УДК 539.3

Смешанная проекционно-сеточная схема метода конечных элементов для решения краевых задач теории малых упругопластических деформаций

А. Ю. Чирков

Институт проблем прочности им. Г. С. Писаренко НАН Украины, Киев, Украина

Сформулирована смешанная проекционно-сеточная схема решения нелинейных краевых задач теории малых упругопластических деформаций. Исследована корректность и сходимость смешанных аппроксимаций для напряжений, деформаций и перемещений. Подробно изучены свойства проектирующих операторов, на основе чего сформулировано условие, обеспечивающее существование, единственность и устойчивость решения дискретной задачи. Представлены результаты анализа применения численного интегрирования. Оценки сходимости и точности базируются на теории обобщенных функций и методах функционального анализа.

Ключевые слова: теория пластичности, метод конечных элементов, смешанная схема, аппроксимация, устойчивость, сходимость, точность.

Обобщенная постановка краевой задачи. Пусть рассматриваемое тело занимает область $\Omega \subset R^n$ $(n=2,3)$ и имеет регулярную границу Γ. На части границы Γ_u заданы перемещения, на оставшейся части Γ_σ – поверхностные нагрузки.

Полагаем, что перемещения $u=(u_i)$, $1\leq i \leq n$, удовлетворяют на Γ_u однородным граничным условиям, а напряжения и деформации описываются соответственно тензорными функциями $\sigma=(\sigma_{ij})$ и $\varepsilon=(\varepsilon_{ij})$, $1\leq i,j \leq m$, где $m=6$ при $n=3$ и $m=3$ при $n=2$.

Связь между перемещениями и деформациями запишем в виде

$$\varepsilon = Bu, \tag{1}$$

где B – линейный дифференциальный оператор.

Область определения оператора B обозначим U, область значений – Y. Множества U и Y будем рассматривать как замкнутые линейные подпространства гильбертовых пространств $V=[H^1(\Omega)]^n$ и $X=[L_2(\Omega)]^m$ со скалярными произведениями $(\cdot;\cdot)_V$ и $(\cdot;\cdot)_X$ соответственно, где $H^1(\Omega)$ – пространство функций, суммируемых с квадратом в Ω вместе со своими первыми производными включительно [1]; $L_2(\Omega)$ – пространство функций, суммируемых с квадратом в Ω. Сужение $(\cdot;\cdot)_X$ на $Y\times Y$ обозначим через $(\cdot;\cdot)_Y$. Тогда в силу неравенства Корна [2] множество U полно относительно нормы, ассоциированной со скалярным произведением $(\cdot;\cdot)_U=(B\cdot,B\cdot)_Y$, и, следовательно, U – гильбертово пространство.

В деформационной теории пластичности изотропных материалов [3] соотношения между напряжениями и деформациями можно представить в виде

$$\sigma = \Phi(\varepsilon), \tag{2}$$

где Φ – нелинейный оператор, отображающий X в себя и устанавливающий взаимосвязь между напряжениями и деформациями. Оператор Φ: $X \to X$ определяется выражением

$$\eta \in X \to \Phi(\bar{\varepsilon}(\eta)) = k_o \eta_S + 2G(\bar{\varepsilon}(\eta))\eta_D, \tag{3}$$

где k_o – модуль объемной деформации; $G(\bar{\varepsilon}) = \bar{\sigma}(\bar{\varepsilon})/3\bar{\varepsilon}$ – секущий модуль сдвига; $\bar{\sigma}$, $\bar{\varepsilon}$ – интенсивности девиаторов напряжений и деформаций; η_S, η_D – шаровая и девиаторная составляющие произвольного тензора деформаций $\eta \in X$. При этом постулируется гипотеза о единой не зависящей от вида девиатора напряжений функциональной зависимости между интенсивностями напряжений и деформаций, которая характеризует диаграмму деформирования материала $\bar{\sigma} = f(\bar{\varepsilon})$.

Если функция $\bar{\sigma} = f(\bar{\varepsilon})$, описывающая кривую деформирования материала, удовлетворяет условиям $0 < d\bar{\sigma}/d\bar{\varepsilon} \le \bar{\sigma}/\bar{\varepsilon}$, то оператор $\eta \to \Phi(\eta)$ является непрерывно дифференцируемым по Фреше, и производная $\Phi'(\eta)$ положительно определена и ограничена при всех $\eta \in X$. При этом существуют два вещественных положительных числа m, M такие, что

$$(\Phi'(\eta)\mu, \mu)_X \ge m \|\mu\|_X^2, \qquad \|\Phi'(\eta)\mu\|_X \le M \|\mu\|_X, \qquad \forall \eta, \mu \in X. \tag{4}$$

Обозначим через U^* пространство, сопряженное к U, и определим $\rho(v) = \langle \rho, v \rangle$ как значение непрерывного линейного функционала $\rho \in U^*$ на элементе $v \in U$. Множество непрерывных линейных функционалов над U ассоциируем с работой приложенных к телу нагрузок на возможных перемещениях $v \in U$. Тогда с использованием вариационного уравнения Лагранжа [4] статические соотношения запишем в следующем виде:

$$(\sigma, Bv)_X = \rho(v), \qquad \forall v \in U. \tag{5}$$

Уравнения (1), (2), (5) позволяют сформулировать обобщенную краевую задачу теории пластичности в форме нелинейного операторного уравнения относительно перемещений

$$A(u) = \rho \quad \text{в} \quad U^*, \qquad u \in U, \tag{6}$$

где A: $U \to U^*$ – нелинейный оператор, определяемый с помощью отображения

$$A(u): v \in U \to (\sigma(u), \varepsilon(v))_X = (\Phi(Bu), Bv)_X = \langle A(u), v \rangle. \tag{7}$$

Существование и единственность обобщенного решения уравнения (6) следуют из свойств сильной монотонности и липшиц-непрерывности оператора A: $U \to U^*$, которые устанавливаются на основании неравенств (4) и имеют вид

$$\begin{aligned} &\left\langle A(v) - A(w), v \right\rangle \geq m \| v - w \|_U^2, \quad \forall\, v, w \in U; \\ &\| A(v) - A(w) \|_{U^*} \leq M \| v - w \|_U, \quad \forall\, v, w \in U. \end{aligned} \tag{8}$$

Использование уравнения (6) для построения сеточных схем приводит к обычной формулировке метода конечных элементов (МКЭ) в форме метода перемещений. В результате деформации вычисляются дифференцированием приближенных перемещений, найденных из решения задачи в перемещениях, что является основной причиной ухудшения сходимости аппроксимации для деформаций и напряжений по сравнению с таковой для перемещений.

Альтернативный подход состоит в изменении обобщенной постановки краевой задачи таким образом, чтобы деформации и напряжения были ее непосредственными аргументами, а не определялись на основании решения задачи в перемещениях. Представив обобщенную краевую задачу системой уравнений

$$\begin{cases} (\varepsilon, \eta)_X = (Bu, \eta)_X, & \forall\, \eta \in X; \\ (\sigma, \chi)_X = (\Phi(\varepsilon), \chi)_X, & \forall\, \chi \in X; \\ (\sigma, Bv)_X = \rho(v), & \forall\, v \in U, \end{cases} \tag{9}$$

получим обобщенную постановку краевой задачи деформационной теории пластичности относительно перемещений, деформаций и напряжений [4–6].

Заметим, что для континуальных задач теории пластичности обобщенная постановка в перемещениях (6) и смешанная формулировка (9) эквивалентны, и, следовательно, система уравнений (9) имеет единственное решение $(u, \varepsilon, \sigma) \in U \times Y \times X$ при всех $\rho \in U^*$.

Построение проекционно-сеточной схемы базируется на дискретизации исходной континуальной задачи, описываемой системой нелинейных уравнений (9). Бесконечномерное пространство перемещений–деформаций–напряжений $U \times X \times X$ аппроксимируется конечномерным пространством $U_h \times X_h \times X_h$, где h – определяющий параметр семейства конечномерных пространств, стремящийся в пределе к нулю. Для построения конечномерных пространств $U_h \times X_h \times X_h$ в качестве базисных используем кусочно-полиномиальные функции.

Пусть задано семейство аппроксимирующих пространств $U_h \times X_h \times X_h$, удовлетворяющее включению $U_h \times X_h \times X_h \subset U \times X \times X$. Тогда по аналогии с уравнениями (9) определим конечномерную задачу следующим образом. Найти тройку $(u_h, \varepsilon_h, \sigma_h) \in U_h \times X_h \times X_h$ такую, что

$$\begin{cases} (\varepsilon_h, \eta_h)_X = (Bu_h, \eta_h)_X, & \forall\, \eta_h \in X_h; \\ (\sigma_h, \chi_h)_X = (\Phi(\varepsilon_h), \chi_h)_X, & \forall\, \chi_h \in X_h; \\ (\sigma_h, Bv_h)_X = \rho(v_h), & \forall\, v_h \in U_h. \end{cases} \tag{10}$$

Система уравнений (10) определяет смешанную проекционно-сеточную постановку краевой задачи теории пластичности относительно перемещений, деформаций и напряжений.

Для формулировки условий устойчивости и разрешимости дискретной задачи (10) введем в рассмотрение проектирующий оператор I_h, который ставит в соответствие каждому элементу из пространства Y_h его проекцию в X_h. Оператор I_h, ассоциируемый со скалярным произведением $(\cdot;\cdot)_X$, определим из равенства

$$(\bar{\tau}_h - I_h\bar{\tau}_h, \eta_h)_X = 0, \qquad \forall \bar{\tau}_h \in Y_h, \qquad \forall \eta_h \in X_h. \tag{11}$$

Тогда элемент $I_h\bar{\tau}_h$ – суть ортогональная проекция $\bar{\tau}_h \in Y_h$ на пространство X_h, и, следовательно, для любого $\bar{\tau}_h \in Y_h$ имеем

$$\left\| \bar{\tau}_h - I_h\bar{\tau}_h \right\|_X = \inf_{\eta_h \in X_h} \left\| \bar{\tau}_h - \eta_h \right\|_X. \tag{12}$$

С использованием ортопроектора $I_h\colon Y_h \to X_h$ уравнения (10) запишем в эквивалентном виде

$$\begin{cases} (\varepsilon_h, \eta_h)_X = (I_h B u_h, \eta_h)_X, & \forall \eta_h \in X_h; \\ (\sigma_h, \chi_h)_X = (\Phi(\varepsilon_h), \chi_h)_X, & \forall \chi_h \in X_h; \\ (\sigma_h, I_h B v_h)_X = \rho(v_h), & \forall v_h \in U_h, \end{cases} \tag{13}$$

откуда следует, что элемент $\varepsilon_h = I_h B u_h$ – суть ортогональная проекция $Bu_h \in Y_h$ на пространство X_h. Тогда систему уравнений (13) можно представить в форме одного нелинейного операторного уравнения относительно перемещений:

$$A_h(u_h) = \rho_h \quad \text{в} \quad U_h^*, \qquad u_h \in U_h, \tag{14}$$

где $A_h\colon U_h \to U_h^*$ – нелинейный оператор, определяемый с помощью отображения

$$A_h(u_h)\colon v_h \in U_h \to (\sigma_h(u_h),\ \varepsilon_h(v_h))_X =$$

$$= (\Phi(I_h B u_h), I_h B v_h)_X = \langle A_h(u_h), v_h \rangle. \tag{15}$$

Условие устойчивости. Пусть для всякого h и любого $\bar{\tau}_h \in Y_h$ справедлива оценка

$$d \left\| \bar{\tau}_h \right\|_X \le \left\| I_h\bar{\tau}_h \right\|_X, \qquad 0 < d \le 1, \tag{16}$$

где постоянная d не зависит от h. Тогда при любом h дискретная задача (10) однозначно разрешима.

Действительно, с использованием свойств оператора $\eta \to \Phi(\eta)$ и условия устойчивости (16) приходим к тому, что оператор A_h: $U_h \to U_h^*$ является сильномонотонным и липшиц-непрерывным, т.е. выполняются неравенства

$$\begin{aligned} &\left\langle A_h(v_h) - A_h(w_h), v_h - w_h \right\rangle \geq md^2 \| v_h - w_h \|_U^2, && \forall v_h, w_h \in U_h; \\ &\| A_h(v_h) - A_h(w_h) \|_{U^*} \leq M \| v_h - w_h \|_U, && \forall v_h, w_h \in U_h. \end{aligned} \tag{17}$$

Следовательно, решение уравнения (14) существует и единственно, а также непрерывно зависит от правой части, т.е. от приложенных нагрузок $\rho \in U^*$, причем

$$\| u_h \|_U \leq \frac{1}{md^2} \| \rho \|_{U^*}; \qquad \| \varepsilon_h \|_X \leq \frac{1}{md} \| \rho \|_{U^*}. \tag{18}$$

Замечание 1. С использованием свойств ортопроектора I_h: $Y_h \to X_h$ получаем оценку снизу для d:

$$d^2 \geq 1 - \sup_{\bar{\tau}_h \in Y_h} \frac{\| \bar{\tau}_h - \eta_h \|_X^2}{\| \bar{\tau}_h \|_X^2}, \qquad \forall \eta_h \in X_h. \tag{19}$$

Замечание 2. Если оператор I_h удовлетворяет условию устойчивости (16), то отображение I_h: $Y_h \to X_h$ – взаимно однозначно и непрерывно. Значит, существует обратный линейный ограниченный оператор I_h^{-1}, действующий из $\mathrm{Im}(I_h)$ в Y_h, для которого справедлива оценка:

$$\| I_h^{-1} \pi_h \|_X \leq \frac{1}{d} \| \pi_h \|_X, \qquad \forall \pi_h \in \mathrm{Im}(I_h). \tag{20}$$

Замечание 3. С помощью оценки (20) находим

$$\| \pi_h - I_h^{-1} \pi_h \|_X \leq \frac{\sqrt{1 - d^2}}{d} \| \pi_h \|_X, \qquad \forall \pi_h \in \mathrm{Im}(I_h). \tag{21}$$

Транспозицию оператора I_h обозначим через I'_h. Оператор I'_h отображает X_h на Y_h и определяется соотношением

$$(I'_h \eta_h, \bar{\tau}_h)_X = (\eta_h, I_h \bar{\tau}_h)_X, \qquad \forall \eta_h \in X_h, \qquad \forall \bar{\tau}_h \in Y_h. \tag{22}$$

С использованием равенств (11) и (22) для любого $\eta_h \in X_h$ получим

$$(\eta_h - I'_h \eta_h, \bar{\tau}_h)_X = 0, \qquad \forall \bar{\tau}_h \in Y_h. \tag{23}$$

Следовательно, $I'_h: X_h \to Y_h$ – ортогональный проектирующий оператор и $I'_h \eta_h$ – ортогональная проекция $\eta_h \in X_h$ на пространство Y_h. Более того, согласно равенству (22) для всякого $\mu_h \in [\mathrm{Im}(I_h)]^\perp$ имеем

$$(I'_h \mu_h, \bar{\tau}_h)_X = (\mu_h, I_h \bar{\tau}_h)_X = 0, \qquad \forall \bar{\tau}_h \in Y_h, \tag{24}$$

откуда ввиду произвольности выбора $\bar{\tau}_h \in Y_h$ получаем $\mu_h \in \ker(I'_h)$, где $\ker(I'_h)$ – ядро оператора I'_h. Другими словами, $\ker(I'_h) = [\mathrm{Im}(I_h)]^\perp$. Таким образом, ортопроекторы I_h и I'_h порождают разложение пространства X_h в прямую сумму подпространств: $X_h = \mathrm{Im}(I_h) \oplus \ker(I'_h)$.

Сужение I'_h на $\mathrm{Im}(I_h)$ обозначим через $\widetilde{I}'_h$. Оператор $\widetilde{I}'_h$ отображает $\mathrm{Im}(I_h)$ на Y_h и устанавливает между элементами этих пространств взаимно однозначное соответствие. Определяя в равенстве (22) элемент $\bar{\tau}_h \in Y_h$ с помощью соотношения $\bar{\tau}_h = I_h^{-1} \pi_h \in Y_h$, в соответствии с неравенством Коши–Буняковского–Шварца [7] и оценкой (20) для всякого $\pi_h \in \mathrm{Im}(I_h)$ получаем

$$\left\| \pi_h \right\|_X^2 = (\widetilde{I}'_h \pi_h, I_h^{-1} \pi_h)_X \le \left\| \widetilde{I}'_h \pi_h \right\|_X \left\| I_h^{-1} \pi_h \right\|_X \le \frac{1}{d} \left\| \widetilde{I}'_h \pi_h \right\|_X \left\| \pi_h \right\|_X, \tag{25}$$

откуда следует

$$d \left\| \pi_h \right\|_X \le \left\| \widetilde{I}'_h \pi_h \right\|_X, \qquad \forall \pi_h \in \mathrm{Im}(I_h). \tag{26}$$

Замечание 4. С помощью оценки (26) находим

$$\left\| \pi_h - \widetilde{I}'_h \pi_h \right\|_D \le \sqrt{1 - d^2} \left\| \pi_h \right\|_D, \qquad \forall \pi_h \in \mathrm{Im}(I_h). \tag{27}$$

Определим проектирующий оператор на замкнутое линейное подпространство X_h гильбертова пространства X относительно скалярного произведения $(\cdot;\cdot)_X$. Для этого отнесем каждому элементу $\eta_h \in X_h$ его ортогональную проекцию на подпространство X_h. Полученное соответствие есть оператор в X. Обозначим его через θ_h и по определению примем

$$(\eta - \theta_h \eta, \eta_h)_X = 0, \qquad \forall \eta_h \in X_h. \tag{28}$$

С использованием ортопроектора $\theta_h: X \to X_h$ для произвольного $\eta \in X$ имеем

$$\left\| \eta - \theta_h \eta \right\|_X = \inf_{\eta_h \in X_h} \left\| \eta - \eta_h \right\|_X. \tag{29}$$

Сужение θ_h на Y_h есть оператор I_h, т.е. I_h – оператор с областью определения Y_h, для которого $I_h \bar{\tau}_h = \theta_h \bar{\tau}_h$ при любом $\bar{\tau}_h \in Y_h$. Тогда любой элемент $\eta_h \in X_h$ может быть единственным образом представлен в виде разложения $\eta_h = \pi_h + \mu_h$, где $\pi_h \in \mathrm{Im}(I_h)$ и $\mu_h \in \ker(I'_h)$, причем

$$\left\| \mu_h \right\|_X = \left\| \eta_h - \pi_h \right\|_X = \inf_{\bar{\tau}_h \in Y_h} \left\| \eta_h - I_h \bar{\tau}_h \right\|_X, \qquad \forall \eta_h \in X_h. \tag{30}$$

Замечание 5. Пусть $\eta = Bv \in Y$ для любого $v \in U$. Сужение θ_h на множество элементов $\eta - \bar{\tau}_h$ обозначим через $\widetilde{\theta}_h$. Тогда согласно определению элемента $\mu_h \in \ker(I'_h)$ для произвольного $\bar{\tau}_h \in Y_h$ получаем

$$\left\| \mu_h \right\|_X^2 \le \left\| \widetilde{\theta}_h(\eta - \bar{\tau}_h) \right\|_X^2 = \left\| \eta - \bar{\tau}_h \right\|_X^2 - \inf_{\eta_h \in X_h} \left\| (\eta - \bar{\tau}_h) - \eta_h \right\|_X^2, \tag{31}$$

откуда следует

$$\left\| \mu_h \right\|_X \le \inf_{\bar{\tau}_h \in Y_h} \left\| \eta - \bar{\tau}_h \right\|_X, \tag{32}$$

причем равенство справедливо, если $\eta - \bar{\tau}_h$ – элемент пространства X_h. Если предположить, что пространства X_h и Y_h “не пересекаются”, то вычитаемое в правой части (31) не может быть равным нулю и, следовательно, в этом случае имеет место строгое неравенство, т.е. $\left\| \widetilde{\theta}_h \right\|_X < 1$.

Замечание 6. Для любого $\eta \in X$ элемент $\theta_h \eta \in X_h$ допускает ортогональное разложение вида $\theta_h \eta = \pi_h + \mu_h \in X_h$, где $\pi_h \in \mathrm{Im}(I_h)$ и $\mu_h \in \ker(I'_h)$. В таком случае можно оценить разность $\eta - \pi_h$. Учитывая, что $\eta - \pi_h = \eta - \theta_h \eta + \mu_h$, для всякого $\eta \in X$ находим

$$\left\| \eta - \pi_h \right\|_X^2 = \left\| \eta - \theta_h \eta \right\|_X^2 + \left\| \mu_h \right\|_X^2, \tag{33}$$

откуда на основании свойств ортогональных проекций (29) и (30) для произвольного $\eta \in X$ получаем

$$\left\| \eta - \pi_h \right\|_X \le \inf_{\eta_h \in X_h} \left\| \eta - \eta_h \right\|_X + \inf_{\bar{\tau}_h \in Y_h} \left\| \widetilde{\theta}_h(\eta - \bar{\tau}_h) \right\|_X. \tag{34}$$

Проектирующий оператор на замкнутое линейное подпространство U_h гильбертова пространства U обозначим через P_h. Оператор P_h определим для всякого h и любого $v \in U$ из равенства

$$(Bv - BP_h v, Bv_h)_X = 0, \qquad \forall v_h \in U_h. \tag{35}$$

С помощью ортопроектора P_h: $U \to U_h$ для произвольного $v \in U$ имеем

$$\left\| Bv - BP_h v \right\|_X = \inf_{v_h \in U_h} \left\| Bv - Bv_h \right\|_X. \tag{36}$$

Замечание 7. Пусть $\eta = Bv \in Y$ для любого $v \in U$, причем $\theta_h \eta = \pi_h + \mu_h \in X_h$, где $\pi_h \in \mathrm{Im}(I_h)$; $\mu_h \in \ker(I'_h)$. С использованием ортогонального разложения элемента $\eta - I_h^{-1}\pi_h \in Y$ в виде $\eta - I_h^{-1}\pi_h = \eta - BP_h v + {}$ $+ BP_h v - I_h^{-1}\pi_h$ находим

$$\left\| \eta - I_h^{-1}\pi_h \right\|_X^2 = \left\| \eta - BP_h v \right\|_X^2 + \left\| BP_h v - I_h^{-1}\pi_h \right\|_X^2 . \tag{37}$$

Оценим сверху второе слагаемое в правой части (37) с помощью равенства

$$\begin{gathered} (I_h BP_h v - \pi_h, \eta_h)_X = (BP_h v - \eta, \eta_h - \bar{\tau}_h)_X , \\ \forall \bar{\tau}_h \in Y_h, \qquad \forall \eta_h \in \mathrm{Im}(I_h), \end{gathered} \tag{38}$$

в котором полагаем $\bar{\tau}_h = \widetilde{I}_h' \eta_h \in Y_h$; $\eta_h = I_h BP_h v - \pi_h \in \mathrm{Im}(I_h)$. Если использовать для правой части (38) неравенство Коши–Буняковского–Шварца, условие устойчивости (16) и неравенство (27), то получим

$$\left\| BP_h v - I_h^{-1}\pi_h \right\|_X \le \frac{\sqrt{1-d^2}}{d} \left\| \eta - BP_h v \right\|_X . \tag{39}$$

На основании равенства (37) с учетом оценки (39) и свойств ортогональных проекций (36) приходим к неравенству

$$\left\| \eta - I_h^{-1}\pi_h \right\|_X \le \frac{1}{d} \inf_{\bar{\tau}_h \in Y_h} \left\| \eta - \bar{\tau}_h \right\|_X . \tag{40}$$

Замечание 8. Пусть, как и ранее, $\eta = Bv \in Y$ для произвольного элемента $v \in U$. Поскольку $\theta_h \eta = \pi_h + \mu_h \in X_h$, где $\pi_h \in \mathrm{Im}(I_h)$; $\mu_h \in \ker(I_h')$, в соответствии с неравенством треугольника и свойством (12) имеем

$$\left\| \pi_h - I_h^{-1}\pi_h \right\|_X = \inf_{\eta_h \in X_h} \left\| \eta - \eta_h \right\|_X + \left\| \eta - I_h^{-1}\pi_h \right\|_X , \tag{41}$$

откуда с учетом оценки (40) получаем

$$\left\| \pi_h - I_h^{-1}\pi_h \right\|_X \le \inf_{\eta_h \in X_h} \left\| \eta - \eta_h \right\|_X + \frac{1}{d} \inf_{\bar{\tau}_h \in Y_h} \left\| \eta - \bar{\tau}_h \right\|_X . \tag{42}$$

Теорема сходимости. Если выполняется условие устойчивости (16), то существуют такие не зависящие от h постоянные C_1, C_2, ..., C_7, что

$$\begin{gathered} \left\| \varepsilon - \varepsilon_h \right\|_X \le C_1 \inf_{\chi_h \in X_h} \left\| \sigma - \chi_h \right\|_X + \\ + C_2 \Big(\inf_{\eta_h \in X_h} \left\| \varepsilon - \eta_h \right\|_X + \inf_{\bar{\tau}_h \in Y_h} \left\| \widetilde{\theta}_h (\varepsilon - \bar{\tau}_h) \right\|_X \Big); \end{gathered} \tag{43}$$

$$\left\| \sigma - \Phi(\varepsilon_h) \right\|_X \le C_3 \inf_{\chi_h \in X_h} \left\| \sigma - \chi_h \right\|_X +$$

$$+ C_4 (\inf_{\eta_h \in X_h} \left\| \varepsilon - \eta_h \right\|_X + \inf_{\bar{\tau}_h \in Y_h} \left\| \widetilde{\theta}_h (\varepsilon - \bar{\tau}_h) \right\|_X); \tag{44}$$

$$\left\| \varepsilon - Bu_h \right\|_X \le C_5 \inf_{\chi_h \in X_h} \left\| \sigma - \chi_h \right\|_X +$$

$$+ C_6 \inf_{\eta_h \in X_h} \left\| \varepsilon - \eta_h \right\|_X + C_7 \inf_{\bar{\tau}_h \in Y_h} \left\| \varepsilon - \bar{\tau}_h \right\|_X , \tag{45}$$

причем

$$\begin{gathered} C_1 = \frac{\sqrt{1-d^2}}{md}; \qquad C_2 = 1 + \frac{M}{m}; \qquad C_3 = MC_1; \\ C_4 = MC_2; \qquad C_5 = \frac{C_1}{d}; \qquad C_6 = \frac{M}{md}; \qquad C_7 = \frac{C_2}{d}. \end{gathered} \tag{46}$$

◀ Пусть $\theta_h \varepsilon = \varphi_h + \psi_h \in X_h$, где $\varphi_h \in \mathrm{Im}(I_h)$; $\psi_h \in \ker(I_h')$. В соответствии с неравенством треугольника получаем

$$\left\| \varepsilon - \varepsilon_h \right\|_X \le \left\| \varepsilon - \varphi_h \right\|_X + \left\| \varphi_h - \varepsilon_h \right\|_X . \tag{47}$$

Второе слагаемое в правой части (47) оценим с помощью равенства

$$(\Phi(\varepsilon_h) - \Phi(\varphi_h), \pi_h)_X = (\sigma - \theta_h \sigma, I_h^{-1} \pi_h - \pi_h)_X +$$

$$+ (\Phi(\varepsilon) - \Phi(\varphi_h), \pi_h)_X , \qquad \forall \pi_h \in \mathrm{Im}(I_h). \tag{48}$$

С использованием свойств оператора $\eta \to \Phi(\eta)$ и неравенства (21) находим

$$m \left\| \varepsilon_h - \varphi_h \right\|_X^2 \le (\Phi(\varepsilon_h) - \Phi(\varphi_h), \varepsilon_h - \varphi_h)_X \le$$

$$\le \left(\frac{\sqrt{1-d^2}}{d} \left\| \sigma - \theta_h \sigma \right\|_X + M \left\| \varepsilon - \varphi_h \right\|_X \right) \left\| \varepsilon_h - \varphi_h \right\|_X . \tag{49}$$

Следовательно, справедливо неравенство

$$\left\| \varepsilon_h - \varphi_h \right\|_X \le \frac{\sqrt{1-d^2}}{md} \left\| \sigma - \theta_h \sigma \right\|_X + \frac{M}{m} \left\| \varepsilon - \varphi_h \right\|_X . \tag{50}$$

Подставляя (50) в (47), приходим к неравенству

$$\left\| \varepsilon - \varepsilon_h \right\|_X \le \frac{\sqrt{1-d^2}}{md} \left\| \sigma - \theta_h \sigma \right\|_X + \left(1 + \frac{M}{m} \right) \left\| \varepsilon - \varphi_h \right\|_X , \tag{51}$$

откуда с учетом свойств ортогональных проекций (29) и (34) получаем оценку (43).

Для доказательства оценки (44) используем неравенство

$$\|\sigma - \Phi(\varepsilon_h)\|_X = \|\Phi(\varepsilon) - \Phi(\varepsilon_h)\|_X \le M\|\varepsilon - \varepsilon_h\|_X. \qquad (52)$$

На основании (51) и (52) приходим к неравенству

$$\|\sigma - \Phi(\varepsilon_h)\|_X \le \frac{M\sqrt{1-d^2}}{md}\|\sigma - \theta_h\sigma\|_X + M(1+\frac{M}{m})\|\varepsilon - \varphi_h\|_X, \qquad (53)$$

откуда согласно свойствам ортогональных проекций (29) и (34) получаем оценку (44).

Для доказательства оценки (45) используем неравенство треугольника и оценку (20). Тогда

$$\|\varepsilon - Bu_h\|_X \le \|\varepsilon - I_h^{-1}\varphi_h\|_X + \frac{1}{d}\|\varphi_h - \varepsilon_h\|_X. \qquad (54)$$

Таким образом, имеем оценку (45) как следствие приведенных выше неравенств (32), (40), (50), (54) и свойств ортогональных проекций (29), (34). ▶

Замечание 9. Согласно (43) и (44), оценки погрешностей смешанной аппроксимации для деформаций и напряжений включают слагаемое $\|\psi_h\|_X$. В этом заключается их принципиальное отличие от аналогичных оценок при построении обычных схем метода конечных элементов в перемещениях. Погрешность $\varepsilon - Bu_h$ – “неулучшаема” в том смысле, что в ее оценке (45) присутствует слагаемое $\|\varepsilon - BP_h u\|_X$. Однако оценки погрешностей для деформаций и напряжений таким членом не располагают, и в этом состоит их особенность.

Замечание 10. Пусть $u_I \in U_h$ и $\varepsilon_I \in X_h$ – интерполянты для элементов $u \in U$ и $\varepsilon \in Y$ соответственно. Согласно определению элемента $\psi_h \in \ker(I'_h)$ и неравенству треугольника, получаем

$$\|\psi_h\|_X \le \|\tilde{\theta}_h B(u - u_I)\|_X \le \|\varepsilon - \varepsilon_I\|_X + \|\tilde{\theta}_h(\varepsilon_I - Bu_I\|_X. \qquad (55)$$

Тогда для оценки $\|\psi_h\|_X$ могут быть использованы неравенства

$$\|\psi_h\|_X \le \sup_{\eta_h \in X_h} \frac{|(B(u-u_I), \eta_h)_X|}{\|\eta_h\|_X} \le \|\varepsilon - \varepsilon_I\|_X +$$

$$+ \sup_{\eta_h \in X_h} \frac{|(\varepsilon_I - Bu_I, \eta_h)_X|}{\|\eta_h\|_X}. \qquad (56)$$

Замечание 11. Оценим разность $\varepsilon_h - Bu_h$, которая используется ниже при анализе сходимости погрешности аппроксимации для перемещений. В соответствии с неравенством треугольника и свойством (12) имеем

$$\left\|\varepsilon_h - Bu_h\right\|_X \leq \inf_{\eta_h \in X_h} \left\|\varepsilon - \eta_h\right\|_X + \left\|\varepsilon - Bu_h\right\|_X, \tag{57}$$

откуда с учетом оценки (45) получаем такие не зависящие от h постоянные C_1, C_2 и C_3, что

$$\left\|\varepsilon_h - Bu_h\right\|_X \leq C_1 \inf_{\chi_h \in X_h} \left\|\sigma - \chi_h\right\|_X +$$

$$+ C_2 \inf_{\eta_h \in X_h} \left\|\varepsilon - \eta_h\right\|_X + C_3 \inf_{\bar{\tau}_h \in Y_h} \left\|\varepsilon - \bar{\tau}_h\right\|_X. \tag{58}$$

Замечание 12. Если последовательность аппроксимирующих подпространств $U_h \times X_h \times X_h$ предельно плотна в $U \times X \times X$, то согласно оценкам (43)–(45) и (58) получаем

$$\begin{aligned} &\left\|\varepsilon - \varepsilon_h\right\|_X \to 0; \quad \left\|\sigma - \Phi(\varepsilon_h)\right\|_X \to 0 \quad \text{при} \quad h \to 0; \\ &\left\|u - u_h\right\|_U \to 0; \quad \left\|\varepsilon_h - Bu_h\right\|_X \to 0 \quad \text{при} \quad h \to 0. \end{aligned} \tag{59}$$

Сходимость перемещений. Пусть L – такое гильбертово пространство с нормой $\|\cdot\|_L$ и скалярным произведением $(\cdot;\cdot)_L$, что $U \subset L$, вложение непрерывно и плотно. Пространство L будем отождествлять с сопряженным к нему и, следовательно, его можно отождествить с подпространствами, плотными в сопряженном для U пространстве U^*, т.е. $U \subset L = L^* \subset U^*$. Отношение двойственности на $U^* \times U$ отождествим со скалярным произведением в L, определенном на $L \times U \subset L \times L$. Покажем, что погрешность для перемещений $u - u_h$ в метрике пространства L имеет более высокий порядок сходимости, чем в норме пространства U.

С этой целью любому элементу $\rho_\lambda \in L$ поставим в соответствие тройку $(u_\lambda, \varepsilon_\lambda, \sigma_\lambda) \in U \times Y \times X$ как решение вспомогательной задачи:

$$\begin{cases} (\varepsilon_\lambda, \eta)_X = (Bu_\lambda, \eta)_X, & \forall \eta \in X; \\ (\sigma_\lambda, \chi)_X = (\varepsilon_\lambda, \Phi'(p\varepsilon + (1-p)\varepsilon_h)\chi)_X, & \forall \chi \in X; \\ (\sigma_\lambda, Bv)_X = (\rho_\lambda, v)_L, & \forall v \in U. \end{cases} \tag{60}$$

Заметим, что $\eta \to \Phi'(\eta)$ – положительно определенный ограниченный оператор в X при всех $\eta \in X$, и, следовательно, система уравнений (60) однозначно разрешима при любом $\rho_\lambda \in L$.

С учетом того что $v = u - u_h$ – элемент пространства U, получаем

$$(\rho_\lambda, u - u_h)_L = (\sigma_\lambda, \varepsilon - Bu_h)_X, \tag{61}$$

причем

$$(\rho_\lambda, u-u_h)_L = (\sigma_\lambda, \varepsilon - \varepsilon_h)_X + (\sigma_\lambda, \varepsilon_h - Bu_h)_X =$$

$$= (\varepsilon_\lambda, \Phi'(p\varepsilon + (1-p)\varepsilon_h)(\varepsilon - \varepsilon_h)_X + (\sigma_\lambda, \varepsilon_h - Bu_h)_X. \qquad (62)$$

С использованием оператора Φ: $\eta \in X \to \Phi(\eta)$ и формулы конечных приращений [7] имеем

$$\Phi(\varepsilon) - \Phi(\varepsilon_h) = \int_0^1 \Phi'(p\varepsilon + (1-p)\varepsilon_h)(\varepsilon - \varepsilon_h)dp, \qquad (63)$$

откуда в соответствии с теоремой о среднем [7] следует, что для некоторого $p \in [1, 0]$ и произвольного $\eta \in X$ выполняется равенство

$$(\Phi(\varepsilon) - \Phi(\varepsilon_h), \eta)_X = (\Phi'(p\varepsilon + (1-p)\varepsilon_h)(\varepsilon - \varepsilon_h), \eta)_X. \qquad (64)$$

На основании этого получаем

$$(\rho_\lambda, u-u_h)_L = (\varepsilon_\lambda - \pi_h, \sigma - \Phi(\varepsilon_h))_X + (\pi_h - I_h^{-1}\pi_h, \sigma - \theta_h\sigma)_X +$$

$$+ (\sigma_\lambda - \chi_h, \varepsilon_h - Bu_h)_X, \qquad \forall \pi_h \in \mathrm{Im}(I_h), \qquad \forall \chi_h \in X_h. \qquad (65)$$

Следовательно, справедливо неравенство

$$\left|(\rho_\lambda, u-u_h)_L\right| \le \left\|\varepsilon_\lambda - \varphi_{\lambda h}\right\|_X \left\|\sigma - \Phi(\varepsilon_h)\right\|_X +$$

$$+ \left\|\varphi_{\lambda h} - I_h^{-1}\varphi_{\lambda h}\right\|_X \left\|\sigma - \theta_h\sigma\right\|_X + \left\|\sigma_\lambda - \theta_h\sigma_\lambda\right\|_X \left\|\varepsilon_h - Bu_h\right\|_X. \qquad (66)$$

Пусть $L = [L_2(\Omega)]^n$ и решение u_λ задачи (60) принадлежит пространству, содержащемуся в U, с более сильной топологией, т.е. пространству $[H^2(\Omega)]^n \cap U$. Тогда для достаточно регулярных исходных данных вспомогательная задача (60) разрешима не только в обобщенном, но и в классическом смысле. Будем исходить из предположения о регулярности [8], согласно которому существуют такие положительные постоянные K_1, K_2 и K_3, что

$$\left\|u_\lambda\right\|_{2,\Omega} \le K_1\left|\rho_\lambda\right|_{0,\Omega}, \quad \left\|\varepsilon_\lambda\right\|_{1,\Omega} \le K_2\left|\rho_\lambda\right|_{0,\Omega}, \quad \left\|\sigma_\lambda\right\|_{1,\Omega} \le K_3\left|\rho_\lambda\right|_{0,\Omega}. \qquad (67)$$

Кроме того, на основании неравенств (34) и (42), а также результатов об интерполяции [9, 10] можно заключить, что существуют такие не зависящие от h постоянные M_1, M_2 и M_3, что

$$\left\| \varepsilon_\lambda - \varphi_{\lambda h} \right\|_X \le M_1 h \left| u_\lambda \right|_{2,\Omega}; \qquad \left\| \varphi_{\lambda h} - I_h^{-1} \varphi_{\lambda h} \right\|_X \le M_2 h \left| \varepsilon_\lambda \right|_{1,\Omega};$$
$$\left\| \sigma - \theta_h \sigma \right\|_X \le M_3 h \left| \sigma_\lambda \right|_{1,\Omega}. \tag{68}$$

С использованием оценок (67) и (68) приходим к тому, что существуют такие не зависящие от h положительные константы $c_1 = M_1 K_1$, $c_2 = M_2 K_2$ и $c_3 = M_3 K_3$, при которых имеют место неравенства

$$\left\| \varepsilon_\lambda - \varphi_{\lambda h} \right\|_X \le c_1 h \left\| \rho_\lambda \right\|_L; \qquad \left\| \varphi_{\lambda h} - I_h^{-1} \varphi_{\lambda h} \right\|_X \le c_2 h \left\| \rho_\lambda \right\|_L;$$
$$\left\| \sigma - \theta_h \sigma \right\|_X \le c_3 h \left\| \rho_\lambda \right\|_L. \tag{69}$$

Полагая $\rho_\lambda = u - u_h \in L$, находим

$$\left\| u - u_h \right\|_L \le h \left(c_1 \left\| \sigma - \Phi(\varepsilon_h) \right\|_X + c_2 \left\| \sigma - \theta_h \sigma \right\|_X + c_3 \left\| \varepsilon_h - B u_h \right\|_X \right), \tag{70}$$

откуда согласно оценкам (44) и (58) получаем такие не зависящие от h постоянные C_1, C_2 и C_3, что

$$\left\| u - u_h \right\|_L \le h \left(C_1 \inf_{\chi_h \in X_h} \left\| \sigma - \chi_h \right\|_X + C_2 \inf_{\eta_h \in X_h} \left\| \varepsilon - \eta_h \right\|_X + \right.$$
$$\left. + C_3 \inf_{\bar{\tau}_h \in \bar{Y}_h} \left\| \varepsilon - \bar{\tau}_h \right\|_X \right). \tag{71}$$

Пусть $L = [L_2(\Gamma_\sigma)]^n$ и $\rho_\lambda = \gamma_0(u - u_h) \in [H^{1/2}(\Gamma_\sigma)]^n$ – сужение $u - u_h \in U$ на Γ_σ множества Ω. Будем исходить из предположения о регулярности, согласно которому существуют такие вещественные положительные константы K_4, K_5 и K_6, что

$$\left\| u_\lambda \right\|_{2,\Omega} \le K_4 \left\| \rho_\lambda \right\|_{1/2,\Gamma_\sigma}; \qquad \left\| \varepsilon_\lambda \right\|_{1,\Omega} \le K_5 \left\| \rho_\lambda \right\|_{1/2,\Gamma_\sigma};$$
$$\left\| \sigma_\lambda \right\|_{1,\Omega} \le K_6 \left\| \rho_\lambda \right\|_{1/2,\Gamma_\sigma}. \tag{72}$$

Кроме того, $u - u_h$ – элемент пространства U и, значит, можно показать [9], что существует такая постоянная $c > 0$, при которой справедливо неравенство

$$\left\| \rho_\lambda \right\|_{1/2,\Gamma_\sigma} \le c \left\| u - u_h \right\|_U. \tag{73}$$

На основании оценок (68), (72) и (73) приходим к таким не зависящим от h константам $c_4 = c M_1 K_4$, $c_5 = c M_2 K_5$ и $c_6 = c M_3 K_6$, для которых имеют место неравенства

$$\left\| \varepsilon_\lambda - \varphi_{\lambda h} \right\|_X \le c_4 h \left\| \varepsilon - Bu_h \right\|_Y; \qquad \left\| \varphi_{\lambda h} - I_h^{-1} \varphi_{\lambda h} \right\|_X \le c_5 h \left\| \varepsilon - Bu_h \right\|_Y;$$
$$\left\| \sigma - \theta_h \sigma \right\|_X \le c_6 h \left\| \varepsilon - Bu_h \right\|_Y. \tag{74}$$

С учетом оценок (66), (72)–(74) находим

$$\left\| u - u_h \right\|_L^2 \le h(c_4 \left\| \sigma - \Phi(\varepsilon_h) \right\|_X + c_5 \left\| \sigma - \theta_h \sigma \right\|_X +$$
$$+ c_6 \left\| \varepsilon_h - Bu_h \right\|_X) \left\| \varepsilon - Bu_h \right\|_Y, \tag{75}$$

откуда с использованием неравенств (44), (45) и (58) получаем такие не зависящие от h постоянные C_1, C_2 и C_3, что

$$\left\| u - u_h \right\|_L \le \sqrt{h}\, (C_1 \inf_{\chi_h \in X_h} \left\| \sigma - \chi_h \right\|_X + C_2 \inf_{\eta_h \in X_h} \left\| \varepsilon - \eta_h \right\|_X +$$
$$+ C_3 \inf_{\bar{\tau}_h \in Y_h} \left\| \varepsilon - \bar{\tau}_h \right\|_X). \tag{76}$$

На основании оценок (71) и (76) приходим к выводу, что погрешность аппроксимации для перемещений $u - u_h$ имеет более высокий порядок сходимости, чем погрешность аппроксимации для деформаций. При этом улучшение сходимости аппроксимации для напряжений и деформаций не приводит к ухудшению сходимости перемещений.

Применение численного интегрирования. Далее обозначение $[\cdot;\cdot]_X$ следует понимать так, что для вычисления скалярного произведения $(\cdot;\cdot)_X$ применяется численное интегрирование. Ограничимся рассмотрением специальных квадратурных (кубатурных) формул, для которых справедливы равенства:

$$[\eta_h, \bar{\tau}_h]_X = (\eta_h, \bar{\tau}_h)_X, \quad \forall \eta_h \in X_h, \qquad \forall \bar{\tau}_h \in Y_h;$$
$$[\bar{\eta}_h, \bar{\tau}_h]_X = (\bar{\eta}_h, \bar{\tau}_h)_X, \quad \forall \bar{\eta}_h, \bar{\tau}_h \in Y_h. \tag{77}$$

Полагаем, что билинейная форма $[\cdot;\cdot]_X$ на $X_h \times X_h$ индуцирует скалярное произведение $[\cdot;\cdot]_X$ и норму $[\cdot]_X = [\cdot;\cdot]_X^{1/2}$, эквивалентную основной норме $\left\| \cdot \right\|_X$, причем

$$\left\| \eta_h \right\|_X \le [\eta_h]_X \le R \left\| \eta_h \right\|_X, \qquad \forall \eta_h \in X_h, \tag{78}$$

где R – вещественная положительная константа, не зависящая от параметра h. Тогда X_h – гильбертово пространство, в котором скалярное произведение и норма задаются формой $[\cdot;\cdot]_X$.

По аналогии с уравнениями (10) определим дискретную задачу следующим образом. Найти тройку $(\underline{u}_h, \underline{\varepsilon}_h, \underline{\sigma}_h) \in U_h \times X_h \times X_h$ такую, что

$$\begin{cases} [\underline{\varepsilon}_h, \eta_h]_X = (B\underline{u}_h, \eta_h)_X, & \forall \eta_h \in X_h; \\ [\underline{\sigma}_h, \chi_h]_X = [\Phi(\underline{\varepsilon}_h), \chi_h]_X, & \forall \chi_h \in X_h; \\ (\underline{\sigma}_h, Bv_h)_X = \rho(v_h), & \forall v_h \in U_h. \end{cases} \qquad (79)$$

Для формулировки условий устойчивости и сходимости решения дискретной задачи (79) введем в рассмотрение проектирующий оператор $\underline{I}_h$, который ставит в соответствие каждому элементу из пространства Y_h его проекцию в X_h. Оператор $\underline{I}_h$, ассоциируемый со скалярным произведением $[\cdot;\cdot]_X$, определим из равенства

$$[\overline{\tau}_h - \underline{I}_h \overline{\tau}_h, \eta_h]_X = 0, \qquad \forall \overline{\tau}_h \in Y_h, \qquad \forall \eta_h \in X_h. \qquad (80)$$

Тогда элемент $\underline{I}_h \overline{\tau}_h$ – суть ортогональная проекция $\overline{\tau}_h \in Y_h$ на пространство X_h, в котором введено скалярное произведение $[\cdot;\cdot]_X$, и, следовательно, для любого $\overline{\tau}_h \in Y_h$ имеем

$$[\overline{\tau}_h - \underline{I}_h \overline{\tau}_h]_X = \inf_{\eta_h \in X_h} [\overline{\tau}_h - \eta_h]_X. \qquad (81)$$

С помощью первой формулы (77) устанавливаем взаимосвязь между операторами $\underline{I}_h$ и I_h, которая в дальнейшем будет играть важную роль в анализе погрешности аппроксимации:

$$(\eta_h, I_h \overline{\tau}_h)_X = (\eta_h, \overline{\tau}_h)_X = [\eta_h, \underline{I}_h \overline{\tau}_h]_X, \qquad \forall \eta_h \in X_h, \qquad \forall \overline{\tau}_h \in Y_h. \qquad (82)$$

С использованием ортопроектора $\underline{I}_h$: $Y_h \to X_h$ уравнения (79) запишем в эквивалентном виде:

$$\begin{cases} [\underline{\varepsilon}_h, \eta_h]_X = [\underline{I}_h B\underline{u}_h, \eta_h]_X, & \forall \eta_h \in X_h; \\ [\underline{\sigma}_h, \chi_h]_X = [\Phi(\underline{\varepsilon}_h), \chi_h]_X, & \forall \chi_h \in X_h; \\ [\underline{\sigma}_h, \underline{I}_h Bv_h]_X = \rho(v_h), & \forall v_h \in U_h, \end{cases} \qquad (83)$$

откуда следует, что элемент $\underline{\varepsilon}_h = \underline{I}_h B\underline{u}_h$ – суть ортогональная проекция $B\underline{u}_h \in Y_h$ на пространство X_h относительно скалярного произведения $[\cdot;\cdot]_X$, причем

$$(\underline{\varepsilon}_h, \eta_h)_X = (\underline{I}_h B\underline{u}_h, \eta_h)_X, \qquad \forall \eta_h \in X_h. \qquad (84)$$

Систему уравнений (83) можно представить в форме одного нелинейного операторного уравнения относительно перемещений:

$$\underline{A}_h(\underline{u}_h) = \rho_h \quad \text{в} \quad U_h^*, \qquad \underline{u}_h \in U_h, \qquad (85)$$

где $\underline{A}$: $U_h \to U_h^*$ – нелинейный оператор, определяемый с помощью отображения

$$\underline{A}_h(\underline{u}_h): v_h \in U_h \to [\underline{\sigma}_h(\underline{u}_h), \underline{\varepsilon}_h(v_h)]_X =$$

$$= [\Phi(\underline{I}_h B \underline{u}_h), \underline{I}_h B v_h]_X = \left\langle \underline{A}_h(\underline{u}_h), v_h \right\rangle. \tag{86}$$

Условия устойчивости. Если выполняется условие устойчивости (16) и скалярное произведение $[\cdot;\cdot]_X$ в X_h удовлетворяет неравенствам (78), то дискретная задача, описываемая уравнениями (79), однозначно разрешима при любом h.

Действительно, принимая в равенствах (82) элемент $\eta_h \in X_h$ в виде $\eta_h = I_h \bar{\tau}_h \in \mathrm{Im}(I_h)$, согласно неравенству Коши–Буняковского–Шварца и правому неравенству (78) для произвольного $\bar{\tau}_h \in Y_h$ находим

$$\left\| I_h \bar{\tau}_h \right\|_X^2 = [I_h \bar{\tau}_h, \underline{I}_h \bar{\tau}_h]_X \le [I_h \bar{\tau}_h]_X [\underline{I}_h \bar{\tau}_h]_X \le R \left\| I_h \bar{\tau}_h \right\|_X [\underline{I}_h \bar{\tau}_h]_X, \tag{87}$$

откуда с учетом условия (16) имеем

$$\frac{d}{R} \left\| \bar{\tau}_h \right\|_X \le [\underline{I}_h \bar{\tau}_h]_X, \qquad \forall \bar{\tau}_h \in Y_h. \tag{88}$$

Тогда с использованием свойств оператора Φ: $\eta \in X \to \Phi(\eta) = D(\eta)\eta$ и условия устойчивости (88) получаем, что оператор $\underline{A}_h$: $U_h \to U_h^*$ является сильномонотонным и липшиц-непрерывным, т.е. выполняются неравенства

$$\begin{aligned} &\left\langle \underline{A}_h(v_h) - \underline{A}_h(w_h), v_h - w_h \right\rangle \ge m \frac{d^2}{R^2} \left\| v_h - w_h \right\|_U^2, \quad \forall v_h, w_h \in U_h; \\ &\left\| \underline{A}_h(v_h) - \underline{A}_h(w_h) \right\|_{U^*} \le M \left\| v_h - w_h \right\|_U, \qquad \forall v_h, w_h \in U_h. \end{aligned} \tag{89}$$

Следовательно, решение уравнения (85) существует и единственно, а также непрерывно зависит от правой части, т.е. от приложенных нагрузок $\rho \in U^*$. При этом справедливы априорные оценки:

$$\left\| \underline{u}_h \right\|_U \le \frac{R^2}{md^2} \left\| \rho \right\|_{U^*}; \qquad \left\| \underline{\varepsilon}_h \right\|_X \le \frac{R}{md} \left\| \rho \right\|_{U^*}. \tag{90}$$

Транспозицию оператора $\underline{I}_h$ обозначим через $\underline{I}'_h$. Оператор $\underline{I}'_h$ отображает X_h на Y_h и определяется соотношением

$$(\underline{I}'_h \eta_h, \bar{\tau}_h)_X = [\eta_h, \underline{I}_h \bar{\tau}_h]_X, \qquad \forall \eta_h \in X_h, \qquad \forall \bar{\tau}_h \in Y_h. \tag{91}$$

Тогда для произвольного элемента $\eta_h \in X_h$ справедливо равенство

$$(\eta_h - \underline{I}'_h \eta_h, \bar{\tau}_h)_X = 0, \qquad \forall \bar{\tau}_h \in Y_h. \tag{92}$$

Таким образом, $\underline{I}'_h \colon X_h \to Y_h$ – проектирующий оператор и $\underline{I}'_h \eta_h$ – ортогональная проекция элемента $\eta_h \in X_h$ на пространство Y_h. Более того, согласно равенству (91) для всякого $\underline{\mu}_h \in [\mathrm{Im}(\underline{I}_h)]^{\perp}$ имеем

$$(\underline{I}'_h \underline{\mu}_h, \bar{\tau}_h)_X = [\underline{\mu}_h, \underline{I}_h \bar{\tau}_h]_X = 0, \qquad \forall \bar{\tau}_h \in Y_h, \tag{93}$$

откуда ввиду произвольности выбора $\bar{\tau}_h \in Y_h$ получаем $\underline{\mu}_h \in \ker(\underline{I}'_h)$, где $\ker(\underline{I}'_h)$ – ядро оператора $\underline{I}'_h$. Другими словами, $\ker(\underline{I}'_h) = [\mathrm{Im}(\underline{I}_h)]^{\perp}$.

Итак, ортопроекторы $\underline{I}_h$ и $\underline{I}'_h$ порождают разложение пространства X_h, в котором введено скалярное произведение $[\cdot;\cdot]_X$, в прямую сумму подпространств $X_h = \mathrm{Im}(\underline{I}_h) \oplus \ker(\underline{I}'_h)$. Иначе говоря, любой элемент $\eta_h \in X_h$ может быть представлен в виде разложения $\eta_h = \underline{\pi}_h + \underline{\mu}_h$, где $\underline{\pi}_h \in \mathrm{Im}(\underline{I}_h)$ и $\underline{\mu}_h \in \ker(\underline{I}'_h)$, причем

$$[\underline{\mu}_h]_X = [\eta_h - \underline{\pi}_h]_X = \inf_{\bar{\tau}_h \in Y_h} [\eta_h - \underline{I}_h \bar{\tau}_h]_X, \qquad \forall \eta_h \in X_h. \tag{94}$$

Поскольку оператор $\underline{I}_h$ удовлетворяет условию устойчивости (88), существует обратный линейный ограниченный оператор $\underline{I}_h^{-1}$, действующий из $\mathrm{Im}(\underline{I}_h)$ в Y_h, для которого справедлива оценка:

$$\left\| \underline{I}_h^{-1} \underline{\pi}_h \right\|_X \le \frac{R}{d} [\underline{\pi}_h]_X, \qquad \forall \underline{\pi}_h \in \mathrm{Im}(\underline{I}_h). \tag{95}$$

Сужение $\underline{I}'_h$ на $\mathrm{Im}(\underline{I}_h)$ обозначим через $\widetilde{\underline{I}}'_h$. Оператор $\widetilde{\underline{I}}'_h$ отображает $\mathrm{Im}(\underline{I}_h)$ на Y_h и устанавливает между элементами этих пространств взаимно однозначное соответствие. Определяя в равенстве (91) элемент $\bar{\tau}_h \in Y_h$ с помощью соотношения $\bar{\tau}_h = \underline{I}_h^{-1} \underline{\pi}_h \in Y_h$, в соответствии с неравенством Коши–Буняковского–Шварца и оценкой (95) для произвольного $\underline{\pi}_h \in \mathrm{Im}(\underline{I}_h)$ получаем

$$[\underline{\pi}_h]_X^2 = (\widetilde{\underline{I}}'_h \underline{\pi}_h, \underline{I}_h^{-1} \underline{\pi}_h)_X \le \left\| \widetilde{\underline{I}}'_h \underline{\pi}_h \right\|_X \left\| \underline{I}_h^{-1} \underline{\pi}_h \right\|_X \le \frac{R}{d} \left\| \widetilde{\underline{I}}'_h \underline{\pi}_h \right\|_X [\underline{\pi}_h]_X, \tag{96}$$

откуда находим

$$\frac{d}{R} [\underline{\pi}_h]_X \le \left\| \widetilde{\underline{I}}'_h \underline{\pi}_h \right\|_X, \qquad \forall \underline{\pi}_h \in \mathrm{Im}(\underline{I}_h). \tag{97}$$

Любой элемент $\eta_h \in X_h$ может быть представлен как

$$\begin{aligned} \eta_h &= \pi_h + \mu_h, \quad \pi_h \in \mathrm{Im}(I_h), \quad \mu_h \in \ker(I'_h); \\ \eta_h &= \underline{\pi}_h + \underline{\mu}_h, \quad \underline{\pi}_h \in \mathrm{Im}(\underline{I}_h), \quad \underline{\mu}_h \in \ker(\underline{I}'_h). \end{aligned} \tag{98}$$

Тогда можно установить взаимосвязь между элементами $\pi_h \in \mathrm{Im}(I_h)$ и $\underline{\pi}_h \in \mathrm{Im}(\underline{I}_h)$. Действительно, согласно соотношениям (82) и (98), для всякого $\pi_h \in \mathrm{Im}(I_h)$ элемент $\underline{\pi}_h \in \mathrm{Im}(\underline{I}_h)$ определяется из равенства

$$[\underline{\pi}_h, \underline{I}_h \bar{\tau}_h]_X = (\pi_h, I_h \bar{\tau}_h)_X, \qquad \forall\, \bar{\tau}_h \in Y_h. \tag{99}$$

С использованием ортопроекторов $\widetilde{I}_h$ и $\widetilde{\underline{I}'}_h$ приходим к операторному уравнению

$$\widetilde{\underline{I}'}_h \underline{\pi}_h = \widetilde{I}'_h \pi_h \quad \text{в} \quad Y_h, \tag{100}$$

откуда следует, что элемент $\underline{\pi}_h \in \mathrm{Im}(\underline{I}_h)$ определяется выражением

$$\underline{\pi}_h = \underline{I}_h (\widetilde{\underline{I}'}_h \underline{I}_h)^{-1} \widetilde{I}'_h \pi_h, \qquad \forall\, \pi_h \in \mathrm{Im}(I_h). \tag{101}$$

Заметим, что такая форма записи элемента $\underline{\pi}_h \in \mathrm{Im}(\underline{I}_h)$ является вполне корректной. Действительно, оператор $\widetilde{\underline{I}'}_h$ удовлетворяет неравенству (97) и, значит, существует обратный линейный ограниченный оператор $(\widetilde{\underline{I}'}_h)^{-1}$ из Y_h в $\mathrm{Im}(\underline{I}_h)$. Кроме того, $\widetilde{\underline{I}'}_h \underline{I}_h \colon Y_h \to Y_h$ – самосопряженный положительно определенный ограниченный оператор в Y_h, для которого существует обратный линейный ограниченный оператор $(\widetilde{\underline{I}'}_h \underline{I}_h)^{-1}$, действующий в Y_h. Таким образом, имеет место взаимно однозначное соответствие между элементами пространств $\mathrm{Im}(I_h)$ и $\mathrm{Im}(\underline{I}_h)$.

Покажем, что линейные биективные отображения $\mathrm{Im}(I_h) \to \mathrm{Im}(\underline{I}_h)$ и $\mathrm{Im}(\underline{I}_h) \to \mathrm{Im}(I_h)$ есть проектирующие операторы. Действительно, согласно определению элемента $\underline{\pi}_h \in \mathrm{Im}(\underline{I}_h)$ для произвольного $\pi_h \in \mathrm{Im}(I_h)$ справедливо соотношение

$$[\pi_h - \underline{\pi}_h, \underline{I}_h \bar{\tau}_h]_X = 0, \qquad \forall\, \bar{\tau}_h \in Y_h. \tag{102}$$

Исходя из этого элемент $\underline{\pi}_h \in \mathrm{Im}(\underline{I}_h)$ – суть ортогональная проекция $\pi_h \in \mathrm{Im}(I_h)$ на пространство $\mathrm{Im}(\underline{I}_h)$ относительно скалярного произведения $[\cdot;\cdot]_X$. С учетом того что $\pi_h \in \mathrm{Im}(I_h)$ – элемент пространства X_h, приходим к ортогональному разложению вида $\pi_h = \underline{\pi}_h + \underline{\lambda}_h$, где $\underline{\pi}_h \in \mathrm{Im}(\underline{I}_h)$, $\underline{\lambda}_h \in \ker(\underline{I}'_h)$, причем

$$[\underline{\lambda}_h]_X = [\pi_h - \underline{\pi}_h]_X = \inf_{\bar{\tau}_h \in Y_h} [\pi_h - \underline{I}_h \bar{\tau}_h]_X, \qquad \forall\, \pi_h \in \mathrm{Im}(I_h). \tag{103}$$

Очевидно, что справедливо и обратное утверждение. Действительно, согласно определению элементов $\pi_h \in \mathrm{Im}(I_h)$ и $\underline{\pi}_h \in \mathrm{Im}(\underline{I}_h)$ имеем

$$(\underline{\pi}_h - \pi_h, I_h \bar{\tau}_h)_X = 0, \qquad \forall\, \bar{\tau}_h \in Y_h. \tag{104}$$

Тогда элемент $\pi_h \in \mathrm{Im}(I_h)$ – суть ортогональная проекция $\underline{\pi}_h \in \mathrm{Im}(\underline{I}_h)$ на пространство $\mathrm{Im}(I_h)$ относительно скалярного произведения $(\cdot;\cdot)_X$, и, следовательно, элемент $\underline{\pi}_h \in \mathrm{Im}(\underline{I}_h)$ допускает ортогональное разложение в виде $\underline{\pi}_h = \pi_h + \lambda_h$, где $\pi_h \in \mathrm{Im}(I_h)$; $\lambda_h \in \ker(I'_h)$, причем

$$\left\| \lambda_h \right\|_X = \left\| \underline{\pi}_h - \pi_h \right\| = \inf_{\bar{\tau}_h \in Y_h} \left\| \underline{\pi}_h - I_h \bar{\tau}_h \right\|_X, \qquad \forall \underline{\pi}_h \in \mathrm{Im}(\underline{I}_h). \tag{105}$$

Элементы $\underline{\lambda}_h \in \ker(\underline{I}'_h)$ и $\lambda_h \in \ker(I'_h)$ взаимосвязаны между собой простым соотношением $\underline{\lambda}_h = -\lambda_h$ и имеют две эквивалентные формы представления следующего вида: $\underline{\lambda}_h = \pi_h - \underline{\pi}_h = \underline{\mu}_h - \mu_h \in \ker(\underline{I}'_h)$ и $\lambda_h = \underline{\pi}_h - \pi_h = \mu_h - \underline{\mu}_h \in \ker(I'_h)$.

Итак, по определению $\underline{\pi}_h \in \mathrm{Im}(\underline{I}_h)$ – суть ортогональная проекция $\pi_h \in \mathrm{Im}(I_h)$ на пространство $\mathrm{Im}(\underline{I}_h)$, и их проекции в Y_h совпадают. Кроме того, $\pi_h \in \mathrm{Im}(I_h)$ – ортогональная проекция $\underline{\pi}_h \in \mathrm{Im}(\underline{I}_h)$ на $\mathrm{Im}(I_h)$, и их проекции в Y_h тождественно равны. Исходя из этого можем записать следующее равенство:

$$\left\| \underline{\pi}_h - \bar{\tau}_h \right\|_X^2 = \left\| \underline{\pi}_h - \pi_h \right\|_X^2 + \left\| \pi_h - \bar{\tau}_h \right\|_X^2, \qquad \forall \bar{\tau}_h \in Y_h. \tag{106}$$

С использованием неравенства (78) получаем соотношения эквивалентности норм $[\cdot]_X$ и $\|\cdot\|_X$ для элементов $\pi_h \in \mathrm{Im}(I_h)$ и $\underline{\pi}_h \in \mathrm{Im}(\underline{I}_h)$:

$$\left\| \pi_h \right\|_X \le \left\| \underline{\pi}_h \right\|_X \le [\underline{\pi}_h]_X \le [\pi_h]_X \le R \left\| \pi_h \right\|_X. \tag{107}$$

С учетом этих оценок приходим к неравенствам, которые справедливы для произвольных элементов $\pi_h \in \mathrm{Im}(I_h)$ и $\underline{\pi}_h \in \mathrm{Im}(\underline{I}_h)$, взаимосвязанных между собой уравнением (100):

$$\left\| \underline{\pi}_h - \pi_h \right\|_X \le \frac{\sqrt{R^2 - 1}}{R} [\underline{\pi}_h]_X \le \sqrt{R^2 - 1} \left\| \pi_h \right\|_X; \tag{108}$$

$$\left\| \pi_h - I_h \underline{I}_h^{-1} \underline{\pi}_h \right\|_X \le \sqrt{R^2 - 1}\, [\underline{\pi}_h]_X \le R\sqrt{R^2 - 1} \left\| \pi_h \right\|_X. \tag{109}$$

Покажем теперь взаимосвязь между элементами $\underline{\mu}_h \in \ker(\underline{I}'_h)$ и $\mu_h \in \ker(I'_h)$. Из равенства (98) вытекает, что $\underline{\mu}_h = \mu_h + \pi_h - \underline{\pi}_h \in \ker(\underline{I}'_h)$, где $\underline{\pi}_h \in \mathrm{Im}(\underline{I}_h)$ и $\pi_h \in \mathrm{Im}(I_h)$, причем

$$[\underline{\mu}_h, \underline{I}_h \bar{\tau}_h]_X = [\mu_h, \underline{I}_h \bar{\tau}_h]_X = (\underline{\mu}_h, I_h \bar{\tau}_h)_X = (\mu_h, I_h \bar{\tau}_h)_X = 0, \qquad \forall \bar{\tau}_h \in Y_h. \tag{110}$$

Тогда можем записать

$$[\underline{\mu}_h]_X^2 = (\mu_h, \underline{\mu}_h)_X + [\eta_h, \underline{\mu}_h]_X - (\eta_h, \underline{\mu}_h)_X, \quad \forall \eta_h \in X_h, \quad (111)$$

откуда следует

$$[\underline{\mu}_h]_X \le \|\mu_h\|_X + \sup_{\chi_h \in X_h} \frac{|[\eta_h, \chi_h]_X - (\eta_h, \chi_h)_X|}{\|\chi_h\|_X}. \quad (112)$$

Заметим, что второе слагаемое в правой части неравенства (112) обусловлено ошибкой согласования билинейных форм $[\cdot;\cdot]_X$ и $(\cdot;\cdot)_X$, что связано с погрешностью численного интегрирования при вычислении скалярного произведения $(\cdot;\cdot)_X$ на элементах из пространства X_h.

Неравенство (112) позволяет оценить разность $\underline{\pi}_h - \pi_h \in \ker(I'_h)$. Действительно, согласно определению элемента $\lambda_h \in \ker(I'_h)$ имеем $\underline{\pi}_h - \pi_h = \mu_h - \underline{\mu}_h \in \ker(I'_h)$, и, следовательно, на основании неравенства треугольника получаем

$$\|\underline{\pi}_h - \pi_h\|_X \le \|\mu_h\|_X + \|\underline{\mu}_h\|_X, \quad (113)$$

откуда с учетом неравенства (112) для произвольного $\eta_h \in X_h$ находим

$$\|\underline{\pi}_h - \pi_h\|_X \le 2\|\mu_h\|_X + \sup_{\chi_h \in X_h} \frac{|[\eta_h, \chi_h]_X - (\eta_h, \chi_h)_X|}{\|\chi_h\|_X}. \quad (114)$$

Более точную оценку можно получить исходя из равенства

$$\|\lambda_h\|_X^2 = (\mu_h, \lambda_h)_X + \|\underline{\mu}_h\|_X^2 - (\underline{\mu}_h, \mu_h)_X. \quad (115)$$

Тогда в соответствии с равенствами (112) и (115) имеем неравенство

$$\|\lambda_h\|_X^2 \le \|\mu_h\|_X \|\lambda_h\|_X + \|\underline{\mu}_h\|_X \sup_{\chi_h \in X_h} \frac{|[\eta_h, \chi_h]_X - (\eta_h, \chi_h)_X|}{\|\chi_h\|_X}, \quad (116)$$

откуда нетрудно получить следующую оценку:

$$\|\lambda_h\|_X \le \|\mu_h\|_X + \sup_{\chi_h \in X_h} \frac{|[\eta_h, \chi_h]_X - (\eta_h, \chi_h)_X|}{\|\chi_h\|_X}. \quad (117)$$

Возможно, что эта оценка – неоптимальна, тем не менее она приводит к нужному результату при анализе погрешности аппроксимации. На основании (117) справедливо неравенство:

$$\left\| \underline{\pi}_h - \pi_h \right\|_X \leq \left\| \mu_h \right\|_X + \sup_{\chi_h \in X_h} \frac{\left| [\eta_h, \chi_h]_X - (\eta_h, \chi_h)_X \right|}{\left\| \chi_h \right\|_X}. \qquad (118)$$

Замечание 13. Пусть $\eta = Bv \in Y$ для произвольного $v \in U$. Если учесть, что $\theta_h \eta = \underline{\pi}_h + \underline{\mu}_h \in X_h$, где $\underline{\pi}_h \in \mathrm{Im}(\underline{I}_h)$; $\underline{\mu}_h \in \ker(\underline{I}'_h)$, то с использованием ортогонального разложения элемента $\eta - \underline{I}_h^{-1} \underline{\pi}_h \in Y$ в виде $\eta - \underline{I}_h^{-1} \underline{\pi}_h = \eta - BP_h v + BP_h v - \underline{I}_h^{-1} \underline{\pi}_h$ имеем

$$\left\| \eta - \underline{I}_h^{-1} \underline{\pi}_h \right\|_X^2 = \left\| \eta - BP_h v \right\|_X^2 + \left\| BP_h v - \underline{I}_h^{-1} \underline{\pi}_h \right\|_X^2. \qquad (119)$$

Для оценки второго слагаемого (119) запишем равенство

$$(BP_h v - \underline{I}_h^{-1} \underline{\pi}_h, \chi_h)_X = (BP_h v - \eta, \chi_h - \bar{\tau}_h)_X + (\mu_h, \chi_h - \underline{\chi}_h)_X +$$

$$+ (\theta_h \eta, \underline{\chi}_h)_X - [\theta_h \eta, \underline{\chi}_h]_X, \qquad \forall \bar{\tau}_h \in Y_h, \qquad \forall \chi_h \in \mathrm{Im}(I_h), \quad (120)$$

в котором полагаем $\bar{\tau}_h = \widetilde{\underline{I}'}_h \chi_h \in Y_h$, $\chi_h = I_h BP_h v - I_h \underline{I}_h^{-1} \underline{\pi}_h \in \mathrm{Im}(I_h)$.

Применяя для правой части (120) неравенство Коши–Буняковского–Шварца, а затем неравенства (27), (107) и (108), с учетом условия устойчивости (16) находим

$$\left\| BP_h v - \underline{I}_h^{-1} \underline{\pi}_h \right\|_X \leq \frac{\sqrt{1-d^2}}{d} \left\| \eta - BP_h v \right\|_X + \frac{\sqrt{R^2 - 1}}{d} \left\| \mu_h \right\|_X +$$

$$+ \frac{R}{d} \sup_{\chi_h \in X_h} \frac{\left| [\theta_h \eta, \chi_h]_X - (\theta_h \eta, \chi_h)_X \right|}{\left\| \chi_h \right\|_X}. \qquad (121)$$

На основании равенства (119) с учетом оценки (121) и свойств ортогональных проекций (30), (36) приходим к неравенству

$$\left\| \eta - \underline{I}_h^{-1} \underline{\pi}_h \right\|_X \leq \frac{1}{d} \inf_{\bar{\tau}_h \in Y_h} \left\| \eta - \bar{\tau}_h \right\|_X + \frac{\sqrt{R^2 - 1}}{d} \inf_{\bar{\tau}_h \in Y_h} \left\| \widetilde{\theta}_h (\eta - \bar{\tau}_h) \right\|_X +$$

$$+ \frac{R}{d} \sup_{\chi_h \in X_h} \frac{\left| [\theta_h \eta, \chi_h]_X - (\theta_h \eta, \chi_h)_X \right|}{\left\| \chi_h \right\|_X}. \qquad (122)$$

Таким образом, получены все необходимые оценки, используемые ниже при доказательстве сходимости смешанной аппроксимации с учетом применения формул численного интегрирования (77).

Теорема сходимости при численном интегрировании. Если выполняется условие устойчивости (16) и формулы численного интегрирования (77) удовлетворяют неравенствам (78), то существуют такие не зависящие от h постоянные C_1, C_2, ..., C_9, что

$$\left\|\varepsilon-\underline{\varepsilon}_h\right\|_X \le C_1 \inf_{\chi_h\in X_h}\left\|\sigma-\chi_h\right\|_X + C_2\Big(\inf_{\eta_h\in X_h}\left\|\varepsilon-\eta_h\right\|_X +$$

$$+\inf_{\overline{\tau}_h\in Y_h}\left\|\widetilde{\theta}_h(\varepsilon-\overline{\tau}_h)\right\|_X\Big) + \sup_{\chi_h\in X_h}\frac{\left|[\theta_h\varepsilon,\chi_h]_X-(\theta_h\varepsilon,\chi_h)_X\right|}{\left\|\chi_h\right\|_X}; \qquad (123)$$

$$\left\|\sigma-\Phi(\underline{\varepsilon}_h)\right\|_X \le C_3 \inf_{\chi_h\in X_h}\left\|\sigma-\chi_h\right\|_X + C_4\Big(\inf_{\eta_h\in X_h}\left\|\varepsilon-\eta_h\right\|_X +$$

$$+\inf_{\overline{\tau}_h\in Y_h}\left\|\widetilde{\theta}_h(\varepsilon-\overline{\tau}_h)\right\|_X\Big) + C_5\sup_{\chi_h\in X_h}\frac{\left|[\theta_h\varepsilon,\chi_h]_X-(\theta_h\varepsilon,\chi_h)_X\right|}{\left\|\chi_h\right\|_X}; \qquad (124)$$

$$\left\|\varepsilon-B\underline{u}_h\right\|_X \le C_6 \inf_{\chi_h\in X_h}\left\|\sigma-\chi_h\right\|_X + C_7\inf_{\eta_h\in X_h}\left\|\varepsilon-\eta_h\right\|_X +$$

$$+C_8\inf_{\overline{\tau}_h\in Y_h}\left\|\varepsilon-\overline{\tau}_h\right\|_X + C_9\sup_{\chi_h\in X_h}\frac{\left|[\theta_h\varepsilon,\chi_h]_X-(\theta_h\varepsilon,\chi_h)_X\right|}{\left\|\chi_h\right\|_X}, \qquad (125)$$

причем

$$C_1=\frac{R\sqrt{1-d^2}}{md};\qquad C_2=1+\frac{RM}{m};\qquad C_3=MC_1;$$
$$C_4=MC_2;\qquad C_5=M;\qquad C_6=\frac{RC_1}{d};\qquad C_7=\frac{R^2M}{md}; \qquad (126)$$
$$C_8=C_7+\frac{1}{d}(1+\sqrt{R^2-1});\qquad C_9=\frac{R}{d}.$$

◀ Пусть $\theta_h\varepsilon=\underline{\varphi}_h+\underline{\psi}_h\in X_h$, где $\underline{\varphi}_h\in\mathrm{Im}(\underline{I}_h)$; $\underline{\psi}_h\in\ker(\underline{I}'_h)$. Кроме того, $\theta_h\varepsilon=\varphi_h+\psi_h\in X_h$, где $\varphi_h\in\mathrm{Im}(I_h)$; $\psi_h\in\ker(I'_h)$. В соответствии с неравенством треугольника и левым неравенством (78) имеем

$$\left\|\varepsilon-\underline{\varepsilon}_h\right\|_X \le \left\|\varepsilon-\theta_h\varepsilon\right\|_X + [\underline{\varphi}_h-\underline{\varepsilon}_h]_X + [\underline{\psi}_h]_X. \qquad (127)$$

Поскольку $\underline{\varphi}_h-\underline{\varepsilon}_h\in\mathrm{Im}(\underline{I}_h)$, с использованием неравенств (107) находим

$$[\underline{\varphi}_h - \underline{\varepsilon}_h]_X \le [\varphi_h - \varepsilon_h]_X \le R\|\varphi_h - \varepsilon_h\|_X . \tag{128}$$

Таким образом, приходим к неравенству

$$\|\varepsilon - \underline{\varepsilon}_h\|_X \le \frac{R\sqrt{1-d^2}}{md}\|\sigma - \theta_h\sigma\|_X + \left(1 + \frac{RM}{m}\right)\|\varepsilon - \theta_h\varepsilon\|_X +$$

$$+\frac{RM}{m}\|\psi_h\|_X + [\underline{\psi}_h]_X , \tag{129}$$

откуда на основании свойств ортогональных проекций (29), (30) и (112) получаем оценку (123).

Для доказательства оценки (124) используем неравенство

$$\|\sigma - \Phi(\underline{\varepsilon}_h)\|_X = \|\Phi(\varepsilon) - \Phi(\underline{\varepsilon}_h)\|_X \le M\|\varepsilon - \underline{\varepsilon}_h\|_X . \tag{130}$$

Тогда с учетом оценок (123) и (130) имеем неравенство (124).

Для доказательства оценки (125) используем неравенство треугольника и оценки (95), (128). В результате получим

$$\|\varepsilon - B\underline{u}_h\|_X \le \|\varepsilon - \underline{I}_h^{-1}\underline{\varphi}_h\|_X + \frac{R^2}{d}\|\varphi_h - \varepsilon_h\|_X . \tag{131}$$

Итак, имеем оценку (125) как следствие приведенных выше неравенств (50), (118), (131) и свойств ортогональных проекций (29), (34). ▶

Замечание 14. Близость решений $\varepsilon_h - \underline{\varepsilon}_h \in X_h$ оценивается с помощью неравенства треугольника

$$\|\varepsilon_h - \underline{\varepsilon}_h\|_X \le \|\varepsilon_h - \varphi_h + \underline{\varphi}_h - \underline{\varepsilon}_h\|_X + \|\varphi_h - \underline{\varphi}_h\|_X . \tag{132}$$

С учетом оценки (108) имеем

$$\|\varepsilon_h - \varphi_h + \underline{\varphi}_h - \underline{\varepsilon}_h\|_X \le \sqrt{R^2 - 1}\,\|\varepsilon_h - \varphi_h\|_X , \tag{133}$$

и, следовательно, приходим к неравенству

$$\|\varepsilon_h - \underline{\varepsilon}_h\|_X \le \sqrt{R^2 - 1}\,\|\varepsilon_h - \varphi_h\|_X + \|\varphi_h - \underline{\varphi}_h\|_X . \tag{134}$$

С использованием оценок (50) и (118) получаем такие не зависящие от h положительные постоянные C_1, C_2 и C_3, что

$$\left\| \varepsilon_h - \underline{\varepsilon}_h \right\|_X \le C_1 \inf_{\chi_h \in X_h} \left\| \sigma - \chi_h \right\|_X + C_2 \inf_{\eta_h \in X_h} \left\| \varepsilon - \eta_h \right\|_X +$$

$$+ C_3 \inf_{\overline{\tau}_h \in Y_h} \left\| \widetilde{\theta}_h (\varepsilon - \overline{\tau}_h) \right\|_X + \sup_{\chi_h \in X_h} \frac{\left| [\theta_h \varepsilon, \chi_h]_X - (\theta_h \varepsilon, \chi_h)_X \right|}{\left\| \chi_h \right\|_X}. \quad (135)$$

Сопоставление оценок (119) и (135) свидетельствует о том, что погрешность аппроксимации $\varepsilon - \underline{\varepsilon}_h \in X$ и разность решений $\varepsilon_h - \underline{\varepsilon}_h \in X_h$ – суть величины одного порядка малости.

Замечание 15. Для того чтобы оценить разность $Bu_h - B\underline{u}_h \in Y_h$, запишем равенство, которое справедливо для произвольных элементов $\pi_h \in \mathrm{Im}(I_h)$ и $\underline{\pi}_h \in \mathrm{Im}(\underline{I}_h)$, взаимосвязанных между собой уравнением (100):

$$(Bu_h - B\underline{u}_h, \pi_h)_X = (\varepsilon_h - \varphi_h, \pi_h - I_h \underline{I}_h^{-1} \underline{\pi}_h)_X +$$

$$+ (\psi_h, \pi_h - \underline{\pi}_h)_X + (\theta_h \varepsilon, \underline{\pi}_h)_X - [\theta_h \varepsilon, \underline{\pi}_h]_X. \quad (136)$$

Полагая в последнем равенстве $\pi_h = I_h (Bu_h - B\underline{u}_h) \in \mathrm{Im}(I_h)$, в соответствии с неравенством Коши–Буняковского–Шварца и оценками (16), (50), (107)–(109) находим такие не зависящие от h постоянные C_1, C_2, C_3 и C_4, что

$$\left\| Bu_h - B\underline{u}_h \right\|_Y \le C_1 \inf_{\chi_h \in X_h} \left\| \sigma - \chi_h \right\|_X + C_2 \inf_{\eta_h \in X_h} \left\| \varepsilon - \eta_h \right\|_X +$$

$$+ C_3 \inf_{\overline{\tau}_h \in Y_h} \left\| \widetilde{\theta}_h (\varepsilon - \overline{\tau}_h) \right\|_X + C_4 \sup_{\chi_h \in X_h} \frac{\left| [\theta_h \varepsilon, \chi_h]_X - (\theta_h \varepsilon, \chi_h)_X \right|}{\left\| \chi_h \right\|_X}. \quad (137)$$

Согласно оценкам (121) и (137), разность решений $Bu_h - B\underline{u}_h \in Y_h$ не превышает погрешность $\varepsilon - B\underline{u}_h \in Y$. Действительно, в оценку разности (137) не входит третье слагаемое оценки (121), которое вносит основной вклад в погрешность $\varepsilon - B\underline{u}_h \in Y$. Таким образом, применение формул численного интегрирования, удовлетворяющих свойствам (77), не приводит к изменению порядка сходимости погрешности аппроксимации $\varepsilon - Bu_h \in Y$.

Замечание 16. Предположим, что для построения аппроксимирующих подпространств U_h и X_h используются кусочно-полиномиальные функции степени p и r соответственно, причем $r \ge p \ge 1$. Тогда на основании леммы Брэмбла–Гильберта [9, 10] получаем такую не зависящую от h положительную постоянную C и показатель степени $k \ge p \ge 1$, что

$$\sup_{\chi_h \in X_h} \frac{\left| [\theta_h \varepsilon, \chi_h]_X - (\theta_h \varepsilon, \chi_h)_X \right|}{\left\| \chi_h \right\|_X} \le C h^k |\varepsilon|_{k,\Omega}, \qquad \forall \varepsilon \in [H^k(\Omega)]^m. \quad (138)$$

Таким образом, применение формул численного интегрирования, удовлетворяющих свойствам (77), (78), обеспечивает выполнение условия согласования:

$$\sup_{\chi_h \in X_h} \frac{\left| [\theta_h \varepsilon, \chi_h]_X - (\theta_h \varepsilon, \chi_h)_X \right|}{\left\| \chi_h \right\|_X} \to 0 \qquad \text{при} \quad h \to 0. \tag{139}$$

С использованием оценок (123)–(125), (135), (137), (138) получаем

$$\begin{aligned}
&\left\| \varepsilon - \underline{\varepsilon}_h \right\|_X \to 0; && \left\| \sigma - \Phi(\underline{\varepsilon}_h) \right\|_X \to 0 && \text{при} \quad h \to 0;\\
&\left\| u - \underline{u}_h \right\|_U \to 0; && \left\| Bu - B\underline{u}_h \right\|_Y \to 0 && \text{при} \quad h \to 0;\\
&\left\| \varepsilon_h - \underline{\varepsilon}_h \right\|_X \to 0; && \left\| \Phi(\varepsilon_h) - \Phi(\underline{\varepsilon}_h) \right\|_X \to 0 && \text{при} \quad h \to 0;\\
&\left\| u_h - \underline{u}_h \right\|_U \to 0; && \left\| Bu_h - B\underline{u}_h \right\|_Y \to 0 && \text{при} \quad h \to 0.
\end{aligned} \tag{140}$$

Итак, достаточными условиями сходимости смешанной аппроксимации при использовании формул численного интегрирования (77) являются условие устойчивости (16), выполнение неравенств (78) и предельная плотность аппроксимирующих подпространств $U_h \times X_h \times X_h$.

Сходимость перемещений при численном интегрировании. Пусть L – такое гильбертово пространство с нормой $\|\cdot\|_L$ и скалярным произведением $(\cdot;\cdot)_L$, что $U \subset L$, вложение непрерывно и плотно. Пространство L будем отождествлять с сопряженным к нему и, следовательно, его можно отождествить с подпространствами, плотными в сопряженном для U пространстве U^*. Тогда отношение двойственности на $U^* \times U$ можно отождествить со скалярным произведением $(\cdot;\cdot)_L$, определенным на $L \times U \subset L \times L$.

Покажем, что погрешность для перемещений $u - \underline{u}_h$ в метрике пространства L имеет тот же порядок сходимости, что и погрешность $u - \underline{u}_h$. Другими словами, применение формул численного интегрирования, удовлетворяющих свойствам (77), (78) не приводит к изменению порядка сходимости погрешности аппроксимации для перемещений.

С этой целью любому элементу $\rho_\lambda \in L$ поставим в соответствие пару $(u_\lambda, \varepsilon_\lambda) \in U \times Y$ как решение вспомогательной линейной задачи

$$\begin{aligned}
&(\varepsilon_\lambda, \eta)_X = (Bu_\lambda, \eta)_X, && \forall \eta \in X;\\
&(\varepsilon_\lambda, Bv)_X = (\rho_\lambda, v)_L, && \forall v \in U.
\end{aligned} \tag{141}$$

Дискретную задачу, соответствующую уравнениям (141), определим следующим образом. Найти пару $(u_{\lambda h}, \varepsilon_{\lambda h}) \in U_h \times X_h$ такую, что

$$\begin{aligned}
&(\varepsilon_{\lambda h}, \eta_h)_X = (Bu_{\lambda h}, \eta_h)_X, && \forall \eta_h \in X_h;\\
&(\varepsilon_{\lambda h}, Bv_h)_X = (\rho_\lambda, v_h)_L, && \forall v_h \in U_h.
\end{aligned} \tag{142}$$

Учитывая, что $v = u_h - \underline{u}_h$ – элемент пространства U, имеем

$$(\rho_\lambda, u_h - \underline{u}_h)_L = (\varepsilon_\lambda, Bu_h - B\underline{u}_h)_X = (\varepsilon_{\lambda h}, Bu_h - B\underline{u}_h)_X =$$

$$= (\varepsilon_{\lambda h}, \varepsilon_h)_X - [\varepsilon_{\lambda h}, \underline{\varepsilon}_h]_X = (\varepsilon_{\lambda h}, \underline{\varepsilon}_h)_X - [\varepsilon_{\lambda h}, \underline{\varepsilon}_h]_X. \qquad (143)$$

Следовательно, справедливо неравенство

$$\left|(\rho_\lambda, u_h - \underline{u}_h)_L\right| \le \left|(\varepsilon_{\lambda h}, \underline{\varepsilon}_h)_X - [\varepsilon_{\lambda h}, \underline{\varepsilon}_h]_X\right|. \qquad (144)$$

Оценим сверху правую часть неравенства (144), обусловленную погрешностью численного интегрирования. Будем исходить из предположений, что элемент ε_λ принадлежит пространству $[H^1(\Omega)]^m \cap Y$ и для построения аппроксимирующих подпространств U_h и X_h используются кусочно-полиномиальные функции степени p и r соответственно, причем $r \ge p \ge 1$. Тогда в соответствии с “билинейной леммой” и “обратными неравенствами” [11], а также оценками (43), (123), (138) приходим к существованию такой не зависящей от h положительной постоянной $\underline{C}$, что

$$\left|(\varepsilon_{\lambda h}, \underline{\varepsilon}_h)_X - [\varepsilon_{\lambda h}, \underline{\varepsilon}_h]_X\right| \le \underline{C} h^{p+1} \left|u_\lambda\right|_{2,\Omega} \left|u\right|_{p+1,\Omega}. \qquad (145)$$

Пусть $L = [L_2(\Omega)]^n$ и решение u_λ задачи (141) принадлежит пространству $[H^2(\Omega)]^n \cap U$. Тогда существует такая положительная константа K_1, что

$$\left\| u_\lambda \right\|_{2,\Omega} \le K_1 \left| \rho_\lambda \right|_{0,\Omega}. \qquad (146)$$

Таким образом, приходим к существованию такой не зависящей от h положительной постоянной $C = \underline{C} K_1$, что

$$\left|(\rho_\lambda, u_h - \underline{u}_h)_L\right| \le C h^{p+1} \left\| \rho_\lambda \right\|_L \left| u \right|_{p+1,\Omega}. \qquad (147)$$

Полагая в последнем неравенстве $\rho_\lambda = u_h - \underline{u}_h \in L$, находим

$$\left\| u_h - \underline{u}_h \right\|_L \le C h^{p+1} \left| u \right|_{p+1,\Omega}. \qquad (148)$$

Пусть $L = [L_2(\Gamma_\sigma)]^n$ и $\rho_\lambda = \gamma_0(u_h - \underline{u}_h) \in [H^{1/2}(\Gamma_\sigma)]^n$ – сужение $u_h - \underline{u}_h \in U$ на Γ_σ. Будем исходить из предположения о регулярности, согласно которому существует такая положительная константа K_2, что

$$\left\| u_\lambda \right\|_{2,\Omega} \le K_2 \left\| \rho_\lambda \right\|_{1/2,\Gamma_\sigma}. \qquad (149)$$

Кроме того, $u_h - \underline{u}_h$ – элемент пространства U и, значит, существует такая постоянная $c > 0$, при которой справедливо неравенство

$$\left\| \rho_\lambda \right\|_{1/2,\Gamma_\sigma} \le c \left\| u_h - \underline{u}_h \right\|_U. \tag{150}$$

С использованием оценки (137) имеем

$$\left\| u_h - \underline{u}_h \right\|_U \le c_1 h^p \left| u \right|_{p+1,\Omega}, \quad c_1 > 0. \tag{151}$$

На основании неравенств (144), (145), (149)–(151) получаем такую не зависящую от h положительную постоянную $C = cc_1 \underline{C} K_2$, что

$$\left\| u_h - \underline{u}_h \right\|_L^2 \le C h^{2p+1} \left| u \right|_{p+1,\Omega}^2. \tag{152}$$

Следовательно, справедливо неравенство

$$\left\| u_h - \underline{u}_h \right\|_L \le \sqrt{C} h^{p+1/2} \left| u \right|_{p+1,\Omega}. \tag{153}$$

Сопоставление оценок (71), (76) и (148), (153) свидетельствует о том, что разность решений $u_h - \underline{u}_h \in U_h$ не превышает погрешность $u - u_h \in U$. Следовательно, применение формул численного интегрирования, удовлетворяющих свойствам (77), (78) не приводит к изменению порядка сходимости погрешности аппроксимации для перемещений.

Замечание 17. Оценка погрешности $u - \underline{u}_h \in U$ в норме $\left\| \cdot \right\|_L$ следует из полученных неравенств (71), (76), (148), (153) и неравенства треугольника

$$\left\| u - \underline{u}_h \right\|_L \le \left\| u - u_h \right\|_L + \left\| u_h - \underline{u}_h \right\|_L. \tag{154}$$

Таким образом, все необходимые оценки погрешностей аппроксимации для напряжений, деформаций и перемещений получены.

Выводы

1. Приведенные результаты могут быть использованы при построении различного рода смешанных аппроксимаций для двухмерных и пространственных задач теории малых упругопластических деформаций.

2. Принципиальное отличие смешанных схем МКЭ от традиционных состоит в необходимости построения таких аппроксимирующих функций, для которых обеспечивается выполнение условия устойчивости (16), что, в свою очередь, гарантирует разрешимость, сходимость и получение устойчивого решения конечномерной задачи при любом h. Попытка игнорирования условия (16) при конструировании смешанных аппроксимаций может привести к плохо обусловленным дискретным задачам, решения которых имеют неустойчивый осциллирующий характер.

3. Применение смешанной аппроксимации для решения двухмерных задач деформационной теории пластичности и численный анализ будут рассмотрены в следующей работе автора.

Р е з ю м е

Сформульовано змішану проекційно-сіткову схему розв’язку нелінійних крайових задач теорії малих пружно-пластичних деформацій. Досліджено коректність і збіжність змішаних апроксимацій для напружень, деформацій та переміщень. Детально вивчено властивості проектуючих операторів, на основі чого сформульовано умову, що забезпечує існування, єдиність і стійкість розв’язку дискретної задачі. Наведено результати аналізу використання числового інтегрування. Оцінки збіжності і точності базуються на теорії узагальнених функцій та методиках функціонального аналізу.

1. *Соболев С. Л.* Некоторые применения функционального анализа в математической физике. – М.: Наука, 1988. – 336 с.
2. *Fichera F.* Existence theorems in elasticity. Boundary value problems of elasticity with unilateral constraints // Encyclopedia of Physics. – Vol. Vla/2. – Mechanics of Solids II (C. Truesdell, Ed.). – Springer-Verlag, 1972. – P. 347 – 424.
3. *Ильюшин А. А.* К теории малых упругопластических деформаций // Прикл. математика и механика. – 1946. – **10**, № 3. – С. 347 – 356.
4. *Washizu K.* Variotional Methods in Elasticity and Plasticity. – New York: Pergamon Press, 1975. – 412 p.
5. *Ковальчук Б. И., Лебедев А. А., Уманский С. Э.* Механика неупругого деформирования материалов и элементов конструкций. – Киев: Наук. думка, 1987. – 280 с.
6. *Уманский С. Э.* Оптимизация приближенных методов решения краевых задач механики. – Киев: Наук. думка, 1983. – 168 с.
7. *Канторович Л. В., Акилов Г. П.* Функциональный анализ. – М.: Наука, 1977. – 741 с.
8. *Ладыженская О. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. – М.: Наука, 1973. – 576 с.
9. *Оганесян Л. А., Руховец Л. А.* Вариационно-разностные методы решения эллиптических уравнений. – Ереван: Изд. АН АрмССР, 1979. – 235 с.
10. *Bramble J. H. and Hilbert S. R.* Estimation of linear functional on Sobolev spaces with application to Fourier transforms and spline interpolation // SIAM J. Numer. Anal. – 1970. – **7**. – P. 113 – 124.
11. *Ciarlet P.* The Finite Element Method for Elliptic Problems. – Amsterdam; New York; Oxford, 1978. – 512 p.

Поступила 20. 04. 2004