

НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИЙ РАЗДЕЛ

УДК 620.178.5:620.179

Вибродиагностические параметры усталостного повреждения прямоугольных пластин. Сообщение 1. Методика определения параметров повреждения

В. В. Матвеев, О. Е. Богинич

Институт проблем прочности им. Г. С. Писаренко НАН Украины, Киев, Украина

Описана методика приближенного аналитического определения параметров усталостного повреждения прямоугольных пластин. В качестве исходной характеристики повреждения рассмотрены относительная величина обусловленного наличием трещины нормального отрыва изменения потенциальной энергии деформации пластины, с помощью которой находят выражения для определения изменения собственной частоты колебаний пластины, и параметры искажения моногармоничности колебаний в режиме основного резонанса и супергармонического резонанса 2-го порядка.

Ключевые слова: прямоугольная пластина, усталостное повреждение, трещина нормального отрыва, закрывающаяся трещина, вибродиагностические параметры повреждения, основной и супергармонический резонансы.

Введение. Среди многочисленных исследований колебаний тел с трещинами применительно к задачам вибродиагностики их усталостного повреждения колебания пластин изучены относительно мало.

В качестве вибродиагностических параметров повреждения в основном рассматриваются изменения собственных форм и частот колебаний. При этом большое внимание уделяется определению собственных частот колебаний пластин как более чувствительных к повреждению. Так, в работе [1] отмечается, что применение метода распределения энергии деформации [2] как разновидности экспериментального метода определения форм колебаний при виброиспытаниях пластины размером $430 \times 450 \times 9$ мм с использованием 31 акселерометра позволило выявить только прорезы длиной более 50 мм. Результаты исследований [3–6] также свидетельствуют о низкой чувствительности изменения форм колебаний к повреждению. В то же время следует отметить и далеко не во всех случаях достаточную чувствительность изменения собственных частот к диагностике повреждения. Так, при испытаниях алюминиевых пластин ($250 \times 225 \times 2,5$ мм) со сквозной узкой прорезью длиной 12 мм наибольшее изменение частот пяти форм колебаний пластины не превышало 1% [7]. Анализ других вибродиагностических параметров, как, например, искажение моногармоничности колебательного процесса и возникновение суб- и супергармонических резонансов

[8–11], применительно к пластинам в литературных источниках представлен практически только в работе [12].

В качестве объекта исследования только в некоторых из приведенных работ использовали прямоугольные пластины в основном со сквозными краевыми или центральными трещинами-разрезами. В известных расчетно-теоретических исследованиях колебаний прямоугольных пластин рассматриваются как численные решения с помощью метода конечных элементов (МКЭ) [13], так и численно-аналитические, базирующиеся на решении Леви–Надаи с составлением интегральных уравнений Фредгольма первого и второго рода с учетом сингулярности напряжений в вершине трещины [14] и использующие конечное преобразование Фурье разрывных функций. Для решения указанной задачи применяется также некоторая разновидность дискретного метода [15], заключающаяся в разбиении пластины на небольшое количество подобластей в соответствии с расположением трещины, выборе набора функций формы для каждой из них, составлении матрицы неразрывности для всей области пластины и уравнения на собственные значения путем минимизации энергетического функционала [16].

Известно небольшое количество работ, посвященных исследованию колебаний пластины с поверхностной трещиной. Так, в [12] рассматриваются колебания прямоугольной пластины с поверхностными трещинами, которые моделируются некоторыми клинообразными выборками материала с прямым углом у вершины глубиной, равной глубине трещины, и принятии априори ширины, равной удвоенной глубине трещины. Уравнения колебаний составляются на основе принципа Остроградского–Гамильтона и метода Ритца. Существует также иной подход к моделированию трещины, который использован при исследовании колебаний круглой пластины [17]. Поверхностная краевая трещина постоянной глубины моделируется локальной распределенной податливостью, определяемой как МКЭ, так и с использованием энергетических соотношений линейной механики разрушения и известных выражений для коэффициента интенсивности нормальных напряжений, полученных для призматической балки с краевой трещиной.

Представленные численно-аналитические решения не позволяют в явном виде получить зависимости изменения собственных частот колебаний пластины от относительных размеров и места расположения трещины, а также относительных размеров и формы колебаний пластины. Это обусловлено используемым способом моделирования трещины и необходимостью рассмотрения задачи на собственные значения с учетом изменения формы колебаний пластины при наличии трещины.

В настоящей работе рассматриваются приближенные аналитические методы определения основных вибродиагностических параметров усталостного повреждения прямоугольных пластин при различных условиях закрепления, формах колебаний и видах трещин нормального отрыва при пренебрежении изменением формы колебаний в случае раскрытия трещины. Такое допущение, как показано на примере призматических стержней [18, 19], вполне справедливо при раскрытии малых трещин, что важно с точки зрения вибродиагностики более ранних стадий усталостного повреждения пластинчатых элементов конструкций.

В данном сообщении излагаются основные положения методики определения параметров повреждения.

Методика определения относительной энергетической характеристики повреждения пластины при наличии трещины. Рассмотрим однородную прямоугольную пластину постоянной толщины t , в сечениях которой, параллельных плоскости yOz , имеются плоские трещины (рис. 1).

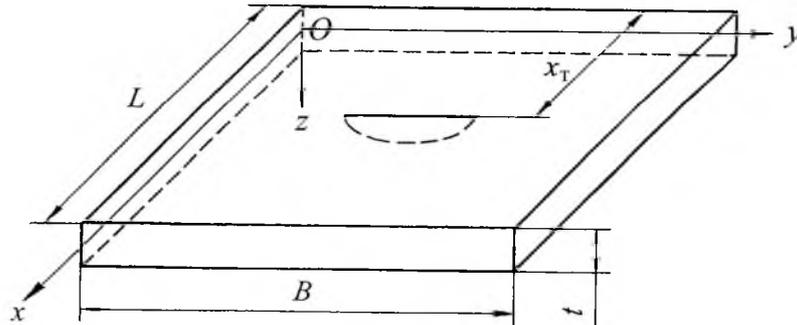


Рис. 1. Схема однородной прямоугольной пластины постоянной толщины t с прямолинейной плоской трещиной.

Наличие малых трещин, как и при исследовании стержневых элементов [8, 9, 20], будем интегрально оценивать через относительное изменение жесткости пластины:

$$\alpha = \frac{D - D_T}{D}, \quad (1)$$

характеризуемой в данном случае цилиндрической жесткостью:

$$D = \frac{Et^3}{12(1 - \nu^2)}, \quad (2)$$

где D_T – цилиндрическая жесткость пластины с трещиной при деформировании в условиях, когда трещина или ее часть находятся в зоне номинальных растягивающих напряжений изгиба σ_x , выражаемая далее через параметр α :

$$D_T = (1 - \alpha)D. \quad (3)$$

Учитывая малость трещины, будем пренебрегать ее влиянием на изменение формы колебаний пластины, которую принимаем в виде

$$w(x, y) = AX(x)Y(y), \quad (4)$$

где $X(x)$ и $Y(y)$ – балочные функции, соответствующие балкам с аналогичными условиями закрепления краев.

Рассматривая пластину при наличии и отсутствии трещины или в случае ее закрытия при одинаковых величине и характере распределения внутренних усилий (изгибающих M_x , M_y и крутящего M_{xy} моментов), составим уравнение энергетического баланса:

$$\Pi_T = \Pi_0 + \Delta\Pi_T, \quad (5)$$

где Π_0 – потенциальная энергия неповрежденной пластины,

$$\begin{aligned} \Pi_0 &= \frac{1}{2D} \int_0^L \int_0^B (M_x^2 + M_y^2 + M_{xy}^2) dx dy = \\ &= \frac{D}{2} \int_0^L \int_0^B \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + 2\nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2(1-\nu) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] dx dy; \quad (6) \end{aligned}$$

Π_T – потенциальная энергия деформации пластины при открытой трещине, определяемая через значение Π_0 и параметр α ,

$$\Pi_T = \frac{1}{2(1-\alpha)D} \int_0^L \int_0^B (M_x^2 + M_y^2 + M_{xy}^2) dx dy = \frac{1}{1-\alpha} \Pi_0; \quad (7)$$

$\Delta\Pi_T$ – приращение потенциальной энергии деформации пластины, обусловленное увеличением ее податливости за счет наличия трещины и подлежащее определению при заданной величине и характере распределения внутренних усилий.

Принимаемое условие одинакового характера распределения внутренних усилий при открытой и закрытой трещине предполагает, как уже отмечалось, пренебрежение изменением формы колебаний пластины при открытой трещине. Такое предположение допустимо при относительно малых размерах трещины, тем более, что известные экспериментальные исследования влияния повреждения на формы колебаний пластин [1, 3–6] свидетельствует о низкой чувствительности изменения их формы колебаний.

Из энергетического соотношения (5) с учетом (7) следует

$$\alpha = \frac{\Delta\Pi_T / \Pi_0}{1 + \Delta\Pi_T / \Pi_0} = \frac{\kappa}{1 + \kappa},$$

где

$$\kappa = \frac{\Delta\Pi_T}{\Pi_0} \quad (8)$$

– удобная энергетическая характеристика повреждения пластины, которая будет использоваться для дальнейшего анализа.

Пренебрегая какими-либо сдвигами поверхностей трещин, т.е. рассматривая их как трещины нормального отрыва, определение параметра κ сводится к нахождению приращения потенциальной энергии $\Delta\Pi_T$ при заданной величине и характере распределения в данном случае изгибающего момента

$$M_x = D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right), \quad (9)$$

определяющего значение номинальных напряжений изгиба σ_T в сечениях расположения трещин ($x = x_T$):

$$\sigma_T(y, z) = 12M_{x=x_T}(y) \frac{z}{t^3}. \quad (10)$$

Используя известное из рассмотрения двухмерной задачи о трещине в нагруженном линейно-упругом плоском теле соотношение между производной потенциальной энергии слоя единичной толщины по длине прямой трещины и коэффициентами интенсивности напряжений [21], выражение для приращения потенциальной энергии вследствие наличия в пластине параллельно плоскости zOy плоской трещины нормального отрыва площадью S и контуром Γ можно с определенным допущением записать в следующем виде:

$$\Delta\Pi_T = \frac{1-\nu^2}{E} \iint_{(S)} K_1^2 dS = \frac{t^3}{12D} \iint_{(S)} K_1^2 \delta\vec{\rho} \cos\theta d\Gamma, \quad (11)$$

где K_1 – коэффициент интенсивности нормальных напряжений, являющийся функцией рассчитанного для пластины без трещины номинального максимального напряжения изгиба $\sigma_T(y)$ в сечении ее расположения ($x = x_T$), а также формы, размеров и координат рассматриваемой точки фронта (контур Γ) трещины; $\delta\vec{\rho}$ – вектор возможного смещения точек фронта трещины; θ – угол между $\delta\vec{\rho}$ и нормалью к фронту трещины.

Располагая для конкретного вида трещины выражением для коэффициента интенсивности напряжений K_1 , можно с использованием формул (8), (6), (10), (11) определить для рассматриваемых размеров и места расположения трещины при заданных размерах пластины, условиях ее закрепления и формах колебаний значение κ :

$$\kappa = \frac{\frac{t^3}{6D^2} \iint_{(S)} [K_1(\sigma_T)]^2 \delta\vec{\rho} \cos\theta d\Gamma}{\int_0^L \int_0^B \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + 2\nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2(1-\nu) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] dx dy}. \quad (12)$$

Методика определения вибродиагностических параметров повреждения пластины. На основании определения собственной частоты пластины при заданной форме колебаний через отношение приведенной жесткости K к приведенной массе M эквивалентной системы с одной степенью свободы с учетом того, что аналогично (3) приведенная жесткость пластины при открытой трещине $K_T = (1 - \alpha)K$, получим выражение для собственной частоты колебаний пластины с открытой трещиной:

$$\omega_T = \sqrt{1 - \alpha} \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{1 + \kappa}} \omega_0, \quad (13)$$

где ω_0 – собственная частота колебаний цельной пластины, равная $\sqrt{K/M}$.

При деформировании пластины в условиях, когда на полуцикле одного знака трещина открыта, а другого – закрыта, собственная частота колебаний такой нелинейной системы с асимметричной билинейной упругой характеристикой определяется по известному соотношению [22], которое при использовании формулы (13) принимает вид

$$\omega_{Т.З} = \frac{2\omega_0\omega_T}{\omega_0 + \omega_T} = \frac{2\sqrt{1 - \alpha}}{1 + \sqrt{1 - \alpha}} \omega_0 = \frac{2}{1 + \sqrt{1 + \kappa}} \omega_0. \quad (14)$$

Таким образом, задача определения собственных частот колебаний пластины в случае открытой (ω_T) и периодически закрывающейся ($\omega_{Т.З}$) трещины сводится при заданной форме колебаний к нахождению характеристики κ (12).

В качестве вибродиагностических параметров повреждения пластины вследствие образования трещин нормального отрыва удобно использовать значения относительного изменения собственной частоты ее колебаний в случае открытых трещин

$$\beta_T = \frac{\omega_0 - \omega_T}{\omega_0} = \frac{\sqrt{1 + \kappa} - 1}{\sqrt{1 + \kappa}} \quad (15)$$

и при периодически закрывающихся трещинах

$$\beta_{Т.З} = \frac{\omega_0 - \omega_{Т.З}}{\omega_0} = \frac{\sqrt{1 + \kappa} - 1}{\sqrt{1 + \kappa} + 1}. \quad (16)$$

На рис. 2 представлены зависимости относительного изменения собственных частот колебаний пластины β_T и $\beta_{Т.З}$ от величины κ . Следует обратить внимание на следующую возможную особенность. При наличии одной закрывающейся трещины определяемое значение κ соответствует полуциклу колебаний, когда трещина открыта, т.е. $\sigma_T(y) > 0$, а на полуцикле другого знака, когда трещина закрыта и пластина ведет себя как цельная,

$\kappa = 0$. При наличии же нескольких закрывающихся трещин в зависимости от места их расположения, обусловливаемого значением координат x_T , и рассматриваемой формы колебаний пластины характеристика κ может иметь как разное, так и одинаковое значение на полуциклах разного (\pm) знака: $\kappa_{(+)}$ и $\kappa_{(-)}$.

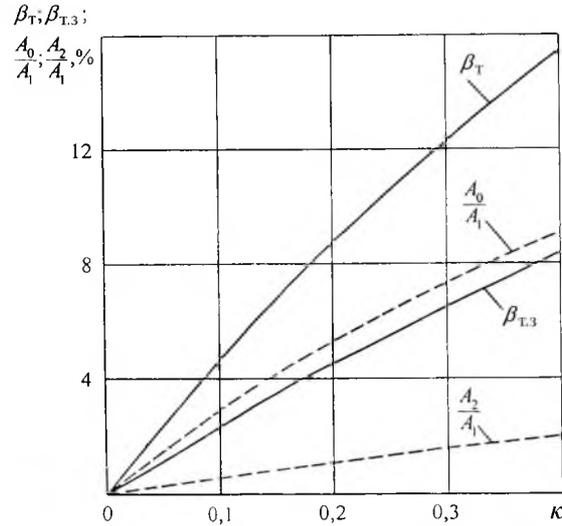


Рис. 2. Зависимости относительного изменения собственных частот колебаний β_T и $\beta_{T.3}$ и относительных значений постоянной составляющей A_0/A_1 и амплитуды A_2/A_1 второй гармоники при основном резонансе от характеристики повреждения пластины κ .

В этом случае собственные частоты колебаний пластины на соответствующих полуциклах равны

$$\omega_{T(+)} = \frac{1}{\sqrt{1 + \kappa_{(+)}}} \omega_0; \quad \omega_{T(-)} = \frac{1}{\sqrt{1 + \kappa_{(-)}}} \omega_0, \quad (17)$$

а собственная частота колебаний пластины за цикл определяется выражением

$$\omega_{T.3}^* = \frac{2\omega_{T(+)}\omega_{T(-)}}{\omega_{T(+)} + \omega_{T(-)}} = \frac{2\omega_0}{\sqrt{1 + \kappa_{(+)}} + \sqrt{1 + \kappa_{(-)}}} \quad (18)$$

и соответствующее относительное изменение собственной частоты колебаний пластинки –

$$\beta_{T.3}^* = \frac{\omega_0 - \omega_{T.3}^*}{\omega_0} = 1 - \frac{2}{\sqrt{1 + \kappa_{(+)}} + \sqrt{1 + \kappa_{(-)}}}. \quad (19)$$

При $\omega_{T(-)} = \omega_0$, т.е. когда на полуцикле другого ($-$) знака все трещины закрыты, $\kappa_{(+)} = \kappa$, $\kappa_{(-)} = 0$, и формулы (17), (18), (19) соответственно принимают вид (13), (14), (16).

Однако в литературных источниках отмечается недостаточная чувствительность регистрируемого на практике изменения собственных частот элементов конструкций к наличию малых трещин. Принято, что надежное диагностирование повреждения возможно, если изменение собственной частоты превышает 5% [23], т.е. при значении параметра $\kappa > 0,1 \dots 0,2$.

Кроме того, использование в качестве вибродиагностического параметра повреждения собственных частот колебаний пластины требует трудоемкой процедуры паспортизации исходных значений частот диагностируемого объекта в строго воспроизводимых условиях его закрепления.

В связи с этим необходимо оценить возможную эффективность таких чувствительных вибродиагностических индикаторов повреждения, как параметры искажения гармоничности колебаний, обусловленного нелинейностью колебательной системы вследствие наличия периодически закрывающихся трещин, т.е. когда значения параметра κ отличаются на полупериодах разного знака ($\kappa_{(+)} \neq \kappa_{(-)}$).

Наиболее представительными параметрами искажения гармоничности колебаний, определяемыми при гармоническом анализе регистрируемого колебательного процесса упругого тела с закрывающейся трещиной, являются величина отношения постоянной составляющей A_0 и амплитуды второй гармоники A_2 к амплитуде первой гармоники A_1 . Эти параметры обнаруживаются как при основном резонансе (частота возбуждения $\nu = \omega_{т.з}$) [8], так и особенно при супергармоническом резонансе 2-го порядка ($\nu = 0,5\omega_{т.з}$) [9] и могут быть выражены через параметр κ .

Исследование колебаний пластины с закрывающейся трещиной при заданной собственной форме сводится к рассмотрению колебаний эквивалентной системы с одной степенью свободы с несимметричной билинейной характеристикой восстанавливающей силы [12]. Вынужденные колебания такой существенно нелинейной системы [24] можно описать уравнением [20]

$$\frac{d^2 u}{dt^2} + 2h \frac{du}{dt} + \omega_0^2 [1 - 0,5\alpha(1 + \text{sign } u)]u = q_0 \sin \nu t, \quad (20)$$

где h – коэффициент, характеризующий диссипативные свойства колебательной системы.

Сложность аналитического решения данного уравнения обуславливает отсутствие в известных литературных источниках выражений для определения параметров решения в явном виде. Метод построения решения в рядах Фурье, обеспечивающий получение приближенных решений с необходимой точностью, сводится, как правило, к достаточно сложным и громоздким системам трансцендентных уравнений, не относящихся к категории удобных для анализа и требующих численного решения [12, 24, 25].

Поэтому для приближенной оценки таких основных вибродиагностических параметров, как отношения A_0/A_1 и A_2/A_1 , используем полученные в явном виде их зависимости от параметра α при основном резонансе [20] и слабом ($A_2 < A_1$) супергармоническом резонансе 2-го порядка [26].

Так, с учетом соотношения $\alpha = \kappa/(1 + \kappa)$ для относительной величины постоянной составляющей как при основном, так и супергармоническом резонансе получим

$$\frac{A_0}{A_1} \approx \frac{\kappa}{\pi(1 + \kappa)}, \quad (21)$$

для относительной величины амплитуды второй гармоники при основном резонансе ($\nu = \omega_{ТЗ}$) –

$$\frac{A_2}{A_1} \approx \frac{2\kappa}{9\pi(1 + \kappa)} \quad (22)$$

и при супергармоническом резонансе 2-го порядка ($\nu = 0,5\omega_{ТЗ}$) –

$$\frac{A_2}{A_1} \approx \frac{\kappa(1 + \sqrt{1 + \kappa})[(8 - \pi)(1 + \kappa) - \pi] \omega_0}{32(1 + \kappa)^2 h}. \quad (23)$$

Формула (23) получена для случая слабого резонанса, что ограничивает ее использование с достаточной точностью условием $\kappa < \frac{5,5h/\omega_0}{1 - 5,5h/\omega_0}$, где

h/ω_0 может быть выражено через логарифмический декремент колебаний δ : $\frac{h}{\omega_0} = \frac{\delta}{2\pi}$. При указанном условии отличие расчетных значений (23) от

данных численного решения дифференциального уравнения (20) при предельной величине параметра κ не превышает 5%.

Для случая, когда нелинейность определяется различием параметра κ на полувциклах разного знака ($\kappa_{(+)} \neq \kappa_{(-)}$), эквивалентное значение $\alpha = \frac{\kappa_{(+)} - \kappa_{(-)}}{1 + \kappa_{(+)}}$, и соответственно параметр κ в формулах (18)–(20) следует

принять равным

$$\kappa = \frac{\kappa_{(+)} - \kappa_{(-)}}{1 + \kappa_{(-)}}. \quad (24)$$

Для сравнительной оценки представительности изменения собственных частот колебаний упругого тела при наличии трещин и основных параметров искажения моногармоничности колебательного процесса при основном резонансе на рис. 2 зависимости (21) и (22) показаны штриховыми линиями. Как видно, при основном резонансе параметры искажения моногармоничности колебаний несколько уступают уровню изменения собственных частот. При супергармоническом резонансе наблюдается совершенно иная картина. На рис. 3 для случая супергармонического резонанса 2-го порядка сплошными линиями изображены зависимости относительной амплитуды второй гармоники от параметра повреждения κ при различных

значениях коэффициента h/ω_0 , характеризующих диссипативные свойства колебательной системы в диапазоне значений логарифмического декремента колебаний $\delta_h = 0,628...6,28\%$, штриховой линией – зависимость относительного изменения собственной частоты колебаний упругого тела ($\beta_{т.з}$) при наличии трещины. Штрихпунктирная линия на рис. 3 соответствует предельному значению параметра κ , позволяющему при данной величине логарифмического декремента колебаний δ использовать формулу (23) с высокой достоверностью, т.е. условию $\kappa = \frac{2,25\delta}{\pi - 2,25\delta}$.

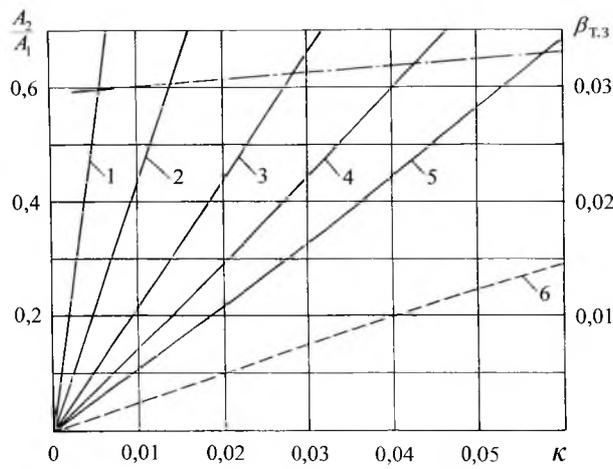


Рис. 3. Зависимости относительной амплитуды A_2/A_1 второй гармоники для случая супергармонического резонанса 2-го порядка при различных значениях коэффициента h/ω_0 , характеризующего демпфирующую способность пластины (сплошные линии), и относительного изменения собственной частоты ее колебаний от величины повреждения κ (штриховая линия): 1 – $h/\omega_0 = 0,001$; 2 – $h/\omega_0 = 0,0025$; 3 – $h/\omega_0 = 0,005$; 4 – $h/\omega_0 = 0,0075$; 5 – $h/\omega_0 = 0,01$; 6 – $\beta_{т.з}$.

Как видно, при супергармоническом резонансе параметр искажения моногармоничности колебательного процесса A_2/A_1 более чем на порядок значимее изменения собственных частот и его можно рассматривать в качестве наиболее чувствительного признака повреждения.

Заключение. Исходя из энергетических соотношений линейной механики разрушения и результатов решения дифференциального уравнения вынужденных колебаний упругого тела с несимметричной билинейной характеристикой восстанавливающей силы изложена методика приближенного аналитического определения относительной энергетической характеристики и вибродиагностических параметров повреждения прямоугольных пластин, обусловленного наличием трещин нормального отрыва.

Резюме

Описано методику приближенного аналитического визначення параметрів пошкодження прямокутних пластин від утомленості. В якості початкової

характеристики пошкодження розглянуто відносно величину зумовленого наявністю тріщини нормального відриву зміни потенціальної енергії деформації пластини, за допомогою якої отримують вирази для визначення зміни власної частоти коливань пластини, і параметри спотворення моногармонічності коливань у режимі основного резонансу та супергармонічного резонансу 2-го порядку.

1. *Cornwell P., Doebling S. W., and Farrar C. R.* Application of the strain energy damage detection method to plate-like structures // *J. Sound Vibration*. – 1999. – **224**, No. 2. – P. 359 – 374.
2. *Osegueda R. A., Carrasco C., and Meza R.* A modal strain energy distribution method to localize and quantify damage // *Proc. of the 15th IMAC*. – Orlando, Florida, USA. – 1997. – **2**. – P. 1298 – 1304.
3. *Chen Y. and Swamidas A. S. J.* Dynamic characteristics and modal parameters of a plate with a small growing surface crack // *Proc. of the 12th IMAC*. – Honolulu, HI, USA. – 1994. – **2**. – P. 1155 – 1161.
4. *Petro S. H., Chen S. E., GangaRao H. V. S., and Venkatappa S.* Damage detection using vibration measurements // *Proc. of the 15th IMAC*. – Orlando, Florida, USA. – 1997. – **1**. – P. 113 – 119.
5. *Chen Y. and Swamidas A. S. J.* Modal updating for crack detection in plated T-joints // *Proc. of the 15th IMAC*. – Orlando, Florida, USA. – 1997. – **2**. – P. 1332 – 1338.
6. *Chen S. E., Venkatappa S., Petro S., and GangaRao H.* Damage detection using 2-D strain energy distribution and scanning laser // *Proc. of the 17th IMAC*. – Kissimmee. – 1999. – **1**. – P. 869 – 875.
7. *Ruotolo R., Surace C., and Sferrazzo F.* Crack detection in a thin panel using vibration-based inspection // *Localized Damage*. – Bologna, 1998.
8. *Матвеев В. В., Бовсуновский А. П.* К анализу эффективности метода спектральной вибродиагностики усталостного повреждения элементов конструкций. Сообщ. 4. Анализ искажения гармоничности цикла колебаний стержневых элементов при наличии закрывающихся поперечных трещин // *Пробл. прочности*. – 2000. – № 1. – С. 5 – 12.
9. *Матвеев В. В., Бовсуновский А. П.* Некоторые аспекты колебаний упругого тела с “дышащей” несплошностью материала // *Там же*. – № 5. – С. 44 – 60.
10. *Tsyfansky S. L. and Beresnevich V. I.* Detection of fatigue cracks in flexible geometrically non-linear bars by vibration monitoring // *J. Sound Vibration*. – 1998. – **213**, No. 1. – P. 159 – 168.
11. *Цыфанский С. Л., Бересневич В. И., Магоне М. А.* Вибродиагностика усталостных трещин в несущих поверхностях летательных аппаратов на основе использования нелинейных эффектов // *Дефектоскопия*. – 1993. – № 2. – С. 87 – 94.
12. *Плахтиенко Н. П.* Резонанс второго порядка пластини, содержащей протяженные дефекты целостности // *Пробл. прочности*. – 2001. – № 1. – С. 105 – 116.

13. *Swamidias A. S. J. and Chen Y.* Monitoring crack growth through change of modal parameters // *Eng. Fract. Mech.* – 1995. – **186**, No. 2. – P. 325 – 343.
14. *Stahl B. and Keer L. M.* Vibration and stability of cracked rectangular plates // *Jnt. J. Solids Struct.* – 1972. – No. 8. – P. 69 – 91.
15. *Liew K. M., Hung K. C., and Lim M. K.* Roles of domain decomposition method in plate vibrations: treatment of mixed discontinuous periphery boundaries // *Int. J. Mech. Sci.* – 1993. – **35**. – P. 615 – 632.
16. *Liew K. M., Hung K. C., and Lim M. K.* A solution method for analysis of cracked plates under vibration // *Eng. Fract. Mech.* – 1994. – **48**, No. 3. – P. 393 – 404.
17. *Anifantis N. K., Actis R. L., and Dimarogonas A. D.* Vibration of cracked annular plates // *Ibid.* – 1994. – **49**, No. 3. – P. 371 – 379.
18. *Бовсуновский А. П.* К вопросу определения собственной частоты поперечных и продольных колебаний стержня с трещиной. Сообщ. 2. Результаты эксперимента и расчета // *Пробл. прочности.* – 1999. – № 3. – С. 45 – 53.
19. *Матвеев В. В., Бовсуновский А. П.* К анализу эффективности метода спектральной вибродиагностики усталостного повреждения элементов конструкций. Сообщ. 3. Аналитическое и численное определение собственных частот продольных и изгибных колебаний стержней с поперечными трещинами // *Там же.* – № 4. – С. 19 – 31.
20. *Матвеев В. В.* К анализу эффективности метода спектральной вибродиагностики усталостного повреждения элементов конструкций. Сообщ. 1. Продольные колебания, аналитическое решение // *Там же.* – 1997. – № 6. – С. 5 – 20.
21. *Разрушение: В 7 т. Т. 2.* Математические основы теории разрушения. – М.: Мир, 1975. – 764 с.
22. *Вибрации в технике. Справочник: В 6 т. Т. 2.* Колебания нелинейных механических систем. – М.: Машиностроение, 1979. – 351 с.
23. *Salawu O. S.* Detection of structural damage through changes in frequency: a review // *Eng. Struct.* – 1997. – **19**, No. 9. – P. 718 – 723.
24. *Крюков Б. И.* Вынужденные колебания существенно нелинейных систем. – М.: Машиностроение, 1984. – 216 с.
25. *Плахтиенко Н. П.* К диагностике кусочно-постоянной жесткости при нелинейных резонансах // *Прикл. механика.* – 1991. – **27**, № 10. – С. 112 – 120.
26. *Матвеев В. В.* Приближенное аналитическое определение вибродиагностических параметров нелинейности упругих тел, обусловленной наличием закрывающейся трещины. Сообщ. 2. Определение диагностических параметров при основном и супергармоническом резонансе 2-го порядка // *Пробл. прочности.* – 2004. – № 5. – С. 5 – 22.

Поступила 11. 03. 2004