

Оптимизация структуры композиционного материала панелей летательных аппаратов при ограничениях по прочности, устойчивости и прогибу

Я. С. Карпов

Национальный аэрокосмический университет им. Н. Е. Жуковского “Харьковский авиационный институт”, Харьков, Украина

Предложен теоретический подход к проектированию структуры слоистого композиционного материала панелей минимальной массы (количество слоев, их толщина и углы армирования) при ограничениях по прочности, устойчивости и прогибу. Выведены зависимости для определения возможного количества равнопрочных слоев в пакете, для которых критерий прочности выполняется в виде равенства. Сформулирована и решена задача оптимизации структуры композиционного материала, состоящей из равнопрочных слоев. Показано, что в зависимости от характера и величины нагрузок оптимальными являются структуры $[0]$, $[90]$, $[0, 90]$, $[\pm\varphi]$, $[\pm\varphi_1, \pm\varphi_2]$, $[0, \pm\varphi]$, $[90, \pm\varphi]$, $[0, 90, \pm\varphi]$. Получены необходимые и достаточные системы уравнений для определения проектных параметров. Рассмотрены некоторые примеры и частные случаи нагружения.

Ключевые слова: слоистый композиционный материал, панель, критерий прочности, нагрузка.

В конструкциях летательных аппаратов наиболее широко применяются волокнистые и слоистые композиционные материалы (КМ), использование которых позволяет управлять физико-механическими свойствами и напряженно-деформированным состоянием панелей обшивки. В связи с этим проблема выбора углов армирования, количества слоев и последовательности их укладки по толщине пакета является актуальной, особенно для элементов конструкций с разнотипными формами потери несущей способности (прочность, устойчивость, изгибная жесткость и др.).

Несмотря на многочисленные исследования этой проблемы, задача оптимизации структуры КМ решена лишь для некоторых специфических (конструктивных) критериев проектирования и случаев нагружения определенного класса деталей и агрегатов (баллоны давления, стержни, диски) [1, 2]. Например, не представляет трудностей определение оптимального угла армирования и толщины КМ со структурой $[\pm\varphi]$ для различных критериев проектирования (минимум массы или прогиба панели, максимум критической силы и т.п.) при произвольном характере нагружения как в плоскости, так и в поперечном направлении. Однако нет оснований утверждать, что не существует другой структуры, например $[\pm\varphi_1, \pm\varphi_2]$, которая удовлетворяла бы поставленным ограничениям при меньшей массе. Для баллонов давления на базе критерия отсутствия касательных напряжений в слоях [2] получены необходимые уравнения для оптимизации структуры по условиям прочности, но не рассматриваются такие аспекты, как потеря устойчивости при внешнем давлении, вероятность появления изгиба в процессе эксплуатации и т.п., с точки зрения которых спроектированная структура будет далеко не оптимальной.

Таким образом, оптимизация структуры волокнистого слоистого КМ при различных ограничениях относится к классу фундаментальных задач не только проектирования конструкций, но и их механики и расчета на прочность. Рассмотрим пластину размерами $a \times b$ (рис. 1), нагруженную усилиями N_x , N_y и q_{xy} в плоскости и поперечным давлением P . Композиционный материал пластины является ортотропным в осях x , y и состоит из произвольного количества слоев препрега. В качестве целевой функции и критерия проектирования примем

$$\bar{G} = G/ab = \sum_{i=1}^n \delta_i \rho_i \rightarrow \min, \quad i = 1, \dots, n, \quad (1)$$

где δ_i , ρ_i – толщина и плотность материала слоя с армированием φ_i .

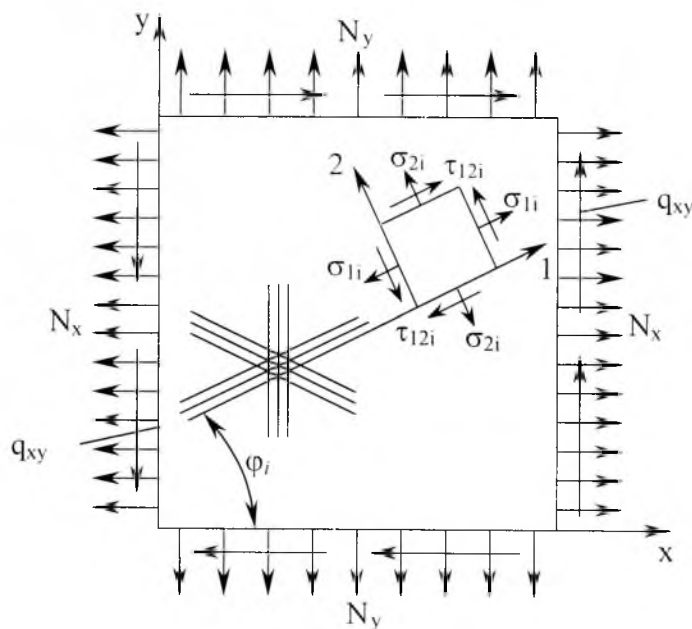


Рис. 1. К постановке задачи проектирования структуры КМ.

Ограничения на параметры структуры являются.

1. Условие прочности слоев в виде критерия Мизеса–Хилла:

$$\frac{\sigma_{1i}^2}{F_{1i}^2} - \frac{\sigma_{1i}\sigma_{2i}}{F_{1i}F_{2i}} + \frac{\sigma_{2i}^2}{F_{2i}^2} + \frac{\tau_{12i}^2}{F_{12i}^2} \leq 1, \quad (2)$$

где σ_{1i} , σ_{2i} , τ_{12i} – напряжения в слоях (рис. 1); F_{1i} , F_{2i} , F_{12i} – пределы прочности материала по осям 1, 2 и при сдвиге соответственно.

2. Обеспечение устойчивости панели под действием усилий в плоскости. Существует достаточно много форм записи критерия устойчивости

при сложном напряженном состоянии. Как будет показано ниже, математическая форма критерия не играет большой роли, поэтому примем его в виде [3]

$$-\frac{N_x}{N_{x_{кр}}} - \frac{N_y}{N_{y_{кр}}} + \frac{q_{xy}^2}{q_{xy_{кр}}^2} \leq 1, \quad (3)$$

где $N_{x_{кр}}$, $N_{y_{кр}}$, $q_{xy_{кр}}$ – величина критических усилий при изолированном действии на пластину.

3. Ограничение на максимальный прогиб панели (характерно для обшивки крыла), которое можно записать так [3]:

$$W_{\max} = K_w P \frac{a^2 b^2}{\sqrt{D_1 D_2}} \leq W_0, \quad (4)$$

где K_w – коэффициент опирания; D_1 , D_2 – цилиндрические жесткости по осям x и y соответственно; W_0 – регламентируемое ограничение на прогиб панели.

Рассмотрим решение задачи оптимизации структуры КМ, удовлетворяющей только условиям прочности (2). Поскольку каждый слой является ортотропным в локальной системе координат, напряжения определяются по формулам

$$\begin{aligned} \sigma_{1i} &= \bar{E}_{1i}(\varepsilon_{1i} + \mu_{21i}\varepsilon_{2i}); \\ \sigma_{2i} &= \bar{E}_{2i}(\varepsilon_{2i} + \mu_{12i}\varepsilon_{1i}); \\ \tau_{12i} &= G_{12i}\gamma_{12i}, \end{aligned} \quad (5)$$

где ε_{1i} , ε_{2i} , γ_{12i} определяются из уравнений совместности деформаций слоев в пакете,

$$\begin{cases} \varepsilon_{1i} = \varepsilon_x \cos^2 \varphi_i + \varepsilon_y \sin^2 \varphi_i + \gamma_{xy} \sin \varphi_i \cos \varphi_i; \\ \varepsilon_{2i} = \varepsilon_x \sin^2 \varphi_i + \varepsilon_y \cos^2 \varphi_i - \gamma_{xy} \sin \varphi_i \cos \varphi_i; \\ \gamma_{12i} = (\varepsilon_y - \varepsilon_x) \sin 2\varphi_i + \gamma_{xy} \cos 2\varphi_i; \end{cases} \quad (6)$$

$$\bar{E}_{1i} = E_{1i}/(1 - \mu_{12i}\mu_{21i}); \quad \bar{E}_{2i} = E_{2i}/(1 - \mu_{12i}\mu_{21i}). \quad (7)$$

Средние деформации пакета ε_x , ε_y и γ_{xy} для ортотропного КМ вычисляются по известным формулам

$$\varepsilon_x = \frac{N_x B_{22} - N_y B_{12}}{B_{11} B_{22} - B_{12}^2}; \quad \varepsilon_y = \frac{N_y B_{11} - N_x B_{12}}{B_{11} B_{22} - B_{12}^2}; \quad \gamma_{xy} = \frac{q_{xy}}{B_{33}}, \quad (8)$$

где приняты следующие обозначения:

$$\begin{cases}
B_{11} = \sum_{i=1}^n \delta_i (\bar{E}_{1i} \cos^4 \varphi_i + \bar{E}_{2i} \sin^4 \varphi_i + 2\bar{E}_{1i} \mu_{21i} \sin^2 \varphi_i \cos^2 \varphi_i + \\
+ G_{12i} \sin^2 2\varphi_i); \\
B_{12} = \sum_{i=1}^n \delta_i [(\bar{E}_{1i} + \bar{E}_{2i} - 2\bar{E}_{1i} \mu_{21i}) \sin^2 \varphi_i \cos^2 \varphi_i + \bar{E}_{1i} \mu_{21i} - \\
- G_{12i} \sin^2 2\varphi_i]; \\
B_{22} = \sum_{i=1}^n \delta_i (\bar{E}_{1i} \sin^4 \varphi_i + \bar{E}_{2i} \cos^4 \varphi_i + 2\bar{E}_{1i} \mu_{21i} \sin^2 \varphi_i \cos^2 \varphi_i + \\
+ G_{12i} \sin^2 2\varphi_i); \\
B_{33} = \sum_{i=1}^n \delta_i [(\bar{E}_{1i} + \bar{E}_{2i} - 2\bar{E}_{1i} \mu_{21i}) \sin^2 \varphi_i \cos^2 \varphi_i + G_{12i} \cos^2 2\varphi_i].
\end{cases} \quad (9)$$

Для задачи (1), (2) характерны следующие особенности:

неизвестно количество искомым параметров, так как число слоев n является проектным параметром;

ограничения (2) имеют вид неравенств, что не позволяет использовать классический аппарат вариационного расчета;

толщины слоев δ_i и пакета в целом δ_Σ – дискретно изменяющиеся величины с кратностью толщины полуфабриката армирующего материала (ткань, лента и т.п.).

Вполне вероятно, что именно поэтому данная задача до настоящего времени корректно не решена.

Изменим формулировку задачи на следующую: пусть пакет состоит из бесконечного числа слоев ($n \rightarrow \infty$), охватывающих весь интервал углов армирования ($-\pi/2 < \varphi < \pi/2$). Будем искать такие толщины слоев, которые доставляют минимум функции (1). В случае одинакового материала слоев после последовательной подстановки зависимостей (8) в (6) и (5) и полученного результата в критерий (2) запишем следующее выражение для условия прочности:

$$\begin{aligned}
\Phi_{\text{пр}}(\varphi) = & \cos^4 \varphi (d_1 \varepsilon_x^2 + d_2 \varepsilon_y^2 + d_4 \varepsilon_x \varepsilon_y) + \sin^4 \varphi (d_1 \varepsilon_y^2 + d_2 \varepsilon_x^2 + d_4 \varepsilon_x \varepsilon_y) + \\
& + \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi [4d_3 (\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 + d_4 (\varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2) + 2\varepsilon_x \varepsilon_y (d_1 + d_2)] + \\
& + \gamma_{xy}^2 [d_3 + \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi (d_1 + d_2 - 4d_3 - d_4)] \pm \\
& \pm \gamma_{xy} \sin \varphi \cos \varphi \{ \cos^2 \varphi [\varepsilon_x (2d_1 - 4d_3 - d_4) - \varepsilon_y (2d_2 - 4d_3 - d_4)] + \\
& + \sin^2 \varphi [\varepsilon_y (2d_1 - 4d_3 - d_4) - \varepsilon_x (2d_2 - 4d_3 - d_4)] \} - 1 \leq 0, \quad (10)
\end{aligned}$$

где

$$d_1 = \bar{E}_1^2 \left(\frac{1}{F_1^2} + \frac{\mu_{21}^2}{F_2^2} - \frac{\mu_{21}}{F_1 F_2} \right); \quad d_2 = \bar{E}_2^2 \left(\frac{\mu_{12}^2}{F_1^2} + \frac{1}{F_2^2} - \frac{\mu_{12}}{F_1 F_2} \right);$$

$$d_3 = \frac{G_{12}^2}{F_{12}^2}; \quad d_4 = \bar{E}_1 \bar{E}_2 \left(\frac{2\mu_{12}}{F_1^2} + \frac{2\mu_{21}}{F_2^2} - \frac{1 + \mu_{12}\mu_{21}}{F_1 F_2} \right);$$
(11)

знаки “+” и “-” применяются для слоев с углом армирования $+\varphi$ и $-\varphi$ соответственно, что позволяет в дальнейшем рассматривать интервал $0 \leq \varphi \leq \pi/2$.

Рассмотрим условие, при котором обеспечение прочности слоя $[\varphi]$ автоматически приводит к выполнению критерия (10) для слоя $[-\varphi]$. В этом случае должно соблюдаться неравенство

$$\Phi_{\text{пр}}(+\varphi) > \Phi_{\text{пр}}(-\varphi),$$
(12)

которое с учетом того что $q_{xy} \neq 0$ (при $q_{xy} = 0$ слои ± 0 и $\pm \pi/2$ совпадают), принимает вид

$$q_{xy}[(2d_1 - 4d_3 - d_4)(\varepsilon_x \cos^2 \varphi + \varepsilon_y \sin^2 \varphi) -$$

$$- (2d_2 - 4d_3 - d_4)(\varepsilon_x \sin^2 \varphi + \varepsilon_y \cos^2 \varphi)] > 0.$$
(13)

Коэффициенты уравнения (10) формально зависят от переменной φ . Жесткости B_{ij} как полные суммы (см. формулы (9)) являются константами по φ .

В интервале $0 \leq \varphi \leq \pi/2$ функция $\Phi_{\text{пр}}(\varphi)$ имеет максимум четыре точки пересечения с осью φ (рис. 2) и не более четырех экстремумов. Это свидетельствует о том, что из всего множества слоев в пакете максимум четыре из них могут быть равнопрочными (для них $\Phi_{\text{пр}}(\varphi) = 0$). Таким образом, подтверждается теоретическая возможность существования равнопрочной статически неопределимой системы слоев КМ.

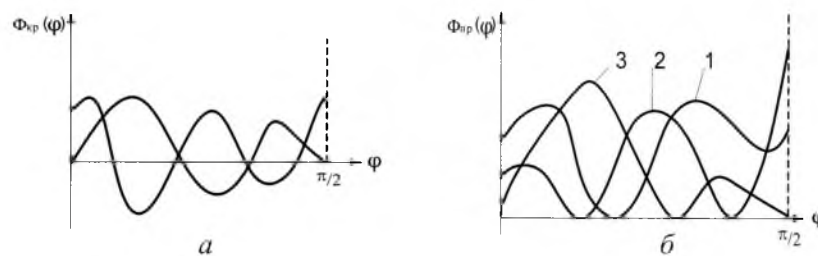


Рис. 2. К определению оптимальной структуры КМ.

Количество корней уравнения $\Phi_{\text{пр}}(\varphi) = 0$ и их значения зависят от коэффициентов, поэтому любой угол армирования может быть решением

задачи. Отсюда следует, что есть достаточно много равнопрочных структур КМ, которые, очевидно, характеризуются различной массой. Равнопрочность всех элементов конструкции является одним из самых распространенных критериев проектирования.

Рассмотрим решение задачи по определению оптимальных параметров КМ среди равнопрочных структур. В этом случае ограничение по прочности (10) записывается в виде равенства, и задача может быть решена классическими методами вариационного расчета, например методом неопределенных множителей Лагранжа. Новый функционал имеет вид

$$L = \rho \sum_{i=1}^n \delta_i + \lambda \Phi_{\text{пр}}(\varphi) \rightarrow \min, \quad (14)$$

где λ – множитель Лагранжа.

Разрешающая система уравнений записывается так:

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial \delta_i} = 0; \\ \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0; \\ \Phi_{\text{пр}}(\varphi) = 0. \end{cases} \quad (15)$$

Из второго уравнения этой системы следует

$$\frac{\partial \Phi_{\text{пр}}(\varphi)}{\partial \varphi} = 0. \quad (16)$$

Кроме того, минимум функционала (14) характеризуется условием

$$\frac{\partial^2 \Phi_{\text{пр}}(\varphi)}{\partial \varphi^2} > 0. \quad (17)$$

Поскольку углы 0 и $\pi/2$ могут быть решениями уравнения (10), на границах интервала условиями наличия минимума служат неравенства

$$\left. \frac{\partial \Phi_{\text{пр}}}{\partial \varphi} \right|_{\varphi=0} > 0; \quad \left. \frac{\partial \Phi_{\text{пр}}}{\partial \varphi} \right|_{\varphi=\pi/2} < 0. \quad (18)$$

Таким образом, при выполнении условий (17) и (18) оптимальные толщины слоев и их углы армирования определяются следующей системой уравнений:

$$\frac{\partial \Phi_{\text{пр}}(\varphi)}{\partial \varphi} = 0; \quad \Phi_{\text{пр}}(\varphi) = 0. \quad (19)$$

Анализ возможных решений системы (19) показывает, что в общем случае целевая функция (14) может иметь один (на рис. 2,б кривая 1), два (кривая 2) или три (кривая 3) минимума. Другими словами, оптимальными могут быть структуры КМ: $[\pm\varphi]$, $[\pm\varphi_1, \varphi_2]$, $[0, \pm\varphi]$, $[\pi/2, \pm\varphi]$, $[0, \pi/2]$, $[0, \pm\varphi, \pi/2]$.

Запишем в развернутом виде уравнения (19) и условие (17):

$$\begin{aligned} \Phi_{\text{пр}} = & \cos^4 \varphi (d_1 \varepsilon_x^2 + d_2 \varepsilon_y^2 + d_4 \varepsilon_x \varepsilon_y) + \sin^4 \varphi (d_1 \varepsilon_y^2 + d_2 \varepsilon_x^2 + d_4 \varepsilon_x \varepsilon_y) + \\ & + \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi [(4d_3 + d_4)(\varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2) + 2\varepsilon_x \varepsilon_y (d_1 + d_2 - 4d_3)] + \\ & + \gamma_{xy}^2 [d_3 + \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi (d_1 + d_2 - 4d_3 - d_4)] \pm \\ & \pm \gamma_{xy} \sin \varphi \cos \varphi [(\varepsilon_x + \varepsilon_y)(d_1 - d_2) + \\ & + \cos 2\varphi (\varepsilon_x - \varepsilon_y)(d_1 + d_2 - 4d_3 - d_4)] = 1; \end{aligned} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi_{\text{пр}}}{\partial \varphi} = & -2 \sin 2\varphi \cos^2 \varphi (d_1 \varepsilon_x^2 + d_2 \varepsilon_y^2 + d_4 \varepsilon_x \varepsilon_y) + \\ & + 2 \sin 2\varphi \sin^2 \varphi (d_1 \varepsilon_y^2 + d_2 \varepsilon_x^2 + d_4 \varepsilon_x \varepsilon_y) + \\ & + \sin 2\varphi \cos 2\varphi [(\varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2)(4d_3 + d_4) + 2\varepsilon_x \varepsilon_y (d_1 + d_2 - 4d_3)] + \\ & + \gamma_{xy}^2 \sin 2\varphi \cos 2\varphi (d_1 + d_2 - 4d_3 - d_4) \pm \gamma_{xy} (\varepsilon_x + \varepsilon_y)(d_1 - d_2) \cos 2\varphi \pm \\ & \pm \gamma_{xy} (\varepsilon_x - \varepsilon_y)(d_1 + d_2 - 4d_3 - d_4) \cos 4\varphi = 0; \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Phi_{\text{пр}}}{\partial \varphi^2} = & 4(d_1 \varepsilon_x^2 + d_2 \varepsilon_y^2 + d_4 \varepsilon_x \varepsilon_y) \cos^2 \varphi (4 \sin^2 \varphi - 1) + \\ & + 4(d_1 \varepsilon_y^2 + d_2 \varepsilon_x^2 + d_4 \varepsilon_x \varepsilon_y) + \sin^2 \varphi (4 \cos^2 \varphi - 1) + \\ & + 2 \cos 4\varphi [(4d_3 + d_4)(\varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2) + 2\varepsilon_x \varepsilon_y (d_1 + d_2 - 4d_3)] + \\ & + 2\gamma_{xy} (d_1 + d_2 - 4d_3 - d_4) [\gamma_{xy} \cos 4\varphi \pm 2 \sin 4\varphi (\varepsilon_x - \varepsilon_y)] \mp \\ & \mp 2\gamma_{xy} \sin 2\varphi (\varepsilon_x + \varepsilon_y)(d_1 - d_2) > 0. \end{aligned} \quad (22)$$

На основании этих общих уравнений исследуем некоторые частные случаи нагружения.

Пример 1. $N_x = N_y = 0$.

Уравнения (20)–(22) принимают вид

$$\Phi_{\text{пр}} = \gamma_{xy}^2 [d_3 + \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi (d_1 + d_2 - 4d_3 - d_4)] - 1 = 0; \quad (23)$$

$$\frac{\partial \Phi_{\text{пр}}}{\partial \varphi} = \gamma_{xy}^2 \sin 2\varphi \cos 2\varphi (d_1 + d_2 - 4d_3 - d_4) = 0; \quad (24)$$

$$\frac{\partial^2 \Phi_{\text{пр}}}{\partial \varphi^2} = 2\gamma_{xy}^2 \cos 4\varphi (d_1 + d_2 - 4d_3 - d_4). \quad (25)$$

Из уравнения (24) следует, что функция $\Phi_{\text{пр}}$ имеет экстремумы при $\varphi = 0$, $\varphi = \pi/2$ и $\varphi = \pm \pi/4$. Если

$$d_1 + d_2 - 4d_3 - d_4 < 0, \quad (26)$$

то оптимальной является структура $[\pm \pi/4]$, при положительных значениях правой части этого неравенства – $[0]$, $[\pi/2]$ или $[0, \pi/2]$, причем все они равнозначны. Для структуры $[\pm \pi/4]$ толщина пакета находится из уравнения (23) при

$$B_{33} = \frac{1}{2} \delta [\bar{E}_1(1 - \mu_{21}) + \bar{E}_2(1 - \mu_{12})]; \quad (27)$$

$$\delta_{\Sigma} = 2\delta = 2q_{xy} \frac{\sqrt{4d_3 + (d_1 + d_2 - 4d_3 - d_4)}}{\bar{E}_1(1 - \mu_{21}) + \bar{E}_2(1 - \mu_{12})}. \quad (28)$$

Уравнение (23) позволяет аналитически прогнозировать предел прочности при сдвиге композиционного материала с произвольным армированием. Действительно, касательные напряжения $\tau_{xy} = q_{xy}/2\delta$ имеют предельные значения при выполнении критерия прочности в виде равенства. Тогда из (23) получим формулу для определения предела прочности:

$$F_{xy} = \frac{[\bar{E}_1(1 - \mu_{21}) + \bar{E}_2(1 - \mu_{12})] \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi + G_{12} \cos^2 2\varphi}{\sqrt{d_3 + \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi (d_1 + d_2 - 4d_3 - d_4)}}. \quad (29)$$

При $\varphi = 0$ и $\varphi = \pi/2$ имеем $F_{xy} = F_{12}$, при $\varphi = \pm \pi/4$ –

$$F_{xy} = F_{45} = \frac{1}{2} \frac{\bar{E}_1(1 - \mu_{21}) + \bar{E}_2(1 - \mu_{12})}{\sqrt{4d_3 + (d_1 + d_2 - 4d_3 - d_4)}}, \quad (30)$$

откуда следует, что при определенных сочетаниях физико-механических свойств материала слоя углы $\pm \pi/4$ могут быть не оптимальными для пластины, нагруженной чистым сдвигом.

Умножив левую и правую части равенства (28) на плотность, получим критерий выбора материала слоев для армирования пластины (аналог удельной прочности):

$$K = \frac{\bar{E}_1(1 - \mu_{21}) + \bar{E}_2(1 - \mu_{12})}{2\rho\sqrt{d_1 + d_2 - d_4}}. \quad (31)$$

Пример 2. $q_{xy} = 0$.

При нагружении панели только нормальными усилиями N_x и N_y уравнения (20)–(22) преобразуются к виду

$$\begin{aligned} \Phi_{\text{пр}} = & \cos^4 \varphi (d_1 \varepsilon_x^2 + d_2 \varepsilon_y^2 + d_4 \varepsilon_x \varepsilon_y) + \sin^4 \varphi (d_1 \varepsilon_{xy}^2 + d_2 \varepsilon_x^2 + d_4 \varepsilon_x \varepsilon_y) + \\ & + \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi [(4d_3 + d_4)(\varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2) + 2\varepsilon_x \varepsilon_y (d_1 + d_2 - 4d_3)] - 1 = 0; \quad (32) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi_{\text{пр}}}{\partial \varphi} = & -2 \sin 2\varphi \cos^2 \varphi (d_1 \varepsilon_x^2 + d_2 \varepsilon_y^2 + d_4 \varepsilon_x \varepsilon_y) + \\ & + 2 \sin 2\varphi \sin^2 \varphi (d_1 \varepsilon_y^2 + d_2 \varepsilon_x^2 + d_4 \varepsilon_x \varepsilon_y) + \\ & + \sin 2\varphi \cos 2\varphi [(4d_3 + d_4)(\varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2) + 2\varepsilon_x \varepsilon_y (d_1 + d_2 - 4d_3)] = 0; \quad (33) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Phi_{\text{пр}}}{\partial \varphi^2} = & 4(d_1 \varepsilon_x^2 + d_2 \varepsilon_y^2 + d_4 \varepsilon_x \varepsilon_y) \cos^2 \varphi (4 \sin^2 \varphi - 1) + \\ & + 4(d_1 \varepsilon_y^2 + d_2 \varepsilon_x^2 + d_4 \varepsilon_x \varepsilon_y) \sin^2 \varphi (4 \cos^2 \varphi - 1) + \\ & + 2 \cos 4\varphi [(4d_3 + d_4)(\varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2) + 2\varepsilon_x \varepsilon_y (d_1 + d_2 - 4d_3)]. \quad (34) \end{aligned}$$

На рис. 3 показаны графики функции (32) и типы оптимальных структур КМ. Из всех структур наибольший интерес для рассматриваемого случая нагружения представляет структура, включающая слои 0 и $\pi/2$ (рис. 3,а). Поскольку $\Phi_{\text{пр}}(0) = \Phi_{\text{пр}}(\pi/2)$, из уравнения (32) получим

$$(d_1 - d_2)(\varepsilon_x - \varepsilon_y)(\varepsilon_x + \varepsilon_y) = 0. \quad (35)$$

Выполнение условия $d_1 - d_2 = 0$ является возможным при довольно специфическом соотношении физико-механических характеристик КМ слоев и маловероятным, особенно, учитывая разброс свойств материалов.

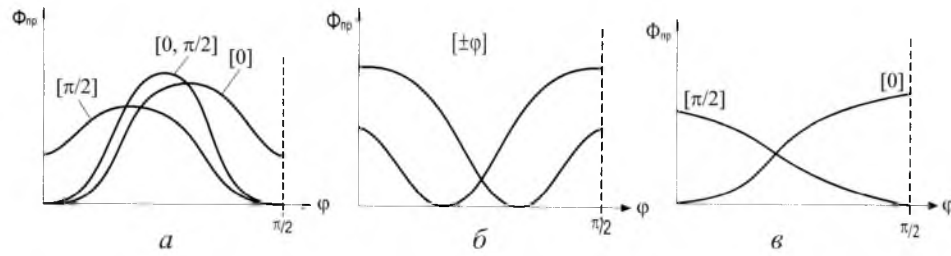


Рис. 3. К анализу оптимальных структур КМ при нагружении панели нормальными усилиями.

Следующим вариантом решения уравнения (35) будет:

$$\varepsilon_x = \varepsilon_y = \varepsilon, \tag{36}$$

по форме совпадающее с условием армирования каждого слоя по траекториям главных напряжений [1, 2].

Подставив (36) в систему (32)–(34), после преобразований получим

$$\varepsilon^2(d_1 + d_2 + d_4) - 1 = 0; \quad \frac{\partial \Phi_{\text{пр}}}{\partial \varphi} = 0; \quad \frac{\partial^2 \Phi_{\text{пр}}}{\partial \varphi^2} = 0. \tag{37}$$

Для определения средних деформаций пакета запишем уравнения физического закона в виде

$$\begin{aligned} \varepsilon_x B_{11} + \varepsilon_y B_{12} &= N_x; \\ \varepsilon_x B_{12} + \varepsilon_y B_{22} &= N_y. \end{aligned} \tag{38}$$

Сложив эти два уравнения с учетом (36), получим формулу для нахождения ε :

$$\varepsilon_x = \varepsilon_y = \varepsilon = \frac{N_x + N_y}{\sum_{i=1}^n \delta_i [\bar{E}_1(1 + \mu_{21}) + \bar{E}_2(1 + \mu_{12})]}. \tag{39}$$

Из уравнений (37) и (39) видно, что критерий прочности не учитывает величину угла армирования, т.е. при $\varepsilon_x = \varepsilon_y = 0$ любые структуры являются равнопрочными и оптимальными. Таким образом, получено доказательство, что армирование по траекториям главных напряжений (36) приводит при определенных условиях нагружения к конструкции минимальной массы. В монографии [1] разработана теория проектирования оболочек вращения при осесимметричном нагружении на основе критерия отсутствия касательных напряжений в слоях. Условие (36) [1] получено на основе теории упругости слоистых КМ. Вышеизложенное свидетельствует о том, что указанные конструкции относятся к классу равнопрочных и являются оптимальными.

Параметры структуры таких КМ определяются из следующих уравнений:

$$N_x(B_{22} + B_{12}) - N_y(B_{11} + B_{12}) = 0;$$

$$\frac{(N_x + N_y)^2(d_1 + d_2 + d_4)}{\left(\sum_{i=1}^n \delta_i [\bar{E}_1(1 + \mu_{21}) + \bar{E}_2(1 + \mu_{12})]\right)^2} - 1 = 0. \quad (40)$$

Анализ системы показывает, что усилия N_x и N_y должны быть одного знака и ни одно из них не может быть нулевым. Ранее [4] подробно рассмотрены условия существования решения системы (40), полученного на основании других предпосылок (равенство нулю касательных напряжений во всех слоях).

Рассмотрим последний вариант решения уравнения (35):

$$\varepsilon_x + \varepsilon_y = 0 \quad \text{или} \quad \varepsilon_x = -\varepsilon_y = \varepsilon. \quad (41)$$

Подставив (41) в систему (32)–(34), получим

$$\begin{cases} \Phi_{\text{пр}} = \varepsilon^2 \cos^2 2\varphi(d_1 + d_2 - 4d_3 - d_4) + 4\varepsilon^2 d_3 - 1 = 0; \\ \Phi'_{\text{пр}} = -2\varepsilon^2 \sin 4\varphi(d_1 + d_2 - 4d_3 - d_4) + 4\varepsilon^2 d_3 - 1 = 0; \\ \Phi''_{\text{пр}} = -8\varepsilon^2 \cos 4\varphi(d_1 + d_2 - 4d_3 - d_4) + 4\varepsilon^2 d_3 - 1 = 0. \end{cases} \quad (42)$$

Сложив уравнения (38) с учетом (41), получим формулу для определения деформаций

$$\varepsilon_x = -\varepsilon_y = \varepsilon = \frac{N_x + N_y}{\sum_{i=1}^n \delta_i \cos 2\varphi_i (\bar{E}_1 - \bar{E}_2)}, \quad (43)$$

которая для структуры $[0, \pi/2]$ принимает вид

$$\varepsilon_x = -\varepsilon_y = \varepsilon = \frac{N_x + N_y}{(\delta_1 - \delta_2)(\bar{E}_1 - \bar{E}_2)}. \quad (44)$$

Из выражения (41) с учетом (8) и (9) следует необходимое соотношение между параметрами структуры $[0, \pi/2]$

$$N_x[\delta_1 \bar{E}_2(1 - \mu_{12}) + \delta_2 \bar{E}_2(1 - \mu_{21})] + N_y[\delta_1 \bar{E}_1(1 - \mu_{21}) + \delta_2 \bar{E}_2(1 - \mu_{12})] = 0. \quad (45)$$

Для определения толщин δ_1 и δ_2 к уравнению (45) необходимо добавить первое из системы (42) с учетом (44):

$$\frac{(N_x + N_y)^2(d_1 + d_2 - d_4)}{(\delta_1 - \delta_2)^2(\bar{E}_1 - \bar{E}_2)^2} - 1 = 0. \quad (46)$$

Из зависимости (45) следует, что усилия N_x и N_y должны быть разного знака и ненулевыми. Кроме того, поскольку толщины являются, безусловно, положительными величинами, решение уравнений (45) и (46) существует при вполне определенных соотношениях между нагрузками и свойствами материалов.

В целом оптимальная структура включает слои с углами армирования 0 и $\pi/2$ только при выполнении условия (26).

Рассмотренные выше примеры показывают, что аналогично можно, во-первых, исследовать, при каких условиях нагружения реализуются те или иные структуры КМ, и, во-вторых, найти оптимальную структуру при заданных усилиях N_x , N_y и q_{xy} .

Поскольку параметры оптимальной структуры зависят от физико-механических свойств КМ, то очевидно, что методика позволяет получить также критерии выбора материала слоев.

Выше разработана теория проектирования структуры слоистого КМ, удовлетворяющего только условиям прочности. Если спроектированный КМ не обеспечивает требуемый уровень критических усилий детали, то необходимо увеличивать толщину пакета, так как при найденной толщине δ_Σ не существует других структур, для которых выполнялось бы условие прочности (2). Увеличение толщины пакета приводит к образованию интервала углов армирования, в пределах которого любой угол и любое их сочетание обеспечивают прочность конструкции. На рис. 4,а для наглядности это показано для случая нагружения чистым сдвигом, где штриховая линия – выполнение критерия устойчивости (3) для $\varphi = \pi/4$; сплошная – критерия прочности (23).

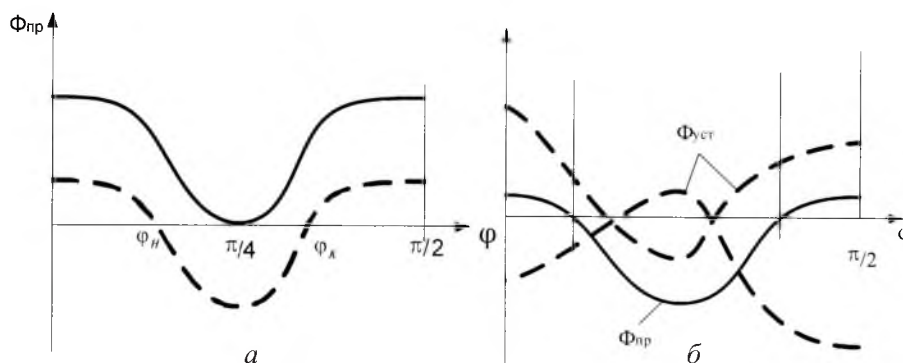


Рис. 4. К определению оптимальной структуры КМ с учетом прочности и устойчивости.

Сформулируем следующую задачу: существует ли в интервале допустимых по прочности углов армирования такой угол φ или система $[\pm\varphi_l]$, для которых имеется максимальный запас по устойчивости панели при заданной толщине пакета.

Для решения задачи запишем неравенство (3) в виде

$$\Phi_{уст} = 1 + \frac{N_x}{N_{x_{кр}}} + \frac{N_y}{N_{y_{кр}}} - \frac{q_{xy}^2}{q_{xy_{кр}}^2} \geq 0 \quad (47)$$

и будем искать ее максимум при $\delta_{\Sigma} = \text{const}$.

Формулы для расчета критических усилий могут быть представлены в следующем каноническом виде [3]:

$$(N_{x_{кр}}, N_{y_{кр}}, q_{xy_{кр}}) = (K_x, K_y, K_{xy}) \frac{\sqrt{D_1 D_2}}{ab}, \quad (48)$$

где K_x, K_y, K_{xy} – коэффициенты опирания.

Для пакета слоев с симметрией относительно срединной поверхности цилиндрические жесткости определяются по формулам

$$D_1 = D_{11}; \quad D_2 = D_{22}; \quad D_3 = D_{12} + 2D_{33}. \quad (49)$$

Здесь

$$D_{kl} = \frac{2}{3} \sum_{i=1}^n b_{kl} \left(\sum_{j=1}^i \delta_j^3 - \sum_{j=1}^{i-1} \delta_j^3 \right), \quad (50)$$

где

$$\begin{aligned} b_{11} &= \bar{E}_1 \cos^4 \varphi_i + \bar{E}_2 \sin^4 \varphi_i + 2\bar{E}_1 \mu_{21} \sin^2 \varphi_i \cos^2 \varphi_i + G_{12} \sin^2 2\varphi_i; \\ b_{12} &= (\bar{E}_1 + \bar{E}_2 - 2\bar{E}_1 \mu_{21}) \sin^2 \varphi_i \cos^2 \varphi_i + \bar{E}_1 \mu_{21} - G_{12} \sin^2 2\varphi_i; \\ b_{22} &= \bar{E}_1 \sin^4 \varphi_i + \bar{E}_2 \cos^4 \varphi_i + 2\bar{E}_1 \mu_{21} \sin^2 \varphi_i \cos^2 \varphi_i + G_{12} \sin^2 2\varphi_i; \\ b_{33} &= (\bar{E}_1 + \bar{E}_2 - 2\bar{E}_1 \mu_{21}) \sin^2 \varphi_i \cos^2 \varphi_i + G_{12} \cos^2 2\varphi_i. \end{aligned} \quad (51)$$

Коэффициенты опирания могут быть представлены функциями от отношения жесткостей и параметров волнообразования λ_m и λ_n :

$$(K_x, K_y, K_{xy}) = f \left(\frac{D_1}{D_2}, \frac{D_2}{D_1}, \frac{D_3}{D_1}, \frac{D_3}{D_2}, \lambda_m, \lambda_n \right). \quad (52)$$

С учетом этих зависимостей производная от $\Phi_{уст}$ по φ будет равна

$$\frac{\partial \Phi_{уст}}{\partial \varphi} = \sin \varphi \cos \varphi (L_1 \cos^2 \varphi + L_2 \sin^2 \varphi), \quad (53)$$

где L_1, L_2 – коэффициенты, получаемые в результате преобразований.

Анализ выражения (53) показывает, что функция $\Phi_{уст}$ имеет два или три экстремума, т.е. оптимальными по устойчивости могут быть структуры $[0]$, $[\pi/2]$, $[0, \pi/2]$, $[\pm\varphi]$ или граничные значения интервала углов армирования, в пределах которого выполняется критерий прочности (рис. 4,б). Таким образом, оптимальная по устойчивости и прочности структура КМ включает не более двух семейств углов армирования. Это очень важный вывод, потому что разрешена задача выбора последовательности укладки слоев в пакете, вызывающей наибольшие трудности математического характера.

После удовлетворения ограничения по устойчивости необходимо проверить выполнение условия (4) по прогибу. Если оно не соблюдается, следует увеличить толщину пакета (возможности варьирования углами армирования исчерпаны ограничениями по прочности и устойчивости). Для дальнейшего анализа запишем выражение (4) в виде

$$\Phi_w = W_0 - K_w P \frac{a^2 b^2}{\sqrt{D_1 D_2}} \geq 0. \quad (54)$$

Математическая зависимость коэффициента опирания по структуре аналогична выражению (52). Из предыдущих этапов проектирования известна толщина пакета, из условий прочности и устойчивости – допустимый интервал углов армирования.

Сравнение зависимостей (47) и (54) свидетельствует, что в принципиальном аспекте удовлетворение ограничения на максимальный прогиб приведет к таким же результатам относительно структуры КМ панели. Очевидно, что экстремум функции (54) внутри допустимого интервала углов армирования достигается при другом значении φ .

После нахождения максимума функции (47), естественно, появляется возможность уменьшения толщины до тех пор, пока с минимальным запасом не будут выполняться условия прочности и устойчивости. Аналогичное утверждение справедливо также для ограничения на максимальный прогиб панели.

Выводы

1. Разработана методика поиска критических параметров структуры КМ – количество слоев, углы армирования и последовательность укладки слоев в пакете.
2. Показано, что количество равнопрочных слоев с различными углами армирования не может превышать трех. В зависимости от характера внешних нагрузок и их величины оптимальными могут быть структуры $[\pm\varphi]$, $[\pm\varphi_1, \pm\varphi_2]$, $[0]$, $[\pi/2]$, $[0, \pi/2]$, $[0, \pm\varphi]$, $[\pi/2, \pm\varphi]$, $[0, \pi/2, \pm\varphi]$.
3. Разработана эффективная методика определения оптимальной структуры слоистого КМ для обеспечения требований по устойчивости и прогибу в интервале углов армирования с допустимым ограничением по прочности.
4. Установлено, что при определенном сочетании нормальных усилий (при отсутствии касательных) известный принцип армирования по траекториям главных напряжений приводит к структурам композиционного материала с минимальной массой и равнопрочными слоями.

5. Предложенная методика позволяет достаточно легко выполнить требование о кратности толщины целому (или четному) количеству монослоев армирующего материала.

Резюме

Запропоновано теоретичний підхід до проектування структури шаруватого композиційного матеріалу панелей мінімальної маси (кількість шарів, їх товщина та кути армування) при обмеженнях на міцність, стійкість і прогин. Виведено залежності для визначення можливої кількості рівномірних шарів у пакеті, для яких критерій міцності виконується у вигляді рівності. Сформульовано і розв'язано задачу оптимізації структури композиційного матеріалу, що складається з рівномірних шарів. Показано, що в залежності від характеру і величини навантаження оптимальними є структури $[0]$, $[90]$, $[0, 90]$, $[\pm\varphi]$, $[\pm\varphi_1, \pm\varphi_2]$, $[0, \pm\varphi]$, $[90, \pm\varphi]$, $[0, 90, \pm\varphi]$. Отримано необхідні і достатні системи рівнянь для визначення проектних параметрів. Розглянуто деякі приклади та окремі випадки навантаження.

1. *Образцов И. Ф., Васильев В. В., Бунаков В. А.* Оптимальное армирование оболочек вращения из композиционных материалов. – М.: Машиностроение, 1997. – 144 с.
2. *Васильев В. В.* Некоторые вопросы оптимального проектирования материалов // Актуальные проблемы авиационной науки и техники. – М.: Машиностроение, 1984. – С. 66 – 77.
3. *Васильев В. В.* Механика конструкций из композиционных материалов. – М.: Машиностроение, 1988. – 272 с.
4. *Карпов Я. С., Муравицкий О. С.* Проектирование оболочек вращения из композиционных материалов. Учеб. пособие. – Харьков: ХАИ, 1997. – 88 с.

Поступила 14. 04. 2003