнительными эффектами можно пренебречь.

**2. Осевая сила и перепад температуры.** Учет перемещений при нагружении гiba трубы осевой силой и температурой имеет большое значение при рассмотрении его как криволинейного стержня. Изучим действие глобальной осевой силы, приложенной ко всему сечению:

$$N^{\text{доп}} = \bar{\sigma} f_n 2\pi R t, \quad (9)$$

и перепада температуры  $\Delta T$ , где  $f_n$  – безразмерный коэффициент, характеризующий величину осевой силы.

Направление силы  $N^{\text{доп}}$  таково, что она вызывает положительные продольные перемещения  $u$  и таким образом действует против локальной осевой силы  $N_x$ . Учитывая, что интеграл по всему сечению от силы  $N_x$  равен глобальной силе  $N$ :

$$\int_0^{2\pi} N_x(\theta, \varphi) R d\varphi = -N, \quad (10)$$

и полагая  $N_x$  постоянной по контуру сечения, получаем

$$N_x = -\bar{\sigma} f_n t. \quad (11)$$

В первом приближении считается, что при таких условиях нагружения в гнбе реализуется безмоментное напряженное состояние. Первое уравнение равновесия (4а) в [15] используется для определения локальной окружной силы  $N_\varphi$ :

$$N_\varphi S_\varphi = -N_x R \sin \varphi, \quad (12)$$

а выражения для дополнительных перемещений, возникающих от сил, определяемых по (11) и (12), записываются аналогично (2).

При наличии перепада температур выражения закона Гука представляются в виде

$$N_x - \mu N_\varphi + Et\alpha_T \Delta T = Et\varepsilon_\theta; \quad (13a)$$

$$N_\varphi - \mu N_x + Et\alpha_T \Delta T = Et\varepsilon_\theta, \quad (13б)$$

где  $\alpha_T$  – коэффициент температурного расширения.

Как и при рассмотрении внутреннего давления, получим выражение для определения  $W_0$ , которое имеет подобный смысл:

$$W_0 = \frac{\mu \bar{\sigma} f_n R}{E} + \alpha_T \Delta T R, \quad (14)$$

и два уравнения балочного типа:

$$\frac{\partial U_0}{B_0 \partial \theta} - \frac{W_y}{B_0} = \alpha_T \Delta T - \frac{N^{\text{доп}}}{EF}; \quad (15a)$$

$$\frac{\partial \theta_z}{B_0 \partial \theta} = - \frac{N^{\text{доп}} (1 + 2\mu)}{EFB_0}. \quad (15б)$$

Заметим, что решения (15) являются приближенными, поскольку и в этом случае возникают дополнительные деформации гнба как оболочки.

**3. Система постановочных уравнений.** Основная цель этого сообщения заключается в получении зависимостей между обобщенными перемещениями и силами. В работе [15] и в вышеприведенных п. 1, 2 получены дифференциальные уравнения балочного типа для криволинейного стержня, связывающие углы поворотов и перемещения линии центра масс сечения гнба с различными внешними факторами нагружения (изгибающие и крутящий моменты, внутреннее давление, перепад температур и осевая сила). Объединив полученные решения [15] с выражениями (6а), (6б) и (15а), (15б) для углов поворота и перемещений, запишем следующие физические уравнения:

три уравнения для углов поворота центра сечения:

$$\frac{d\theta_z}{B_0 d\theta} = -\frac{K^{in} K_z}{EI} - \frac{N^{доп}(1+2\mu)}{EFB_0} - \frac{PR}{2EtB_0}; \quad (16a)$$

$$\frac{d\varphi}{B_0 d\theta} - \frac{\theta_y}{B_0} = -\frac{K_x}{2GI}; \quad (16б)$$

$$\frac{d\theta_y}{B_0 d\theta} + \frac{\varphi}{B_0} = -\frac{K^{out} K_y}{EI}; \quad (16в)$$

три уравнения для перемещения центра сечения:

$$\frac{dW_y}{B_0 d\theta} + \frac{u}{B_0} = \theta_z; \quad (17a)$$

$$\frac{dW_z}{B_0 d\theta} = -\theta_y + \frac{K^{кр} K_x R^2}{2GIB_0}; \quad (17б)$$

$$\frac{du}{B_0 d\theta} - \frac{W_y}{B_0} = \alpha_T \Delta T + \frac{RP(1-2\mu)}{2Eh} - \frac{N^{доп}(s)}{EF} - \frac{K^{in} K_z R^2}{2EIB_0} (1+\mu). \quad (17в)$$

Поскольку в данной работе обобщаются все полученные результаты и приводятся уравнения длягиба как криволинейного стержня, уместно более подробно указать знаки и направления всех величин. На рисунке приведена схема криволинейного стержня. Локальные координаты  $x$ ,  $y$ ,  $z$  связаны с центром масс каждого поперечного сечения, причем ось  $x$  направлена вдоль оси криволинейного стержня,  $y$  – к центру криволинейного стержня,  $z$  – таким образом, что образует правую тройку векторов.

Приняты следующие правила для знаков. Все перемещения направлены вдоль соответствующих осей, т.е.  $u$ ,  $W_y$ ,  $W_z$  направлены по  $x$ ,  $y$ ,  $z$  соответственно; это же относится к глобальным силам  $N^{доп}$ ,  $Q_y$ ,  $Q_z$ . Углы поворота  $\varphi$ ,  $\theta_y$ ,  $\theta_z$  считаются положительными, если вращение происходит по часовой стрелке вокруг соответствующей оси  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , это же относится к глобальным моментам  $K_x$ ,  $K_y$ ,  $K_z$ .

Замыкают разрешающую систему уравнений для 12 обобщенных параметров (три перемещения, три угла поворота, три силы, три момента) уравнения равновесия для криволинейного стержня. Они достаточно известны и представляются в таком виде.

Дифференциальные уравнения для моментов:

$$\frac{dK_x}{B_0 d\theta} - \frac{K_y}{B_0} = 0; \quad (18a)$$

$$\frac{dK_y}{B_0 d\theta} + \frac{K_x}{B_0} = Q_z + m_y; \quad (18б)$$

$$\frac{dK_z}{B_0 d\theta} = -Q_y + m_z, \quad (18в)$$

дифференциальные уравнения для сил:

$$\frac{dQ_z}{B_0 d\theta} = q_z; \quad (19а)$$

$$\frac{dQ_y}{B_0 d\theta} + \frac{N^{\text{доп}}}{B_0} = q_y; \quad (19б)$$

$$\frac{dN^{\text{доп}}}{B_0 d\theta} - \frac{Q_y}{B_0} = q_x, \quad (19в)$$

где  $Q_z, Q_y$  – глобальные перерезывающие силы, действующие в соответствующем направлении;  $m$  – распределенные моменты;  $q$  – распределенные усилия.

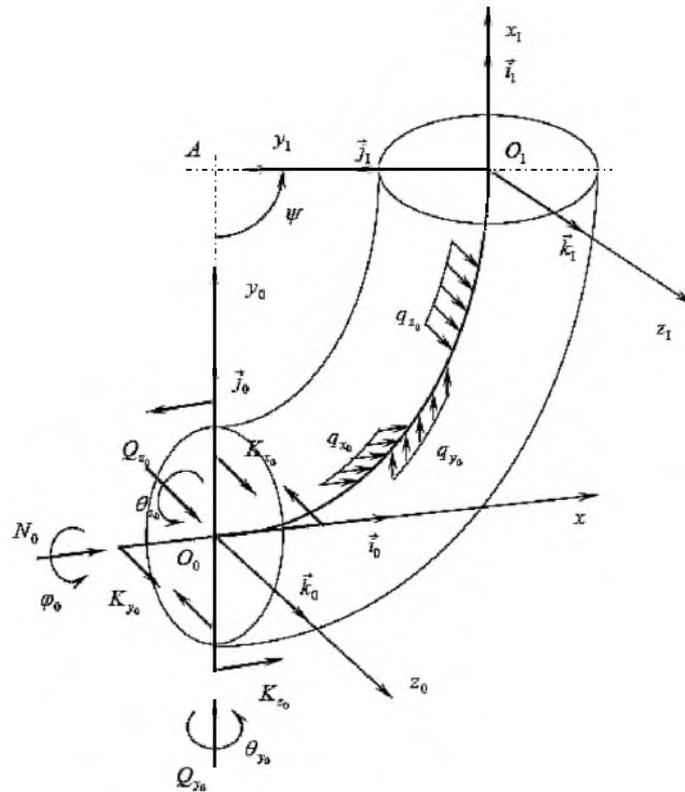


Схема криволинейного элемента.

Заметим, что в уравнение (19б) не входит составляющая от давления, поскольку рассматривается только дополнительное усилие, которое зависит от полного глобального продольного усилия  $N^{\text{полн}}$  следующим образом:

$$N^{\text{доп}} = N^{\text{полн}} + P\pi R^2. \quad (20)$$

Введение дополнительного усилия позволяет упростить результирующие уравнения.

Покажем, что подчеркнутые члены в уравнениях (17) являются малыми порядка  $\alpha^2$  по сравнению с другими членами. Как следует из уравнения (16б), величина  $\theta_y$  сопоставима с  $\frac{B_0 K_x}{2GI}$ . Подчеркнутый член в (17б), учитывая близость коэффициента  $K^{\text{кр}}$  к единице, примерно в  $\alpha^2$  раз отличается от  $\theta_y$ . Из уравнений (17а) и (17в) видно, что перемещения  $u$ ,  $W_y$  зависят как от  $\theta_z$ , так и от подчеркнутого в (17в) члена. В свою очередь, как следует из (16в),  $\theta_z(\theta) \approx -\frac{K^{\text{ин}} K_z}{EI} B_0 \theta$ , где  $\theta$  – полный уголгиба трубы.

Очевидно, что подчеркнутый член в (17в) отличается от  $\theta_z$  в  $\alpha^2$  раз, если только полный уголгиба не является очень малой величиной.

Проанализируем компоненту, содержащую  $N^{\text{доп}}$  в уравнении (16а). Как отмечалось выше, решается задача Сен-Венана. При этом принято, что поперечные глобальные силы  $Q$  достаточно малы, чтобы учитывать их в локальных деформациях стенок трубы. Как следует из (19б),  $N^{\text{доп}}$  имеет с  $Q$  один порядок малости, если уголгиба значительно меньше единицы. Поэтому либо значение  $N^{\text{доп}}$  пренебрежимо мало, либо полный уголгиба настолько мал, что можно считать

$$N^{\text{доп}} = \text{const} = N_0^{\text{доп}}, \quad (21)$$

где  $N_0^{\text{доп}}$  определяет значение  $N^{\text{доп}}$  в начале участка.

**4. Упругий расчетгиба трубы.** Уравнения (16)–(19) представляют собой замкнутую систему и могут быть использованы при упругих расчетахгиба трубы, в том числе при больших перемещениях, что может быть актуально, еслигиб трубы используется как упругий элемент приборов [16]. В практических расчетах трубопроводов в основном решают задачи для малых перемещений и при малых и средних значениях кривизны  $\alpha$  ( $\alpha < 0,3 \dots 0,4$ ). Таким образом, подчеркнутые члены достаточно малы при малых  $\alpha$ . Пренебрежение ими и использование допущения (21) позволяют значительно упростить решение, которое для уравнений (16)–(19) имеет вид:

$$Q_y(\psi) = (Q_{y_0} + q_{y_0} B_0 \psi) \cos \psi - (N_0^{\text{доп}} + q_{x_0} B_0 \psi) \sin \psi; \quad (22a)$$

$$\begin{aligned}
& -m^{y_0} \left[ \psi \sin \psi \left( 3K_{om} B_0^2 - \frac{8EI}{B_0^2} \right) + \psi^2 \cos \psi \left( K_{om} B_0^2 + \frac{8EI}{B_0^2} \right) \right] - \\
& + K^{x_0} \left[ K_{om} B_0 + \frac{2EI}{B_0} \right] \psi \sin \psi - \\
& - K^{y_0} \left[ K_{om} B_0 - \frac{2EI}{B_0} \right] \sin \psi + \left( K_{om} B_0 + \frac{2EI}{B_0} \right) \psi \cos \psi + \\
& - \tilde{O}^{z_0} \left[ \frac{2GI}{B_0^2} (\cos \psi - 1) + \left( K_{om} B_0^2 + \frac{2EI}{B_0} \right) \frac{4GI}{B_0^2} \right] \psi \sin \psi - \\
& \theta^y(\psi) = \theta^x \cos \psi - \phi_0 \sin \psi - \\
& + q^{y_0} B_0^2 (2 \sin \psi - \psi \cos \psi - \psi) - q^{x_0} B_0^2 (2 - 2 \cos \psi - \psi \sin \psi) + \\
& - B_0 m^{z_0} \frac{\psi^2}{2} + \tilde{O}^{y_0} B_0 (1 - \cos \psi) - N_{\text{топ}}^0 B_0 (\psi - \sin \psi) + \\
& \theta^z(\psi) = \theta^{z_0} + \left[ K_{m} B_0 \frac{EI}{EI} + K_{z_0} + \frac{K_m}{EI} \left( \frac{EF B_0}{N_{\text{топ}}^0 (1 + 2\mu)} + \frac{2EF B_0}{PR} \right) \right] \psi - \\
& + B_0^2 q^{z_0} (\psi - \sin \psi); \quad (22e) \\
& K^x(\psi) = K^{x_0} \cos \psi + K^{y_0} \sin \psi + B_0 \tilde{O}^{z_0} (1 - \cos \psi) + m^{y_0} B_0 \frac{\psi \sin \psi}{2} + \\
& + q^{z_0} B_0^2 (1 - \cos \psi); \quad (22r) \\
& K^y(\psi) = K^{y_0} \cos \psi + (-K^{x_0} + \tilde{O}^{z_0} R) \sin \psi + m^{y_0} B_0 \frac{\psi \cos \psi + \sin \psi}{2} + \\
& - B_0^2 [q^{y_0} (\psi \sin \psi + \cos \psi - 1) - q^{x_0} (\sin \psi - \psi \cos \psi)]; \quad (22r) \\
& K^z(\psi) = K^{z_0} - B_0 \tilde{O}^{y_0} \sin \psi - m^{z_0} \psi - N_{\text{топ}}^0 (1 - \cos \psi) - \\
& N(\psi) = (N_{\text{топ}}^0 + q^{x_0} B_0 \psi \cos \psi + \tilde{O}^{y_0} + q^{y_0} B_0 \psi) \sin \psi; \quad (22b) \\
& \tilde{O}^z(\psi) = \tilde{O}^{z_0} + q^{z_0} B_0 \psi; \quad (22g)
\end{aligned}$$

$$-q_{z_0} \left[ \left( \frac{K^{out} B_0^3}{2EI} + \frac{B_0^3}{4GI} \right) (\sin \psi - \psi \cos \psi) - \frac{B_0^3}{2GI} (\psi - \sin \psi) \right]; \quad (23б)$$

$$\begin{aligned} \varphi(\psi) = & \varphi_0 \cos \psi + \theta_{y_0} \sin \psi + \\ & + Q_{z_0} \left( \frac{K^{out} B_0^2}{2EI} + \frac{B_0^2}{4GI} \right) (\psi \cos \psi - \sin \psi) - K_{y_0} \left( \frac{K^{out} B_0}{2EI} + \frac{B_0}{4GI} \right) \psi \sin \psi - \\ & - K_{x_0} \left[ \left( \frac{B_0}{4GI} - \frac{K^{out} B_0}{2EI} \right) \sin \psi + \left( \frac{K^{out} B_0}{2EI} + \frac{B_0}{4GI} \right) \psi \cos \psi \right] + \\ & + m_{y_0} \left( \frac{K^{out} B_0^2}{8EI} + \frac{B_0^2}{16GI} \right) (\psi \cos \psi - \sin \psi - \psi^2 \sin \psi) + \\ & + q_{z_0} \left( \frac{K^{out} B_0^3}{2EI} + \frac{B_0^3}{4GI} \right) (\psi \sin \psi + 2 \cos \psi - 2); \quad (23в) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W_y(\psi) = & w_{y_0} \cos \psi - u_0 \sin \psi + R\theta_{z_0} \sin \psi + \\ & + \frac{K^{in} B_0^2}{EI} \left[ - \left( K_{z_0} + \frac{I}{K^{in}} \left( \frac{N_0^{доп} (1+2\mu)}{FB_0} + \frac{PR}{2tB_0} \right) \right) (1 - \cos \psi) - \right. \\ & - B_0 m_{z_0} (\psi - \sin \psi) + Q_{y_0} B_0 \frac{\sin \psi - \psi \cos \psi}{2} - N_0^{доп} B_0 \frac{2 - 2 \cos \psi - \psi \sin \psi}{2} + \\ & \left. + q_{y_0} B_0^2 \frac{(4 - \psi^2) \cos \psi + 3\psi \sin \psi - 4}{4} - q_{x_0} B_0^2 \frac{(3 - \psi^2) \sin \psi - 3\psi \cos \psi}{4} \right] + \\ & + \frac{B_0}{EF} \left[ N_0^{доп} \frac{\psi \sin \psi}{2} + Q_{y_0} \frac{\sin \psi - \psi \cos \psi}{2} + q_{x_0} B_0 \frac{(\psi^2 - 1) \sin \psi + \psi \cos \psi}{4} + \right. \\ & \left. + q_{y_0} B_0 \frac{\psi \sin \psi - \psi^2 \cos \psi}{4} \right] - B_0 \left( \alpha_T \Delta T + \frac{RP(1-2\mu)}{2Et} \right) (1 - \cos \psi); \quad (23г) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W_z(\psi) = & w_{z_0} - R\theta_{y_0} \sin \psi + \varphi_0 B_0 (1 - \cos \psi) + \\ & + Q_{z_0} \left[ \frac{B_0^3}{2GI} (\sin \psi - \psi) + \left( \frac{K^{out} B_0^3}{2EI} + \frac{B_0^3}{4GI} \right) (\sin \psi - \psi \cos \psi) \right] + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + K_{y_0} \left[ -\frac{B_0^2}{2GI} - \left( \frac{K^{out} B_0^2}{2EI} - \frac{B_0^2}{4GI} \right) \cos \psi + \left( \frac{K^{out} B_0^2}{2EI} + \frac{B_0^2}{4GI} \right) (\cos \psi + \psi \sin \psi) \right] - \\
 & \quad - K_{x_0} \left[ \left( \frac{K^{out} B_0^2}{2EI} + \frac{B_0^2}{4GI} \right) (\sin \psi - \psi \cos \psi) \right] + \\
 & + m_{y_0} \left[ \left( \frac{K^{out} B_0^3}{8EI} - \frac{3B_0^3}{16GI} \right) (\sin \psi - \psi \cos \psi) + \left( \frac{K^{out} B_0^3}{8EI} + \frac{B_0^3}{16GI} \right) \psi^2 \sin \psi \right] + \\
 & + q_{z_0} \left[ \left( \frac{K^{out} B_0^4}{EI} + \frac{B_0^4}{GI} \right) - \left( \frac{K^{out} B_0^4}{2EI} + \frac{B_0^4}{4GI} \right) (2 \cos \psi + \psi \sin \psi) - \right. \\
 & \quad \left. - \frac{B_0^4}{2GI} \left( \frac{\psi^2}{2} + \cos \psi \right) \right]; \tag{23д}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 u(\psi) & = u_0 \cos \psi + w_{y_0} \sin \psi + B_0 \theta_{z_0} (1 - \cos \psi) + \\
 & + \frac{K^{in} B_0^2}{EI} \left[ - \left( K_{z_0} + \frac{I}{K^{in}} \left( \frac{N_0^{доп} (1 + 2\mu)}{FB_0} + \frac{PR}{2tB_0} \right) \right) (\psi - \sin \psi) - \right. \\
 & \quad \left. - m_{z_0} B_0 \left( \frac{\psi^2}{2} - 1 + \cos \psi \right) + Q_{y_0} B_0 \frac{2 - 2 \cos \psi - \psi \sin \psi}{2} - \right. \\
 & \quad \left. - N_0^{доп} B_0 \frac{2\psi + \psi \cos \psi - 3 \sin \psi}{2} + q_{y_0} B_0^2 \frac{9 \sin \psi - \psi^2 \sin \psi - 4\psi - 5\psi \cos \psi}{4} - \right. \\
 & \quad \left. - q_{x_0} B_0^2 \frac{8 + \psi^2 \cos \psi - 8 \cos \psi - 5\psi \sin \psi}{4} \right] - \frac{B_0}{EF} \left[ N_0^{доп} \frac{\psi \cos \psi + \sin \psi}{2} + \right. \\
 & + Q_{y_0} \frac{\psi \sin \psi}{2} + q_{x_0} B_0 \frac{\psi^2 \cos \psi + \psi \sin \psi}{4} + q_{y_0} B_0 \frac{\psi^2 \sin \psi - \psi \cos \psi + \sin \psi}{4} \left. \right] + \\
 & + B_0 \left( \alpha_T \Delta T + \frac{RP(1 - 2\mu)}{2Et} \right) \sin \psi. \tag{23е}
 \end{aligned}$$

Полученные уравнения (22), (23) записаны в удобном виде для использования их в методе начальных параметров. Для более четкой записи текущая угловая координата  $\theta$  заменена на  $\psi$ ; индекс 0 указывает на принадлежность данной величины началу рассматриваемого участка.

Проанализируем полученные уравнения для одного частного случая: нагружение замкнутой торообразной оболочки внутренним давлением и перепадом температур. В такой оболочке, очевидно, все перемещения и углы поворота, за исключением  $W_y$ , равны нулю. Из уравнения (23а) видно, что в каждом сечении возникает изгибающий момент  $K_z = -\frac{I}{K^{in}} \frac{PR}{2tB_0}$ , что приводит к номинальным продольным напряжениям  $\sigma_z = K_z \frac{R}{I} = \frac{PR}{2t} \frac{\alpha}{K^{in}}$ .

Интересно заметить, что эти напряжения положительны в точках, координата  $y$  которых отрицательна, т.е. в точках, более удаленных от центрагиба, и наоборот, отрицательны при положительных  $y$ . Это противоречит известным решениям для сплошного криволинейного бруса, растяжение которого приводит к большим напряжениям в точках, более близких к центру кривизны  $A$  (рисунок ) (например, задача Ламе для толстостенного цилиндра под внутренним давлением). Объяснить это можно так: при нагружении внутренним давлением растягивается не только гиб как стержень, что приводит к возникновению положительных моментов, но и расширяется его внутреннее сечение с образованием отрицательных моментов. Последний эффект по величине в два раза выше, чем первый.

**Заключение.** Настоящее сообщение использует и дополняет результаты двух предыдущих для определения упругих характеристик сеченийгиба трубы с учетом всех основных нагружающих факторов.

Выведены общие физические уравнения, относящиеся к перемещениям и углам поворота линии центра массгиба, при действии внутреннего давления, осевой силы и перепада температур. В этом случае возникают овализационные (оболочечные) явления, которые имеют порядок малости, пропорциональный  $\alpha^2$ .

Записана общая постановочная система уравнений для криволинейного элемента при его нагружении вышеперечисленными параметрами, изгибающими и крутящими моментами, включающая шесть физических уравнений и шесть уравнений равновесия.

Аналитически решены полученные дифференциальные уравнения для перемещений и углов поворота линии центра масс с учетом действия распределенных сил и моментов, а также давления и температуры. Уравнения записаны в удобном виде для использования их в методе начальных параметров, что позволяет рассматривать гиб как один расчетный элемент трубопроводной системы.

## Резюме

Розглянуто задачу про деформування криволінійної оболонки при навантаженні внутрішнім тиском, осьовою силою та перепадом температур. Отримано фізичні рівняння, що зв'язують переміщення і кути поворотів лінії центра мас поперечних перерізів оболонки з параметрами навантаження. Наведено загальну постановочну систему рівнянь для криволінійного елемента при його деформуванні. За допомогою методу початкових параметрів отримано аналітичний розв'язок диференціальних рівнянь для переміщень і кутів повороту лінії центрів з урахуванням дії розподілених сил і моментів.

1. *Pai F. P., Anderson T. J., and Wheeler E. A.* Large deformation tests and total-Lagrangian finite element analysis of flexible beams // *Int. J. Solids Struct.* – 2000. – **37**. – P. 2951 – 2980.
2. *Smolenski W. M.* Statically and kinematically exact nonlinear theory of rods and its numerical verification // *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.* – 1999. – **178**. – P. 89 – 113.
3. *Светлицкий В. А.* Механика стержней. Ч. 1: Статика. – М.: Высш. шк., 1987. – 320 с.
4. *Petrov E. and Geradin M.* Finite element theory for curved and twisted beams based on exact solutions for three-dimensional solids. Pt.1: Beam concept and geometrically exact nonlinear formulation // *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.* – 1998. – **165**. – P. 43 – 92.
5. *Karamanos S. A.* Bending instabilities of elastic tubes // *Int. J. Solids Struct.* – 2002. – **39**. – P. 2059 – 2085.
6. *Джанелидзе Г. Ю.* Соотношения Кирхгоффа для естественно закрученного стержня и их применение // *Тр. Ленингр. политехн. ин-та.* – 1946. – № 1. – С. 23 – 32.
7. *Parker D. E.* The role of Saint-Venant's solution in rod and beam theories // *Trans. ASME. J. Appl. Mech.* – 1977. – **46**. – P. 861 – 866.
8. *ASME B31.4.* Liquid Transportation Systems for Hydrocarbons, Liquid Petroleum Gas, Anhydrous Ammonia, and Alcohols. – New York, 1989. – 91 p.
9. *ПНФЭ Г-7-002-86.* Нормы расчета на прочность оборудования и трубопроводов атомных энергетических установок. – М.: Энергоатомиздат, 1989. – 525 с.
10. *Писаренко Г. С., Агарев В. А., Квитка А. Л. и др.* Соппротивление материалов. 4-е изд. – Киев: Вища шк., 1979. – 696 с.
11. *Костовецкий Д. Л.* Прочность трубопроводных систем энергетических установок. – Л.: Энергия, 1973. – 264 с.
12. *Аксельрад Э. Л., Ильин В. П.* Расчет трубопроводов. – Л.: Машиностроение, 1972. – 240 с.
13. *Орыняк И. В., Торон В. М., Ромащенко В. А., Жураховский С. В.* Расчет пространственного разветвленного трубопровода в программном комплексе оценки прочности оборудования АЭС // *Пробл. прочности.* – 1998. – № 2. – С. 87 – 100.
14. *Орыняк И. В., Радченко С. А.* Анализ деформаций гнба трубы на основе смешанного подхода. Сообщ. 2. Пространственный изгиб с учетом внутреннего давления // *Там же.* – 2004. – № 4. – С. 46 – 59.
15. *Орыняк И. В., Радченко С. А.* Анализ деформаций гнба трубы на основе смешанного подхода. Сообщ. 1. Пространственный изгиб по Сен-Венану // *Там же.* – № 3. – С. 23 – 51.
16. *Андреева Л. Е.* Упругие элементы приборов. – М.: Машгиз, 1962. – 391 с.

Поступила 27. 02. 2003