

## Численное исследование динамики многослойных толстостенных спирально-ортотропных цилиндров

В. А. Ромащенко, С. А. Тарасовская

Институт проблем прочности им. Г. С. Писаренко НАН Украины, Киев, Украина

*На основе двухмерного алгоритма Уилкинса разработан метод численного исследования динамики многослойных толстостенных цилиндрических оболочек с различной структурой спирального армирования. Тестовые расчеты хорошо согласуются с известными решениями. Исследованы особенности динамического поведения двухслойного цилиндра при различных схемах спирального армирования.*

**Ключевые слова:** ортотропия, динамика, спиральное армирование, цилиндрическая многослойная оболочка.

В настоящее время перспективность и преимущества применения композитных материалов в подвергающихся нестационарным воздействиям конструкциях (сосуды, корпуса или защитные сооружения, предназначенные для удержания в своей полости значительных гидро- либо газодинамических нагрузок, и пр.) хорошо известны [1–6]. Одним из наиболее значимых факторов, определяющих динамическую реакцию конструкции и ее несущую способность, является структура армирования материала. Большое распространение получили многослойные конструктивные элементы, состоящие из локально ортотропных слоев, армированных под определенными углами к осям цилиндрических координат  $x$ ,  $\varphi$ ,  $r$  [7].

Работы [8–10] посвящены экспериментальному исследованию влияния нескольких различных схем армирования многослойных стеклопластиковых цилиндрических оболочек на динамическую реакцию и прочность при внутреннем взрывном нагружении. Установлено, что структура армирования существенно влияет на реакцию, несущую способность и характер разрушения цилиндрических оболочек. Отмечена предпочтительность комбинированных структур армирования с чередованием кольцевых и спиральных слоев примерно равной толщины.

Известны теоретические исследования подобных конструкций для статических условий нагружения: например, в [7] численно-аналитически изучено напряженно-деформированное состояние (НДС) двухслойного полого цилиндра, подверженного действию давления на внешней поверхности. Слои цилиндра армированы волокнами, которые ориентированы под равными по величине и противоположными по знаку углами относительно продольной оси. Установлено [7, 11], что при исследовании НДС необходимо учитывать эффекты, обусловленные несовпадением главных направлений упругости с направлением координатных линий. В [12] в оболочечном приближении численно исследована осесимметричная динамика слоистой оболочки. Приведены результаты для цилиндрических оболочек, образованных из чередующихся спиральных и кольцевых слоев однонаправленного

стеклопластика при внутреннем импульсном давлении. Анализ полученных результатов показал, что, изменяя угол армирования и соотношение слоев, можно управлять напряженным состоянием оболочки.

Обзор литературных источников свидетельствует о том, что большая часть работ посвящена исследованию подобных конструкций для статических условий нагружения. Методы и результаты численных динамических расчетов толстостенных цилиндрически ортотропных тел вращения представлены в [13–16]. В [17] изложена методика вычисления собственных частот многослойных цилиндров со спиральной ортотропией для граничных условий типа Навье на торцах. Динамические задачи теории упругости о влиянии структуры армирования на НДС толстостенных многослойных полых цилиндрических тел, насколько известно авторам, не рассматривались.

Ранее [11] на основании двухмерного алгоритма Уилкинса была разработана численная методика исследования осесимметричного нестационарного НДС упругих однослойных толстостенных ортотропных цилиндрических оболочек с произвольным углом спирального армирования. Цель данной работы – обобщить эту методику на случай многослойных тел (слои могут быть изготовлены из различных материалов, угол спирального армирования каждого слоя – произвольный и постоянный в пределах слоя), провести тестирование метода, а также исследовать влияние различных схем армирования на НДС толстостенной двухслойной цилиндрической оболочки, подверженной осесимметричному импульсному воздействию.

Сформулируем математически задачу исследования (начало координат будем всегда располагать в центре симметрии цилиндра). Уравнения движения в цилиндрических координатах с учетом осевой симметрии и произвольного ( $-90\dots+90^\circ$ ) угла спирального армирования  $\alpha$  рассматриваемого слоя имеют вид

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{rx}}{\partial x} + \frac{\sigma_r - \sigma_\varphi}{r} = \rho \frac{du_r}{dt}; \\ \frac{\partial \tau_{rx}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\tau_{rx}}{r} = \rho \frac{du_x}{dt}; \\ \frac{\partial \tau_{r\varphi}}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{x\varphi}}{\partial x} + \frac{2\tau_{r\varphi}}{r} = \rho \frac{du_\varphi}{dt}, \end{cases} \quad (1)$$

где  $\rho$  – плотность материала слоя;  $\sigma_r, \sigma_\varphi, \sigma_x, \tau_{rx}, \tau_{r\varphi}, \tau_{x\varphi}$  – компоненты тензора напряжений;  $t$  – время;  $u_r, u_\varphi, u_x$  – компоненты вектора скорости перемещений.

Геометрические соотношения, выражающие тензор скоростей деформаций через вектор скорости перемещений, запишем следующим образом:

$$\begin{cases} \dot{\varepsilon}_r = \frac{\partial u_r}{\partial r}; & \dot{\varepsilon}_\varphi = \frac{u_r}{r}; & \dot{\varepsilon}_x = \frac{\partial u_x}{\partial x}; \\ \dot{\gamma}_{rx} = \frac{\partial u_r}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial r}; & \dot{\gamma}_{r\varphi} = \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} - \frac{u_\varphi}{r}; & \dot{\gamma}_{x\varphi} = \frac{\partial u_\varphi}{\partial x}. \end{cases} \quad (2)$$

Физические уравнения с учетом произвольного угла спирального армирования слоя  $\alpha$  представим в векторной форме:

$$d\{\sigma_x; \sigma_\varphi; \sigma_r; \tau_{x\varphi}; \tau_{\varphi r}; \tau_{rx}\} = C\{\dot{\epsilon}_x; \dot{\epsilon}_\varphi; \dot{\epsilon}_r; \dot{\gamma}_{x\varphi}; \dot{\gamma}_{\varphi r}; \dot{\gamma}_{rx}\} dt, \quad (3)$$

где  $C$  – квадратная матрица размерности  $6 \times 6$  симметрична ( $C_{ij} = C_{ji}$ ) и имеет следующие ненулевые компоненты [18]:

$$\begin{aligned} C_{12} &= B_{x\varphi} + (A_x + A_\varphi - 2B_{x\varphi} - 4G_{x\varphi}) \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha; \\ C_{44} &= G_{x\varphi} \cos^2 2\alpha + (A_x + A_\varphi - 2B_{x\varphi}) \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha; \\ C_{33} &= A_r; \\ \{C_{11}; C_{22}\} &= \{A_x; A_\varphi\} \cos^4 \alpha + \{A_\varphi; A_x\} \sin^4 \alpha + \{1; 1\} (0,5B_{x\varphi} + G_{x\varphi}) \sin^2 2\alpha; \\ \{C_{13}; C_{23}; C_{55}; C_{66}\} &= \{B_{rx}; B_{\varphi r}; G_{\varphi r}; G_{rx}\} \cos^2 \alpha + \\ &+ \{B_{\varphi r}; B_{rx}; G_{rx}; G_{\varphi r}\} \sin^2 \alpha; \\ \{C_{34}; C_{56}\} &= \{B_{\varphi r} - B_{rx}; G_{\varphi r} - G_{rx}\} \sin \alpha \cos \alpha; \\ \{C_{14}; C_{24}\} &= [\{A_\varphi; -A_x\} \sin^2 \alpha + \{-A_x; A_\varphi\} \cos^2 \alpha + \\ &+ \{1; -1\} (B_{x\varphi} + 2G_{x\varphi}) \cos 2\alpha] \sin \alpha \cos \alpha; \\ A_x &= E_x (1 - \nu_{\varphi r} \nu_{r\varphi}) / D; \\ B_{x\varphi} &= E_\varphi (\nu_{x\varphi} + \nu_{xr} \nu_{r\varphi}) / D; \\ D &= 1 - 2\nu_{x\varphi} \nu_{\varphi r} \nu_{rx} - \nu_{x\varphi} \nu_{\varphi x} - \nu_{\varphi r} \nu_{r\varphi} - \nu_{rx} \nu_{xr}, \end{aligned}$$

выражения для  $A_\varphi, A_r, B_{\varphi r}, B_{rx}$  получаются путем циклической перестановки индексов  $x, \varphi, r$ ;  $E_i, G_{ij}, \nu_{ij}$  ( $i, j = x, \varphi, r; i \neq j$ ) – технические характеристики упругости ортотропного материала в главных осях анизотропии при угле армирования  $\alpha = 0$ , т.е. в случае цилиндрически ортотропного тела ( $E_i$  – модули упругости;  $G_{ij}$  – модули сдвига;  $\nu_{ij}$  – коэффициенты Пуассона в соответствующих направлениях и плоскостях). При этом выполняются равенства [18]

$$E_i \nu_{ji} = E_j \nu_{ij} \quad (i \neq j), \quad (4)$$

и для реальных материалов  $D > 0$ .

Система уравнений (1)–(3) замыкается начальными, граничными и контактными условиями. Начальные условия полагались нулевыми, граничные – силовыми или кинематическими, контакт между слоями – идеальным. Несмотря на наличие всех компонент перемещений, напряжений и деформаций, краевая задача (1)–(3) будет осесимметричной в том смысле, что ни одна из ее переменных не будет зависеть от угловой координаты  $\varphi$  [7, 11].

Динамическая прочность оценивалась по критерию Ашкенази [6], который в главных осях анизотропии  $X, Y, Z$  имеет вид

$$\left\{ \begin{array}{l}
 \Phi \leq 1; \\
 \Phi = (c\sigma_X^2 + b\sigma_Y^2 + d\sigma_Z^2 + p\tau_{XY}^2 + a\tau_{YZ}^2 + s\tau_{ZX}^2 + \\
 \quad + n\sigma_X\sigma_Y + f\sigma_Y\sigma_Z + m\sigma_Z\sigma_X) / (\sigma_X^2 + \sigma_Y^2 + \sigma_Z^2 + \\
 \quad + \tau_{XY}^2 + \tau_{YZ}^2 + \tau_{ZX}^2 + \sigma_X\sigma_Y + \sigma_Y\sigma_Z + \sigma_Z\sigma_X)^{-1/2}; \\
 c = \frac{1}{[\sigma_{bX}]}; \quad b = \frac{1}{[\sigma_{bY}]}; \quad d = \frac{1}{[\sigma_{bZ}]}; \\
 p = \frac{1}{[\tau_{bXY}]}; \quad a = \frac{1}{[\tau_{bYZ}]}; \quad s = \frac{1}{[\tau_{bZX}]}; \\
 n = \frac{4}{[\sigma_{bXY}^{(45)}]} - b - p - c; \quad f = \frac{4}{[\sigma_{bYZ}^{(45)}]} - b - d - a; \\
 m = \frac{4}{[\sigma_{bZX}^{(45)}]} - d - s - c.
 \end{array} \right. \quad (5)$$

Здесь  $[\sigma_{bi}] = \frac{\sigma_{bi}}{k_b}$ ,  $[\tau_{bij}] = \frac{\tau_{bij}}{k_b}$ ,  $[\sigma_{bij}^{(45)}] = \frac{\sigma_{bij}^{(45)}}{k_b}$  ( $i, j = X, Y, Z; i \neq j$ ) – до-

пускаемые напряжения;  $k_b$  – коэффициент запаса прочности, где  $\sigma$  с нижним индексом “в” – величина опасного напряжения (предел прочности) при растяжении или сжатии в направлении оси, соответствующей второму нижнему индексу;  $\tau$  – то же при чистом сдвиге, при котором изменяется прямой угол между осями, обозначенными в индексе; индекс (45) соответствует пределу прочности в диагональном направлении (под углом  $45^\circ$  к осям симметрии), лежащем в плоскости, соответствующей нижним индексам. Для определенности далее будем направлять  $Y$  вдоль касательной к спирали армирования,  $X$  – по нормали к ней,  $Z$  – по бинормали (вдоль радиальной координаты).

Функция  $\Phi$  определяет область, напряжения на границе которой равны допускаемым. Таким образом, если условие  $\Phi \leq 1$  выполняется в каждой точке тела, то конструкция прочная, если же нарушается хотя бы в одной, то прочность не соблюдается.

Поскольку данный критерий приведен в системе координат, совпадающей с главными осями анизотропии, при вычислении напряжений, входящих в уравнение, необходимо воспользоваться известными формулами поворота тензора напряжений на соответствующий угол армирования [18].

На основании приведенных уравнений авторами разработан пакет прикладных программ (ППП) для осесимметричного двухмерного динамического численного расчета многослойных толстостенных цилиндрических оболочек вращения при произвольном угле армирования каждого слоя. Метод основан на явной по времени интегро-интерполяционной по пространству конечно-разностной схеме Уилкинса [11, 14–16].

Тестирование разработанного ППП проводили на примере статической линейной задачи при малых перемещениях и деформациях, которая численно аналитически решена в [7]. Рассматривался двухслойный цилиндр конеч-

ных размеров ( $R_2 = 1,1R_1$ ;  $L = 2R_1$ , где  $R_1$  – внутренний радиус,  $R_2$  – наружный,  $L$  – длина оболочки) под действием наружного давления  $\sigma_r|_{r=R_2} = -P_0 \cos^8(x\pi/L)$ , на торцах выполняются условия симметрии:  $u_x = u_\varphi = \partial u_r / \partial x = 0$  при  $x = \pm L/2$ . Слои имеют равную толщину и выполнены из одного материала, при этом угол спирального армирования внутреннего слоя составлял  $(+\alpha)$ , наружного  $(-\alpha)$ . Физико-механические характеристики композитного материала следующие:  $E_x = 5,7A$ ;  $E_\varphi = 1,4A$ ;  $E_r = 1,4A$ ;  $\nu_{x\varphi} = 0,277$ ;  $\nu_{\varphi r} = 0,4$ ;  $\nu_{rx} = 0,068$ ;  $G_{rx} = 0,575A$ ;  $G_{x\varphi} = 0,575A$ ;  $G_{\varphi r} = 0,5A$ ; угол армирования  $\alpha$  варьировался. При расчетах с помощью ППП полагали  $R_1 = 0,1$  м;  $P_0 = 1$  МПа;  $A = 10^3$  МПа;  $\rho = 2000$  кг/м<sup>3</sup>. Поскольку ППП предназначен для решения только нестационарных задач, для обеспечения условий нагружения, близких к статическим, временное изменение внешней нагрузки задавалось в виде функции

$$Q(t) = Q_0[H(t-T) + tT^{-1}H(T-t)],$$

где  $Q_0$  – амплитудное (стационарное) значение нагрузки;  $H(t)$  – функция Хевисайда; время нарастания нагрузки  $T$  задавалось равным 0,003 с; результаты выводились и осреднялись при  $t > 2T$ .

Данные сравнительного анализа представлены на рис. 1. Результаты, полученные с помощью предложенного ППП, хорошо совпадают с данными работы [7], что свидетельствует о его достаточно высокой точности.

С использованием разработанного ППП изучалась динамика двухслойной цилиндрической оболочки с одинаковой толщиной слоев, выполненной из одного материала, но с различными углами армирования  $\alpha$ . Торцы цилиндра и внешняя поверхность свободны от нагрузок. Нагружение проводилось импульсом внутреннего давления, вызванным подрывом в центре симметрии оболочки ( $x = 0$ ;  $r = 0$ ) сферического заряда. Граничное условие на внутренней поверхности имеет следующий вид:

$$\sigma_r|_{r=R_1} = -\sigma_0 R_1^3 l^{-3} H(la_0^{-1} - t), \quad (6)$$

где  $\sigma_0 = 186$  МПа;  $a_0 = 6310$  м/с;  $l = \sqrt{x^2 + R_1^2}$ . Механические характеристики упругости материала и прочностные свойства [6]:  $E_x = 14000$  МПа;  $E_\varphi = 57000$  МПа;  $E_r = 14000$  МПа;  $\nu_{x\varphi} = 0,068$ ;  $\nu_{\varphi r} = 0,277$ ;  $\nu_{rx} = 0,4$ ;  $G_{rx} = 5000$  МПа;  $G_{x\varphi} = 5750$  МПа;  $G_{\varphi r} = 5750$  МПа;  $\sigma_{BX} = 142$  МПа;  $\sigma_{BY} = 428$  МПа;  $\sigma_{BZ} = 412$  МПа;  $\tau_{BXY} = 82$  МПа;  $\tau_{BYZ} = 77$  МПа;  $\tau_{BZX} = 67,5$  МПа;  $\sigma_{BXY}^{(45)} = 164$  МПа;  $\sigma_{BYZ}^{(45)} = 154$  МПа;  $\sigma_{BZX}^{(45)} = 135$  МПа; плотность  $\rho = 1990$  кг/м<sup>3</sup>. Геометрические размеры оболочки следующие:  $R_1 = 0,1$  м;  $R_2 = 0,15$  м;  $L = 0,4$  м. Коэффициент запаса прочности  $k_b$  выбираем равным 1,1, поскольку данные расчеты – модельные. Оболочки примерно таких же размеров ( $R_1$  и  $L$ ) при нагрузке (6), выполненные из ана-

логичного материала, но более тонкие, рассматривались в [8–11], при этом в [8–10] экспериментально исследовались многослойные цилиндры с более сложными схемами укладки слоев, в [11] – численно исследовались однослойные оболочки.

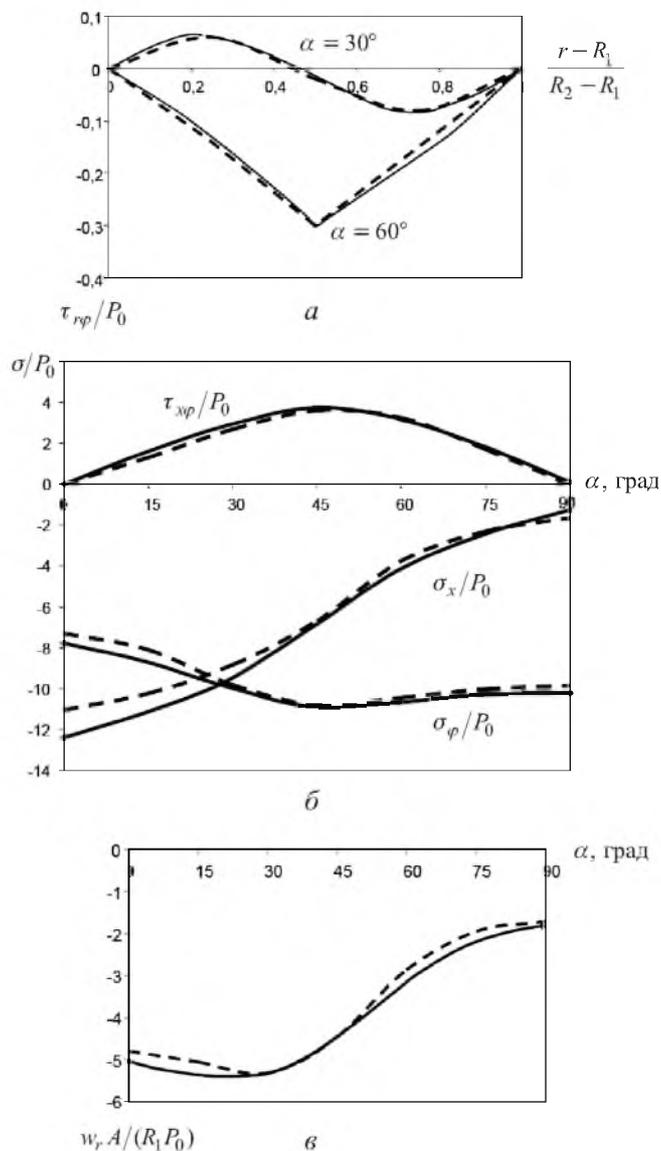


Рис. 1. Результаты тестовых расчетов: а – сечение  $x = L/10$ ; б, в – точка ( $x = 0$ ;  $r = R_2$ );  $w_r$  – радиальное перемещение (сплошные линии – данные работы [7], штриховые – с использованием ППП).

Рассматривались две схемы армирования:

- 1) симметричное: угол армирования внутреннего слоя составлял  $(+\alpha)$ , наружного –  $(-\alpha)$ ;
- 2) ортогональное: угол армирования внутреннего слоя составлял  $\alpha$ , наружного –  $(\alpha \pm 90^\circ)$ .

*Симметричное армирование.* Результаты расчетов при симметричном армировании представлены на рис. 2 (кривые 1) и рис. 3.

*Ортогональное армирование.* Результаты расчетов при ортогональном армировании приведены на рис. 2 (кривые 2) и на рис. 4, 5. На рис. 5 представлены колебания окружных напряжений  $\sigma_\varphi$  во внутренних центральных точках внутреннего (а) и наружного (б) слоев.

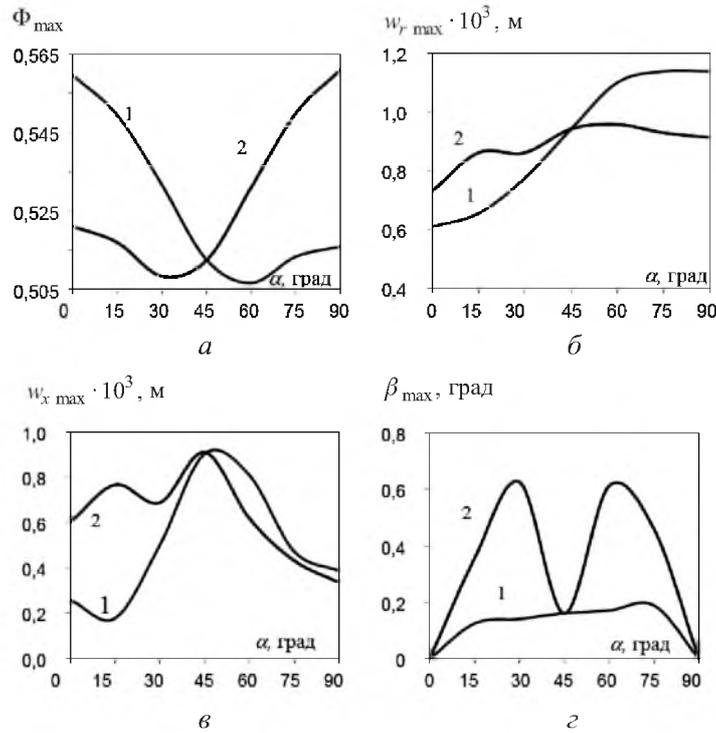


Рис. 2. Сравнительный анализ двух схем армирования:  $\Phi_{\max}$  – максимальное значение функции прочности  $\Phi$  из (5) в двухслойном теле за расчетное время ( $0 < t < 10^{-3}$  с);  $w_r \cdot 10^3$  – максимальное радиальное смещение точки внутренней поверхности ( $x = 0$ ;  $r = R_1$ ) за то же время;  $w_x \cdot 10^3$  – максимальное осевое смещение торцевой точки ( $x = L/2$ ;  $r = R_1$ ) за то же время;  $\beta_{\max}$  – максимальный угол закручивания одного торца относительно другого за то же время.

Сравнительный анализ полученных численных результатов свидетельствует о сложной нелинейной зависимости динамического НДС оболочки от схемы и угла армирования. С точки зрения динамической прочности оказалось, что при углах армирования до  $45^\circ$  более предпочтительной является ортогональная схема армирования, при углах армирования  $\alpha \in [45^\circ; 90^\circ]$  – симметричная (рис. 2,а). Зависимость амплитуды радиальных колебаний оболочки от  $\alpha$  при симметричном армировании оказывается более сильной, чем при ортогональном: варьируя  $\alpha$  при симметричном армировании, можно до двух раз увеличить (уменьшить) радиальные колебания цилиндра (рис. 2,б), максимумы и минимумы при этом реализуются при граничных углах армирования  $90^\circ$  и  $0$  соответственно. Что касается осевых колебаний, то при  $\alpha > 40^\circ$  их амплитуды при симметричной и ортогональной схемах

довольно близки, а при малых углах армирования ( $\alpha < 40^\circ$ ) симметричная схема обеспечивает значительно меньший уровень колебаний (с минимумом при  $\alpha \approx 15^\circ$ ) по сравнению с ортогональной (рис. 2,в).

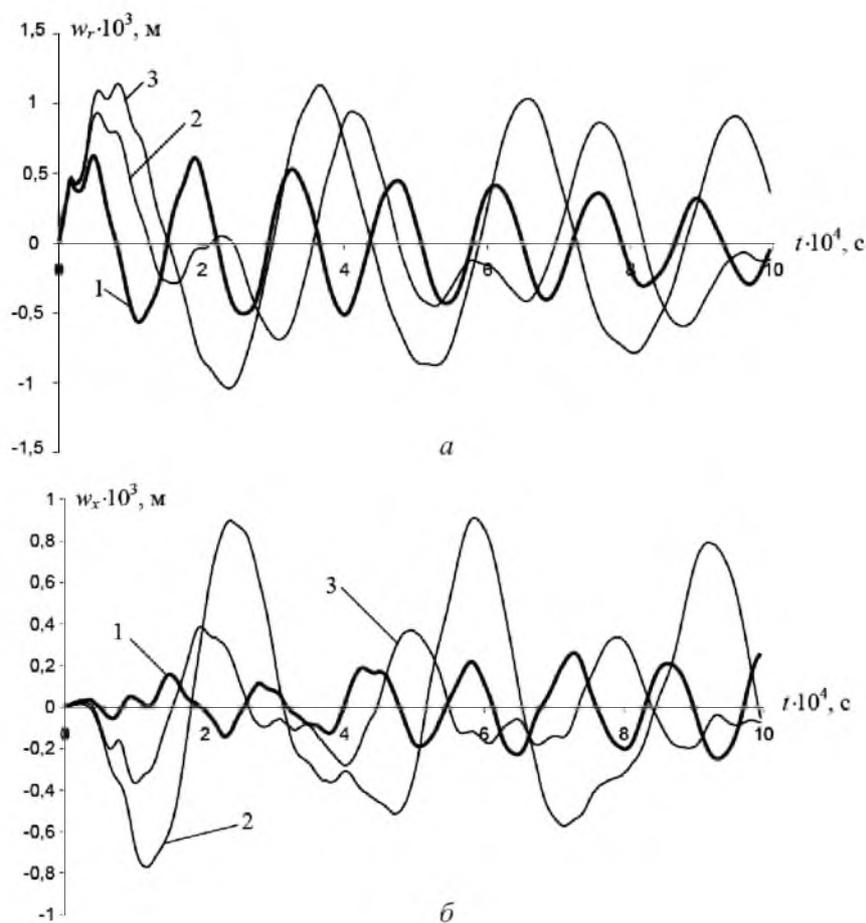


Рис. 3. Радиальные ( $x = 0, r = R_1$ ) – а и осевые ( $x = L/2, r = R_1$ ) – б колебания точек при симметричной схеме армирования: 1 –  $\alpha = 0^\circ$ ; 2 –  $\alpha = 45^\circ$ ; 3 –  $\alpha = 90^\circ$ .

Крутильные колебания при симметричном армировании проявляются довольно слабо. При ортогональной схеме амплитуды крутильных колебаний могут более чем в три раза превышать соответствующие величины при симметричной схеме. В этом случае наблюдается следующий эффект: при пограничных значениях  $\alpha$  (0 и  $90^\circ$ ) амплитуды крутильных колебаний тождественно равны нулю, при  $\alpha$ , близких к  $30^\circ$  и  $60^\circ$ , они максимальны и при  $45^\circ$  (симметричный случай) имеют явно выраженный локальный минимум (рис. 2,з).

При симметричном армировании радиальные колебания происходят без заметной “раскачки” (рис. 3,а). При  $\alpha$ , близких к пограничным значениям, характер колебаний квазигармонический, при  $\alpha \approx 45^\circ$  гармоничность явно нарушается. Осевые колебания максимальны при  $\alpha \approx 45^\circ$ , их характер квазигармонический с положительной постоянной составляющей (рис. 3,б).

При ортогональной схеме радиальные колебания при  $\alpha$ , близких к пограничным значениям, имеют небольшую раскачку [19] (рис. 4,*а*), их характер близок к гармоническому. С отклонением  $\alpha$  от пограничных значений гармоничность колебаний  $w_r$  нарушается. Относительно осевых колебаний (рис. 4,*б*) можно отметить приблизительно то же, что и в случае симметричного армирования, за исключением того, что при  $\alpha \in [0; 40^\circ]$  их амплитуда гораздо больше, чем при симметричной схеме.

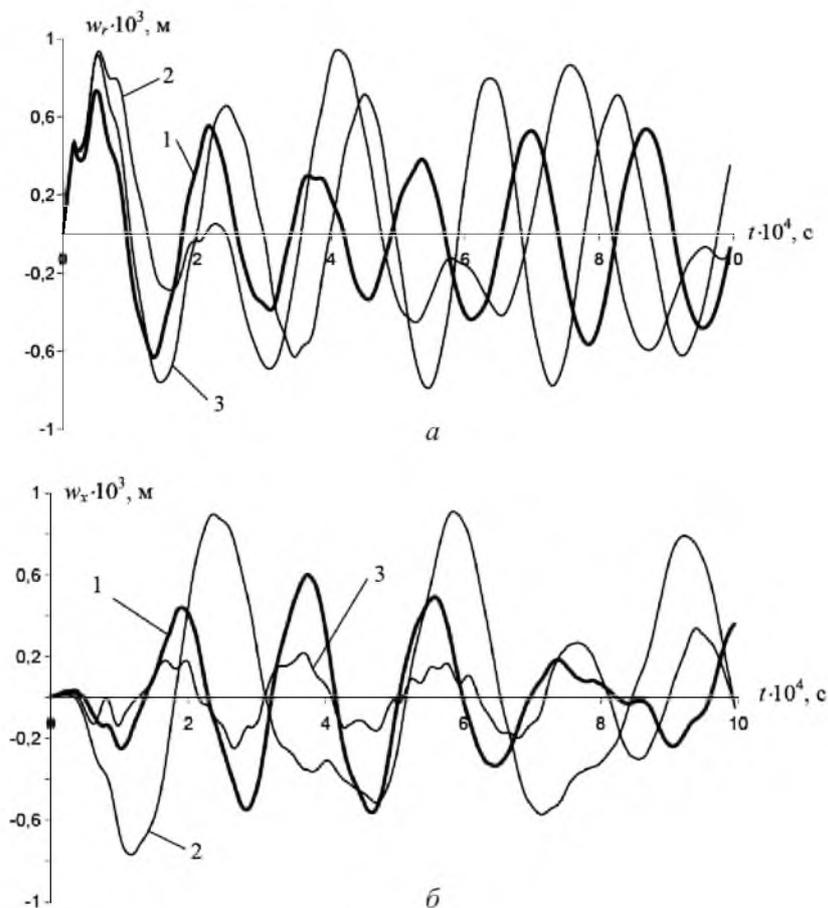


Рис. 4. Колебания при ортогональной схеме армирования. (Обозначения те же, что и на рис. 3.)

Рис. 5 иллюстрирует эффект раскачки, наблюдавшийся в некоторых схемах ортогонального армирования. Колебания окружных напряжений в центральном сечении двухслойного цилиндра ( $x = 0$ ) имеют явно просматривающуюся гармоническую огибающую: при  $\alpha = 0$  во внутреннем слое (на рис. 5,*а* кривая 1) и при  $\alpha = 90^\circ$  в наружном слое (на рис. 5,*б* кривая 3). Характерно, что если раскачка наблюдалась в одном (например, внутреннем) слое, то в другом (наружном) ее практически не было. При промежуточных  $\alpha$  эффект раскачки нивелировался. Для симметричных схем армирования этот эффект отсутствует.

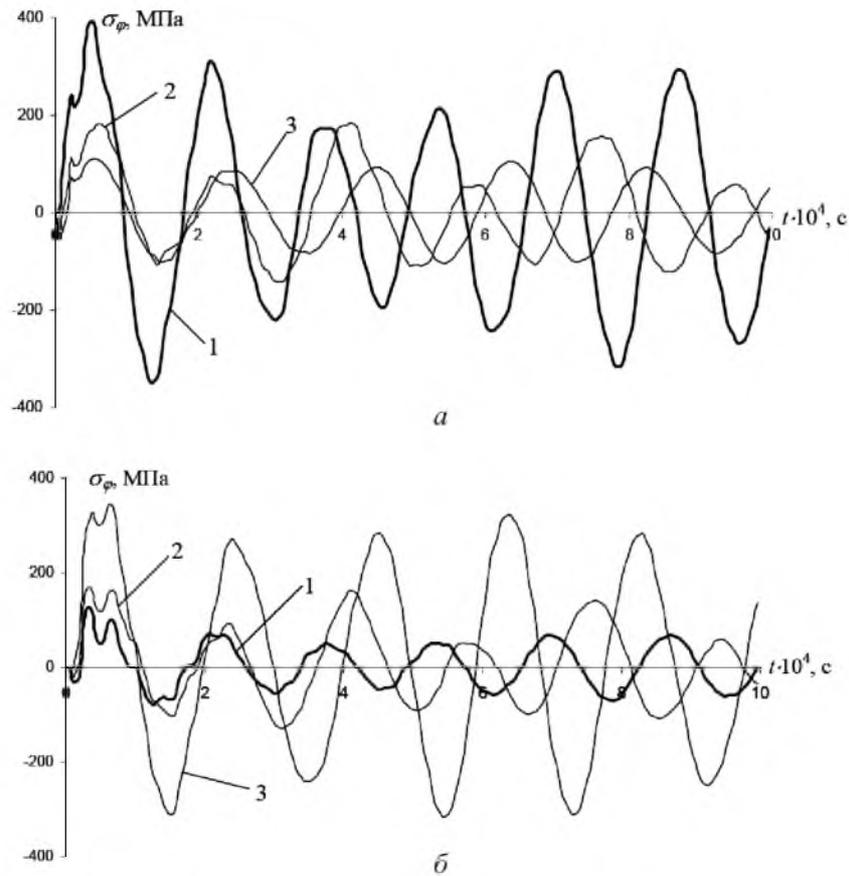


Рис. 5. Эффект раскачки: а -  $x = 0$ ,  $r = R_1$ ; б -  $x = 0$ ,  $r = \frac{R_1 + R_2}{2} + 0$  ( $1 - \alpha = 0^\circ$ ;  $2 - \alpha = 45^\circ$ ;  $3 - \alpha = 90^\circ$ ).

## Выводы

1. Разработан и отгестирован ППП для двухмерного расчета нестационарного осесимметричного НДС многослойных толстостенных упругих цилиндрических оболочек со спиральной ортотропией.

2. С помощью ППП исследованы особенности динамического поведения и прочности двухслойного цилиндра при ортогональной и симметричной схемах спирального армирования.

## Резюме

На базі двовимірного алгоритму Уїлкінса розроблено числовий метод дослідження динаміки багатослойних товстостінних циліндричних оболонок із різними структурами спірального армування. Тестові розрахунки добре узгоджуються з відомими рішеннями. Досліджено особливості динамічної поведінки двослойного циліндра за різних схем спірального армування.

1. Федоренко А. Г., Сырунин М. А., Иванов А. Г. Динамическая прочность оболочек из ориентированных волокнистых композитов при взрывном нагружении (обзор) // Прикл. механика и техн. физика. – 1993. – № 1. – С. 126 – 133.
2. Рыжанский В. А., Минеев В. Н., Иванов А. Г. и др. Разрушение цилиндрических стеклоэпоксидных оболочек, заполненных водой, при внутреннем импульсном нагружении // Механика полимеров. – 1978. – № 2. – С. 283 – 289.
3. Цыпкин В. И., Русак В. Н., Шитов А. Т., Иванов А. Г. Деформация и разрушение цилиндрических оболочек из стеклоэпоксида при внутреннем импульсном нагружении // Механика композитных материалов. – 1981. – № 2. – С. 249 – 255.
4. Рыжанский В. А., Русак В. Н., Иванов А. Г. Оценка взрывостойкости цилиндрических композитных оболочек // Физика горения и взрыва. – 1999. – 35, № 1. – С. 115 – 121.
5. Федоренко А. Г., Цыпкин В. И., Иванов А. Г. и др. Особенности динамического деформирования и разрушения цилиндрических стеклопластиковых оболочек при внутреннем импульсном нагружении // Механика композитных материалов. – 1983. – № 1. – С. 90 – 94.
6. Ашкенази Е. К., Ганов Э. В. Анизотропия конструкционных материалов: Справочник. – Л.: Машиностроение, 1980. – 247 с.
7. Григоренко Я. М., Василенко А. Т., Панкратова Н. Д. Задачи теории упругости неоднородных тел. – Киев: Наук. думка, 1991. – 216 с.
8. Федоренко А. Г., Сырунин М. А., Иванов А. Г. Влияние структуры армирования ориентированных стеклопластиков на прочность круговых цилиндрических оболочек при взрывном нагружении изнутри // Механика композитных материалов. – 1991. – № 4. – С. 631 – 640.
9. Федоренко А. Г., Сырунин М. А., Шитов А. Т. Прочность цилиндрических оболочек из стеклопластика различной структуры при нагружении взрывом // Физика горения и взрыва. – 1989. – 25, № 4. – С. 108 – 115.
10. Абакумов А. И., Низовцев П. Н., Соловьев В. П. и др. Расчетно-экспериментальное исследование напряженно-деформированного состояния композитных оболочек вращения при динамическом нагружении с учетом больших деформаций // Механика композитных материалов. – 1998. – № 1. – С. 28 – 37.
11. Лепихин П. П., Ромащенко В. А., Тарасовская С. А. Модификация метода Уилкинса для исследования динамики осесимметричных толсто-стенных оболочек с винтовой ортотропией // Пробл. прочности. – 2004. – № 2. – С. 13 – 20.
12. Васильев В. В., Сисаури В. И. Исследование динамического поведения композитных оболочек вращения, нагруженных внутренним давлением // Механика композитных материалов. – 1985. – № 1. – С. 73 – 78.

13. *Галиев Ш. У., Ромащенко В. А.* Нестационарная динамика и прочность полых вязкоупругих анизотропных многослойных цилиндров конечной длины // *Механика композитных материалов.* – 1984. – № 4. – С. 681 – 685.
14. *Галиев Ш. У., Ромащенко В. А.* Численное исследование трехмерных нелинейных волн в составных телах вращения // *Там же.* – 1989. – № 1. – С. 136 – 141.
15. *Лепихин П. П., Ромащенко В. А., Тарасовская С. А., Корбач В. Г.* Пределы применимости метода Уилкинса для исследования динамического напряженно-деформированного состояния анизотропных упругих осесимметричных оболочек // *Пробл. прочности.* – 2003. – № 1. – С. 76 – 86.
16. *Галиев Ш. У., Бабич Ю. Н., Жураховский С. В. и др.* Численное моделирование волновых процессов в органических средах. – Киев: Наук. думка, 1989. – 200 с.
17. *Механика композитов: В 12 т. – Т. 9. Динамика элементов конструкций.* – Киев: Наук. думка, 1999. – 400 с.
18. *Лехницкий С. Г.* Теория упругости анизотропного тела. – М.: Наука, 1977. – 416 с.
19. *Луговой П. З.* Динамика тонкостенных конструкций при нестационарных нагрузках // *Прикл. механика.* – 2001. – 37, № 5. – С. 44 – 73.

Поступила 05. 02. 2004