УДК 539.37

Моделирование затухающей памяти формы траектории в теории простых материалов с упругопластическим поведением. Сообщение 2. Бесконечно малые деформации

П. П. Лепихин

Институт проблем прочности им. Г. С. Писаренко НАН Украины, Киев, Украина

Для близких к пропорциональным и мало отличающихся от ненапряженной и недеформированной конфигурации процессов деформирования, в которых пластические деформации имеют место сразу после приложения нагрузки и монотонно увеличиваются при деформировании, разработана математическая теория строгого построения и специализации определяющих соотношений упрочняющихся упругопластических материалов с затухающей памятью формы траектории первого порядка. Деформации – бесконечно малые. Тип симметрии материала – произвольный. Использованы построенные ранее автором определяющие соотношения линейной теории упругопластичности для конечных деформаций. Принято условие малости мер деформации в течение всего "прошлого". Особое внимание уделено изотропным материалам. Установлены условия приведения построенных соотношений к одному из вариантов эндохронной теории пластичности.

Ключевые слова: рациональная механика континуума, определяющее соотношение, активное деформирование, простой упругопластический материал, бесконечно малые деформации, анизотропия, затухающая память формы траектории, эндохронная теория пластичности.

Ранее [1] предложена математическая теория строгого построения и специализации общих определяющих соотношений простых по Ноллу упрочняющихся упругопластических материалов с затухающей памятью формы траектории, в которых пластические деформации имеют место сразу после приложения нагрузки и монотонно увеличиваются в процессе деформирования. Деформации и тип симметрии материала – произвольные. Для близких к пропорциональным и мало отличающихся от ненапряженной и недеформированной конфигурации непрерывных кусочно-непрерывно дифференцируемых процессов деформирования построены физические уравнения материалов, которые не обладают памятью формы траектории, со слабой затухающей памятью, с затухающей памятью n-го порядка. На основе построенных определяющих соотношений получены зависимости для конечных деформаций изотропных материалов.

В настоящей работе с использованием физических уравнений линейной теории упругопластичности при конечных деформациях [1] посредством принятия условия малости мер деформации в течение всего "прошлого" для двух отмеченных выше процессов деформирования разработана математическая теория строгого построения и специализации определяющих соотношений упрочняющихся упругопластических материалов с затухающей памятью формы траектории первого порядка для бесконечно малых деформаций. Тип симметрии материала – произвольный. Особое внимание уделено изотропным материалам. Определены условия приведения построенных соотношений к одному из вариантов эндохронной теории пластичности.

В качестве исходного соотношения выберем следующее [1]:

$$\mathbf{T}(\xi)=\mathbf{g}(\mathbf{C}(\xi))+\int_0^{\xi} h(\eta)\underline{\mathbf{K}}(\mathbf{C}(\xi),\eta)[\mathbf{C}^{\xi}(\eta)-\mathbf{C}_p^{\xi}(\eta)]d\eta+\mathbf{o}(\|\mathbf{C}^{\xi}(\eta)-\mathbf{C}_p^{\xi}(\eta)\|). \quad (1)$$

Здесь $\mathbf{T}$ – тензор напряжений Коши; $\mathbf{g}$ – тензорная функция тензорного аргумента; $\mathbf{C}$ – правый тензор Коши–Грина; h – забыватель, или функция влияния; ядро $\underline{\mathbf{K}}$ – тензор четвертого ранга,

$$\int_0^{\infty} \left|\underline{\mathbf{K}}(\mathbf{C}(\xi),\eta)\right|^2 d\eta<\infty; \quad (2)$$

ξ – длина дуги траектории тензора деформаций Грина второго типа $\mathbf{E}= =0{,}5(\mathbf{C}-\mathbf{1})$ в конце процесса деформирования; $\mathbf{1}$ – единичный тензор; $\eta=\xi-\xi'$ $(0\le\eta\le\xi)$; ξ' – длина дуги траектории тензора $\mathbf{E}$ в прошлом для материальной точки $\mathbf{X}$, определяемая так:

$$\xi'(\tau)=\int_{-\infty}^{\tau}\left|\dot{\mathbf{E}}(\tau')\right|d\tau'=\int_{t_0}^{\tau}\left|\dot{\mathbf{E}}(\tau')\right|d\tau', \quad (3)$$

где $\left|\dot{\mathbf{E}}\right|=\sqrt{tr(\dot{\mathbf{E}}\dot{\mathbf{E}}^{\mathrm{T}})}$ – норма тензора $\dot{\mathbf{E}}$; $tr\mathbf{A}$ – след некоторого тензора $\mathbf{A}$; $\|\ \|$ и $|\ |$ – полунорма и норма соответственно [2].

При записи (3) предполагалось, что все процессы деформирования начинаются в некоторый момент времени t_0 из ненапряженного и недеформированного начального состояния κ_0, при $t<t_0$ материал находится в таком же начальном состоянии. При этом $\xi'=0$, если $\tau\le t_0$, и $\xi'=\xi$, если $\tau=t$. (Здесь и далее верхний индекс "т" обозначает транспонированный тензор.)

В уравнении (1) ошибка $\mathbf{o}(\|\mathbf{C}^{\xi}(\eta)-\mathbf{C}_p^{\xi}(\eta)\|)$ стремится к нулю быстрее, чем запоминание $\|\mathbf{C}^{\xi}(\eta)-\mathbf{C}_p^{\xi}(\eta)\|$ разности между истинной историей $\mathbf{C}^{\xi}=\mathbf{C}^{\xi}(\eta)=\mathbf{C}(\xi-\eta)$ и соответствующей историей пропорционального деформирования $\mathbf{C}_p^{\xi}=\mathbf{C}_p^{\xi}(\eta)=\mathbf{C}_p(\xi-\eta)$; ξ – фиксировано, $\eta\ge 0$. Здесь и далее нижний индекс "p" обозначает, что соответствующий объект относится к процессам пропорционального деформирования, когда [1]

$$\mathbf{C}_p^{\xi_p}=\mathbf{1}+\frac{\xi_p-\eta_p}{\xi_p}(\mathbf{C}_p(\xi_p)-\mathbf{1}), \qquad \mathbf{R}_p^{\xi_p}=\mathbf{1}, \qquad 0\le\eta_p\le\xi_p, \quad (4)$$

где $\xi_p=\frac{1}{2}\left|\mathbf{C}_p(\xi_p)-\mathbf{1}\right|$.

Уравнение (1) справедливо для процессов чистого растяжения без вращения, когда история изменения тензора поворота $\mathbf{R}^{\xi} = \mathbf{1}$. Отметим, что $\mathbf{C} = \mathbf{F}^{\mathrm{T}}\mathbf{F}$; $\mathbf{F} = \mathbf{RU}$ – градиент деформации ($\mathbf{U}$ – правый тензор растяжения).

Для произвольных процессов деформирования, как следует из данных [1, 2], тензор напряжений Коши на основе (1) может быть определен следующим образом:

$$\mathbf{T}(\xi) = \mathbf{R}(\xi)\Big\{\mathbf{g}(\mathbf{C}(\xi)) + \int_0^{\xi} h(\eta)\underline{\mathbf{K}}(\mathbf{C}(\xi),\eta)[\mathbf{C}^{\xi}(\eta) - \mathbf{C}_p^{\xi}(\eta)]d\eta +$$

$$+ \mathbf{o}(\left\|\mathbf{C}^{\xi}(\eta) - \mathbf{C}_p^{\xi}(\eta)\right\|)\Big\} \mathbf{R}^{\mathrm{T}}(\xi). \tag{5}$$

При разработке теории бесконечно малых деформаций упругопластических материалов с затухающей памятью формы траектории с помощью уравнения (1) аналогично, как это сделано для вязкоупругих материалов [2], будем строить семейства смещений, которые соответствуют малым мерам деформации в течение всего прошлого. Полагаем

$$\mathbf{H} \equiv \nabla\mathbf{u} = \mathbf{F} - \mathbf{1}; \tag{6}$$

$$\widetilde{\mathbf{E}} \equiv \frac{1}{2}(\mathbf{H} + \mathbf{H}^{\mathrm{T}}); \qquad \widetilde{\mathbf{R}} \equiv \frac{1}{2}(\mathbf{H} - \mathbf{H}^{\mathrm{T}}), \tag{7}$$

где $\mathbf{u}$ – вектор перемещения; $\widetilde{\mathbf{E}}$ и $\widetilde{\mathbf{R}}$ – тензоры бесконечно малых деформации и поворота.

Через ε обозначим наименьшую верхнюю грань норм градиента смещения $\mathbf{H}$, соответствующих всем деформациям, которым подвергался материал:

$$\varepsilon \equiv \sup_{\eta \geq 0}\left|\mathbf{H}^{\xi}(\eta)\right|. \tag{8}$$

Рассмотрим семейства историй градиента при $\varepsilon \to 0$. С использованием данных [2] можно показать, что

$$\mathbf{C}^{\xi}(\eta) - \mathbf{C}_p^{\xi}(\eta) = 2[\widetilde{\mathbf{E}}(\xi - \eta) - \widetilde{\mathbf{E}}_p(\xi - \eta)] + \mathbf{0}(\varepsilon^2) = \mathbf{0}(\varepsilon). \tag{9}$$

Таким образом, $\left\|\mathbf{C}^{\xi}(\eta) - \mathbf{C}_p^{\xi}(\eta)\right\| = \mathbf{0}(\varepsilon)$ при $\varepsilon \to 0$. Подставив (9) в (1), получим

$$\mathbf{T}(\xi) \equiv \mathbf{g}(\mathbf{C}(\xi)) + 2\int_0^{\xi} h(\eta)\underline{\mathbf{K}}(\mathbf{C}(\xi),\eta)[\widetilde{\mathbf{E}}(\xi - \eta) - \widetilde{\mathbf{E}}_p(\xi - \eta)]d\eta + \mathbf{o}(\varepsilon). \tag{10}$$

В случае бесконечно малых деформаций можно показать, что замена $\mathbf{C}$ на $\mathbf{1}$ в $\underline{\mathbf{K}}(\mathbf{C}(\xi),\eta)$ приводит к ошибке порядка $\mathbf{o}(\varepsilon)$ [3]. Учитывая это, а также связь правого тензора Коши–Грина с тензором бесконечно малой деформации в виде

$$\mathbf{C}(\xi)=\mathbf{1}+2\widetilde{\mathbf{E}}(\xi)+\mathbf{0}(\varepsilon^2)=\mathbf{1}+\mathbf{0}(\varepsilon), \tag{11}$$

соотношение (10) можно преобразовать следующим образом:

$$\mathbf{T}(\xi)=\mathbf{g}(\widetilde{\mathbf{E}}(\xi))+2\int_0^{\xi} h(\eta)\underline{\mathbf{K}}(\mathbf{1},\eta)[\widetilde{\mathbf{E}}(\xi-\eta)-\widetilde{\mathbf{E}}_p(\xi-\eta)]\,d\eta+\mathbf{o}(\varepsilon). \tag{12}$$

В отличие от работы [2], где для получения определяющего соотношения теории бесконечно малых деформаций вязкоупругого тела использовалась линеаризация функции $\mathbf{g}$, описывающей упругое поведение, при записи (12) в силу физической нелинейности поведения упругопластического материала, в том числе и при пропорциональном деформировании, которое здесь этот член описывает, подобная линеаризация не может быть применена.

Введем обозначение:

$$\underline{\mathbf{M}}(\eta)=-2\int_{\eta}^{\infty} h(z)\underline{\mathbf{K}}(\mathbf{1},z)\,dz; \qquad \dot{\underline{\mathbf{M}}}(\eta)=\frac{d}{d\eta}\underline{\mathbf{M}}(\eta)=2h(\eta)\underline{\mathbf{K}}(\mathbf{1},\eta), \tag{13}$$

где $\underline{\mathbf{M}}(\eta)$ – функция забывания.

С учетом разрывности тензорной функции $\underline{\mathbf{M}}(\xi)$ при $\xi=0$ и данных [4] можем записать

$$d\underline{\mathbf{M}}(\eta)=\dot{\underline{\mathbf{M}}}(\eta)d\eta+\underline{\mathbf{M}}(\eta)\delta(\eta-0)d\eta, \tag{14}$$

где δ – δ-функция Дирака.

Учитывая, что в рамках теории бесконечно малых деформаций соотношение (4) при принятой параметризации принимает вид

$$\widetilde{\mathbf{E}}_p(\xi-\eta)=\left(1-\frac{\eta}{\xi}\right)\widetilde{\mathbf{E}}_p(\xi)+\mathbf{0}(\varepsilon^2), \qquad 0\le\eta\le\xi, \tag{15}$$

и, используя (14), соотношение (12) можно представить так:

$$\mathbf{T}(\xi)=\mathbf{g}(\widetilde{\mathbf{E}}(\xi))+\int_0^{\xi} d\underline{\mathbf{M}}(\eta)\left[\widetilde{\mathbf{E}}(\xi-\eta)-\left(1-\frac{\eta}{\xi}\right)\widetilde{\mathbf{E}}(\xi)\right]+\mathbf{o}(\varepsilon). \tag{16}$$

При построении (16) учитывалось, что $\widetilde{\mathbf{E}}_p(\xi)=\widetilde{\mathbf{E}}(\xi)$.

Другую форму соотношений, определяющих напряжения, можно получить из (16) заменой переменной $\tau=\xi-\eta$ и интегрированием по частям:

$$\mathbf{T}(\xi)=\mathbf{g}(\widetilde{\mathbf{E}}(\xi))-\frac{1}{\xi}\int_0^\xi \underline{\mathbf{M}}(\xi-\tau)[\widetilde{\mathbf{E}}(\xi)]d\tau+\int_0^\xi \underline{\mathbf{M}}(\xi-\tau)\left[\frac{d\widetilde{\mathbf{E}}(\tau)}{d\tau}d\tau\right]+\mathbf{o}(\varepsilon). \quad (17)$$

В случае $\underline{\mathbf{M}}=\mathbf{0}$ соотношения (16), (17) сводятся, если отбросить поправочные члены, к реакции упругопластического материала при пропорциональном деформировании.

Большой практический интерес представляют изотропные формы упругопластических соотношений между напряжениями и деформациями. В этом случае нелинейная $\mathbf{g}(\widetilde{\mathbf{E}}(\xi))$ и линейная $\underline{\mathbf{M}}[\,]$ тензорные функции – изотропные.

Каждая линейная изотропная тензорная функция $\underline{\mathbf{L}}[\mathbf{A}]$ согласно [3] может быть представлена в виде

$$\underline{\mathbf{L}}[\mathbf{A}]=\mu_0(tr\mathbf{A})\mathbf{1}+\mu_1\mathbf{A} \quad (18)$$

(μ_0, μ_1 – константы), нелинейная изотропная тензорная функция $\overline{\mathbf{g}}(\widetilde{\mathbf{E}}(\xi))$ в соответствии с [2] –

$$\overline{\mathbf{g}}(\widetilde{\mathbf{E}}(\xi))=\varphi_1\mathbf{1}+\varphi_2\widetilde{\mathbf{E}}(\xi)+\varphi_3\widetilde{\mathbf{E}}^2(\xi), \quad (19)$$

где

$$\varphi_1=\varphi_i(\varepsilon_0=tr\widetilde{\mathbf{E}}(\xi),\ tr\widetilde{\mathbf{E}}^2(\xi),\ tr\widetilde{\mathbf{E}}^3(\xi)), \qquad i=1,\dots,3. \quad (20)$$

С использованием (18) и (19), отбросив поправочный член, из (17) получим

$$\mathbf{T}(\xi)=\varphi_1\mathbf{1}+\varphi_2\widetilde{\boldsymbol{E}}(\xi)+\varphi_3\widetilde{\mathbf{E}}^2(\xi)-\frac{\varepsilon_0(\xi)}{\xi}\int_0^\xi \mu_0(\xi-\tau)d\tau\mathbf{1}-$$

$$-\frac{1}{\xi}\int_0^\xi \mu_1(\xi-\tau)d\tau\widetilde{\mathbf{E}}(\xi)+\int_0^\xi \mu_0(\xi-\tau)tr\frac{d\widetilde{\mathbf{E}}(\tau)}{d\tau}d\tau\mathbf{1}+\int_0^\xi \mu_1(\xi-\tau)\frac{d\widetilde{\mathbf{E}}(\tau)}{d\tau}d\tau. \quad (21)$$

Разложив тензоры напряжений и бесконечно малых деформаций в соотношении (21) на шаровую и девиаторную составляющие и приравняв соответствующие составляющие в правой и левой части полученного соотношения, запишем

$$\mathbf{s}(\xi)=\overline{\varphi}_2\mathbf{e}(\xi)+\varphi_3\left(\mathbf{e}^2(\xi)-\frac{1}{3}(tr\mathbf{e}^2(\xi))\mathbf{1}\right)-\frac{1}{\xi}\int_0^\xi \mu_1(\xi-\tau)d\tau\mathbf{e}(\xi)+$$

$$+\int_0^\xi \mu_1(\xi-\tau)\frac{d\mathbf{e}(\tau)}{d\tau}d\tau=\overline{\varphi}_2\mathbf{e}(\xi)+\varphi_3\left(\mathbf{e}^2(\xi)-\frac{2}{3}(I_{2_e}(\xi))\mathbf{1}\right)-$$

$$-\frac{1}{\xi}\int_0^{\xi}\mu_1(\xi-\tau)d\tau\mathbf{e}(\xi)+\int_0^{\xi}\mu_1(\xi-\tau)\frac{d\mathbf{e}(\tau)}{d\tau}d\tau; \tag{22}$$

$$T_0(\xi)=tr\mathbf{T}(\xi)=3\varphi_1+\varphi_2\varepsilon_0+\varphi_3\left(tr\mathbf{e}^2(\xi)+\frac{1}{3}\varepsilon_0^2(\xi)\right)-$$

$$-\frac{3\varepsilon_0(\xi)}{\xi}\int_0^{\xi}\overline{\mu}_0(\xi-\tau)d\tau+3\int_0^{\xi}\overline{\mu}_0(\xi-\tau)\frac{d\varepsilon_0(\tau)}{d\tau}d\tau, \tag{23}$$

где

$$\overline{\varphi}_2=\varphi_2+\frac{2}{3}\varphi_3\varepsilon_0; \tag{24}$$

$\mathbf{e}=\widetilde{\mathbf{E}}-\frac{1}{3}\varepsilon_0\mathbf{1}$ – девиатор тензора бесконечно малых деформаций (далее – девиатор деформаций); тензор $\frac{1}{3}\varepsilon_0\mathbf{1}$ представляет собой шаровую составляющую тензора деформации, скаляр $\frac{1}{3}\varepsilon_0$ – среднюю деформацию;

$$\overline{\mu}_0=\frac{1}{3}[3\mu_0+2\widetilde{\mu}_1]; \tag{25}$$

$$\widetilde{\mu}_1=\frac{\mu_1}{2}; \tag{26}$$

$\mathbf{s}=\mathbf{T}-\frac{1}{3}T_0\mathbf{1}$ – девиатор напряжений; I_{2_e} – второй инвариант девиатора деформаций; тензор $\frac{1}{3}T_0\mathbf{1}$ представляет собой шаровую составляющую тензора напряжений, скаляр $\frac{1}{3}T_0$ – среднее напряжение.

При выполнении условия (8) не различают отсчетную, разгруженную и актуальную конфигурации, и, как следует, например, из [5], с точностью до бесконечно малых второго порядка малости в упругопластическом материале полные деформации можно разделить так:

$$\widetilde{\mathbf{E}}=\widetilde{\mathbf{E}}^e+\widetilde{\mathbf{E}}^p, \tag{27}$$

где $\widetilde{\mathbf{E}}^e$ и $\widetilde{\mathbf{E}}^p$ – тензоры бесконечно малых упругих и пластических деформаций соответственно; здесь и далее верхние индексы “e” и “p” обозначают упругие и пластические составляющие объекта.

Применив разложение тензоров в уравнении (27) на девиаторные и шаровые составляющие и приравняв соответствующие составляющие в правой и левой части, получим

$$\mathbf{e} = \mathbf{e}^{e} + \mathbf{e}^{p}; \tag{28}$$

$$\varepsilon_0 = \varepsilon_0^e + \varepsilon_0^p. \tag{29}$$

В общем случае при деформировании реальных материалов с упругопластическим поведением [6] имеем

$$\varepsilon_0^e \neq 0; \tag{30}$$

$$\varepsilon_0^p \neq 0. \tag{31}$$

Для несжимаемого в разгруженном состоянии (пластически несжимаемого) упругопластического материала запишем

$$\varepsilon_0^p = 0. \tag{32}$$

Тогда из соотношения (29) получим

$$\varepsilon_0 = \varepsilon_0^e. \tag{33}$$

При этом

$$\widetilde{\mathbf{E}}^{p} = \mathbf{e}^{p}. \tag{34}$$

Как следует из (34), тензор пластических деформаций является девиатором.

С учетом данных [2] при достаточно малых деформациях любых упругопластических материалов можно принять, что упругая составляющая тензора полных деформаций связана с тензором напряжений законом Гука. Тогда

$$\mathbf{s} = 2\widetilde{G}\mathbf{e}^{e}; \tag{35}$$

$$T_0 = 3\widetilde{K}\varepsilon_0^e, \tag{36}$$

где $\widetilde{G}$ и $\widetilde{K}$ – зависящие от пластической деформации модули сдвига и объемного сжатия. Причем при нулевом значении тензора упругих деформаций тензор напряжений также нулевой, что следует из определений разгруженной конфигурации и тензора упругих деформаций.

При записи (35) и (36) полагали, что в процессе деформирования упругопластических материалов сохраняется изотропия упругих свойств с изменением последних в процессе активного деформирования. Зависимость упругих свойств ряда материалов с упругопластическим поведением от пластической деформации обнаружена экспериментально [7–9]. Систематические исследования влияния пластической деформации на упругие свойства материала в настоящее время отсутствуют.

Если пренебречь зависимостью упругих свойств от пластической деформации, то из (35), (36) получим

$$\mathbf{s} = 2G\mathbf{e}^{e}; \tag{37}$$

$$T_0 = 3K\varepsilon_0^{e}, \tag{38}$$

где G и K – не зависящие от пластической деформации модули сдвига и объемного сжатия.

Примем, что средняя деформация не влияет на девиатор напряжений, а девиатор деформаций – на среднее напряжение. Как отмечалось, например, в [10], для малых средних деформаций материалов, проявляющих упругопластическое поведение, такое предположение получило экспериментальное подтверждение в широком диапазоне изменения средних напряжений.

Тогда физическое уравнение (22) можно записать так:

$$\mathbf{s}(\xi) = \widetilde{\varphi}_2\mathbf{e}(\xi) + \widetilde{\varphi}_3\left(\mathbf{e}^2(\xi) - \frac{2}{3}(I_{2_e}(\xi))\mathbf{1}\right) -$$

$$-\frac{1}{\xi}\int_0^{\xi}\mu_1(\xi-\tau)d\tau\mathbf{e}(\xi) + \int_0^{\xi}\mu_1(\xi-\tau)\frac{d\mathbf{e}(\tau)}{d\tau}d\tau, \tag{39}$$

где $\widetilde{\varphi}_2$ и $\widetilde{\varphi}_3$ определяются инвариантами

$$tr\mathbf{e}^2(\xi),\ tr\mathbf{e}^3(\xi), \tag{40}$$

уравнение (23) – в виде

$$T_0(\xi) = 3\widehat{\varphi}_1 + \widehat{\varphi}_2\varepsilon_0(\xi) + \frac{1}{3}\widehat{\varphi}_3\varepsilon_0^2(\xi) -$$

$$-\frac{3\varepsilon_0(\xi)}{\xi}\int_0^{\xi}\overline{\mu}_0(\xi-\tau)d\tau + 3\int_0^{\xi}\overline{\mu}_0(\xi-\tau)\frac{d\varepsilon_0(\tau)}{d\tau}d\tau \tag{41}$$

($\widehat{\varphi}_i$ $(i = 1, \ldots, 3)$ зависят только от $\varepsilon_0(\xi)$).

Отметим, что для ненапряженной и недеформированной отсчетной конфигурации

$$\varepsilon_0(0) = 0, \qquad T_0(0) = 0. \tag{42}$$

С целью дальнейшего упрощения определяющих соотношений предположим, что особенностью тензорного пространства, связанной с произведением тензоров [11], при построении определяющих соотношений можно пренебречь. Тогда уравнение (39) примет вид

$$\mathbf{s}(\xi)=\breve{\varphi}_2\mathbf{e}(\xi)-\frac{1}{\xi}\int_0^{\xi}\mu_1(\xi-\tau)d\tau\mathbf{e}(\xi)+\int_0^{\xi}\mu_1(\xi-\tau)\frac{d\mathbf{e}(\tau)}{d\tau}d\tau=$$

$$=\varphi'_2\mathbf{e}(\xi)+\int_0^{\xi}\mu_1(\xi-\tau)\frac{d\mathbf{e}(\tau)}{d\tau}d\tau, \tag{43}$$

где $\breve{\varphi}_2$ зависит от $tr\mathbf{e}^2(\xi)$; $\varphi'_2=\breve{\varphi}_2-\frac{1}{\xi}\int_0^{\xi}\mu_1(\xi-\tau)d\tau.$

Уравнение (43) с определяемым инвариантом $tr\,\mathbf{e}^2(\xi)$ коэффициентом, как следует из [12], в случае независимости девиатора напряжений $\mathbf{s}(\xi)$ от ε_0 справедливо также, когда напряжения в упругопластическом материале зависят от особенностей тензорного пространства, связанных с произведением тензоров, однако тензор $\tilde{\mathbf{E}}$ имеет одну пару равных главных значений.

Предположив материал пластически несжимаемым, когда справедливо соотношение (33), из уравнения (41) при выполнении условия (38) с учетом данных [13] приходим к закону упругого изменения объема:

$$T_0(\xi)=3K\varepsilon_0(\xi). \tag{44}$$

Приняв $\mathbf{R}^{\xi}\neq\mathbf{1}$, с учетом известного в рамках теории бесконечно малых деформаций представления тензора поворота [2]

$$\mathbf{R}(\xi)=\mathbf{1}+\tilde{\mathbf{R}}(\xi)+\mathbf{0}(\varepsilon^2)=\mathbf{1}+\mathbf{0}(\varepsilon) \tag{45}$$

и зависимости (5) можно заключить, что с точностью до бесконечно малых второго порядка малости полученные для чистого растяжения без вращения в случае бесконечно малых деформаций выражения для напряжений не изменяются и, следовательно, применимы для моделирования общего случая деформирования.

Далее в качестве исходного используем полученное в [1] определяющее соотношение, справедливое для чистого растяжения без вращения и мало отличающихся от отсчетной истории траекторий:

$$\mathbf{T}(\xi)=\int_0^{\xi}h(\eta)\underline{\mathbf{K}}_1(\mathbf{1},\eta)[\mathbf{C}^{\xi}(\eta)-\mathbf{1}^c(\eta)]d\eta+\mathbf{o}(\left\|\mathbf{C}^{\xi}(\eta)-\mathbf{1}\right\|), \tag{46}$$

где $\mathbf{1}^c(\eta)\equiv\mathbf{1}$ – история постоянной функции, значение которой всегда равно $\mathbf{1}$.

Для произвольных процессов деформирования, как следует из данных [1, 2], тензор напряжений Коши, зная (46), может быть определен так:

$$\mathbf{T}(\xi)=\mathbf{R}(\xi)\left\{\int_0^{\xi} h(\eta)\underline{\mathbf{K}}_1(\mathbf{1},\eta)[\mathbf{C}^{\xi}(\eta)-\mathbf{1}^{c}(\eta)]d\eta+\mathbf{o}(\left\|\mathbf{C}^{\xi}(\eta)-\mathbf{1}\right\|)\right\}\mathbf{R}^{T}(\xi). \quad (47)$$

Для бесконечно малых деформаций с учетом (11) получим

$$\mathbf{C}^{\xi}(\eta)-\mathbf{1}^{c}(\eta)=\mathbf{C}(\xi-\eta)-\mathbf{1}=2\widetilde{\mathbf{E}}(\xi-\eta)+\mathbf{0}(\varepsilon^{2})=\mathbf{1}+\mathbf{0}(\varepsilon). \quad (48)$$

Подставив (48) в (46), имеем

$$\mathbf{T}(\xi)=2\int_0^{\xi} h(\eta)\underline{\mathbf{K}}_1(\mathbf{1},\eta)[\mathbf{E}(\xi-\eta)]d\eta+\mathbf{o}(\varepsilon). \quad (49)$$

Обозначим функцию забывания $\underline{\mathbf{M}}_1(\eta)$ следующим образом:

$$\underline{\mathbf{M}}_1(\eta)=-2\int_{\eta}^{\infty} h(z)\underline{\mathbf{K}}_1(\mathbf{1},z)dz, \qquad \dot{\underline{\mathbf{M}}}_1(\eta)=\frac{d}{d\eta}\underline{\mathbf{M}}_1(\eta)=2h(\eta)\underline{\mathbf{K}}_1(\mathbf{1},\eta). \quad (50)$$

Учитывая разрывность тензорной функции $\underline{\mathbf{M}}_1(\xi)$ при $\xi=0$, как и ранее, можем записать

$$d\underline{\mathbf{M}}_1(\eta)=\dot{\underline{\mathbf{M}}}_1(\eta)d\eta+\underline{\mathbf{M}}_1(\eta)\delta(\eta-0)d\eta. \quad (51)$$

Тогда с учетом (51) соотношение (49) примет вид

$$\mathbf{T}(\xi)=\int_0^{\xi} d\underline{\mathbf{M}}_1(\eta)[\widetilde{\mathbf{E}}(\xi-\eta)]+\mathbf{o}(\varepsilon). \quad (52)$$

Принимая во внимание данные [4] и используя интегрирование δ-функции Дирака, входящей в дифференциал функции забывания $d\underline{\mathbf{M}}_1(\eta)$, можно, пренебрегая поправочным членом, переписать (52) в виде

$$\mathbf{T}(\xi)=\underline{\mathbf{M}}_1(0)[\widetilde{\mathbf{E}}(\xi)]+\int_0^{\xi}\dot{\underline{\mathbf{M}}}_1(\eta)[\widetilde{\mathbf{E}}(\xi-\eta)]d\eta. \quad (53)$$

Иные способы перехода от (52) к (53) отмечены в [4].

Другую форму соотношений, определяющих напряжения, можно получить из (53) заменой переменной $\tau=\xi-\eta$ и интегрированием по частям:

$$\mathbf{T}(\xi)=\int_0^{\xi}\underline{\mathbf{M}}_1(\xi-\tau)\frac{d}{d\tau}[\widetilde{\mathbf{E}}(\tau)]d\tau. \quad (54)$$

Отметим, что соотношение (54) по форме совпадает с одной из форм общих вязкоупругих определяющих законов при малых деформациях [4].

Для изотропного материала линейная изотропная тензорная функция $\underline{\mathbf{M}}_1(\xi-\tau)\dfrac{d}{d\eta}[\widetilde{\mathbf{E}}(\tau)]$ имеет представление (18).

Осуществляя процедуру, аналогичную той, с помощью которой выше определены девиаторные и шаровые компоненты тензора напряжений, (54) можно преобразовать к виду

$$\mathbf{s}(\xi)=2\int_0^{\xi}\widetilde{\mu}_1(\xi-\tau)\frac{d}{d\tau}[\mathbf{e}(\tau)]d\tau; \tag{55}$$

$$T_0(\xi)=3\int_0^{\xi}\widetilde{\mu}_0(\xi-\tau)\frac{d}{d\tau}[\varepsilon_0(\tau)]d\tau. \tag{56}$$

Соотношения (55), (56) совпадают с зависимостями эндохронной теории пластичности [13], если в них принять внутреннее время $z=\xi,\ z_0=0$.

Для пластически несжимаемого материала, когда согласно [13] $\widetilde{\mu}_0(\xi-\tau)=\mathrm{const}=K$, где K – модуль объемного сжатия, соотношение (56) преобразуется следующим образом:

$$T_0(\xi)=3K\varepsilon_0(\xi). \tag{57}$$

При этом зависимость (55) остается без изменения.

Для деформирования по мало отличающимся от отсчетной истории траекториям, когда $\mathbf{R}^{\xi}\neq\mathbf{1}$, с учетом (45) и (47) можно заключить, что с точностью до бесконечно малых второго порядка малости полученные для чистого растяжения без вращения при бесконечно малых деформациях выражения для напряжений не изменятся и, следовательно, могут применяться для описания общего случая деформирования.

Резюме

Для процесів деформування, що близькі до пропорційних і мало відрізняються від ненапруженої і недеформованої конфігурації, при нескінченно малих деформаціях розроблено математичну теорію строгої побудови і спеціалізації визначальних співвідношень зміцнюваних пружно-пластичних матеріалів зі згасаючою пам’яттю форми траєкторії першого порядку, які мають пластичні деформації зразу після прикладення навантаження, котрі монотонно збільшуються при деформуванні. Деформації – нескінченно малі. Тип симетрії матеріалу – довільний. Використано побудовані раніше автором визначальні співвідношення лінійної теорії пружно-пластичності для кінцевих деформацій. Прийнято умову малості мір деформації на протязі всього “минулого”. Особливу увагу зосереджено на ізотропних матеріалах. Установ-

лено умови приведення побудованих співвідношень до одного з варіантів ендохронної теорії пластичності.

1. *Лепихин П. П.* Моделирование затухающей памяти формы траектории в теории простых материалов с упругопластическим поведением. Сообщ. 1. Конечные деформации // Пробл. прочности. – 2004. – № 5. – С. 63 – 77.
2. *Truesdell C.* A First Course in Rational Continuum Mechanics. – Baltimore: The Johns Hopkins University, 1972. – 372 p.
3. *Truesdell C. and Noll W.* The Non-Linear Field Theories of Mechanics. – Springer, 1992. – 591 p.
4. *Christensen R. M.* Theory of Viscoelasticity. An Introduction. – New York; London: Academic Press, 1971. – 338 p.
5. *Casey J.* Approximate kinematical relation in plasticity // Int. J. Solids Struct. – 1985. – **21**, No. 7. – P. 671 – 682.
6. *Коларов Д.*, *Балтов А.*, *Бончева Н.* Механика на пластичните среди. – София: Изд-во на българската академия на науките, 1975. – 302 с.
7. *Жуков А. М.* Некоторые особенности поведения металлов при упруго-пластическом деформировании // Вопросы теории пластичности. – М.: Изд-во АН СССР, 1961. – С. 30 – 57.
8. *Ленский В. С.* Экспериментальная проверка основных постулатов общей теории упругопластических деформаций // Вопросы теории пластичности. – М.: Изд-во АН СССР, 1961. – С. 58 – 82.
9. *Шишмарев О. А.*, *Кузьмин Е. Я.* О зависимости упругих постоянных металла от пластической деформации // Изв. АН СССР. Механика и машиностроение. – 1961. – № 3. – С. 167 – 169.
10. *Поздеев А. А.*, *Трусов П. В.*, *Няшин Ю. И.* Большие упругопластические деформации: теория, алгоритмы, приложения. – М.: Наука, 1986. – 232 с.
11. *Новожилов В. В.* О формах связи между напряжениями и деформациями в первоначально изотропных неупругих телах (геометрическая сторона вопроса) // Прикл. математика и механика. – 1963. – **27**, вып. 5. – С. 794 – 812.
12. *Лепихин П. П.* Моделирование пропорционального деформирования простых по Ноллу материалов с упругопластическим поведением. Сообщ. 2. Анализ определяющих соотношений и сопоставление их с экспериментами // Пробл. прочности. – 1998. – № 6. – С. 43 – 55.
13. *Valanis K. C.* A theory of viscoplasticity without a yield surface. Pt. 1. General theory // Arch. Mech. – 1971. – **23**, No 4. – P. 517 – 533.

Поступила 05. 02. 2004