

К расчету несущей способности упругих оболочек с периодическими вмятинами (теория и эксперимент)

Г. Д. Гавриленко^а, В. Л. Красовский^б

^а Институт механики им. С. П. Тимошенко НАН Украины, Киев, Украина

^б Приднепровская государственная академия строительства и архитектуры, Днепропетровск, Украина

Обнаруженное ранее авторами экспериментально явление локальной потери устойчивости подтверждено теоретически. Дан подход к оценке исчерпания несущей способности круговых цилиндрических оболочек с периодическими вмятинами. Показано, что применение линейной теории или решение нелинейной задачи в малых приближениях (при расчете докритического состояния) приводят к большим количественным погрешностям. Для уточнения и получения достоверных численных результатов необходима последовательная постановка и решение нелинейной задачи о неоднородном докритическом состоянии в высоких приближениях. Определенная численно нагрузка локальной потери устойчивости ниже экспериментальных значений, т.е. оценивается в запас прочности. Нагрузка, характеризующая общую потерю устойчивости, либо близка к экспериментальным данным, либо также ниже.

Ключевые слова: несущая способность, периодические вмятины, цилиндрическая оболочка, упругость, эксперимент.

Введение. Существует ряд теоретических исследований по устойчивости оболочек при наличии различных определенных форм начальных прогибов [1–13], посвященных нахождению критических нагрузок при фиксированных амплитудах (максимальная величина прогибов определенного класса) ограниченной величины. Остаются не решенными теоретические вопросы, возникающие при расширении классов начальных несовершенств и при введении в учет прогибов с максимальными амплитудами, существенно превышающими толщину оболочки. В первую очередь это относится к локальным осесимметричным [7] и периодическим прогибам. Ссылки на работы по устойчивости несовершенных оболочек даны, в частности, в монографии [14]. Там же предложена серия полуэмпирических кривых (для различных $r/t \leq 4000$), построенных по результатам обработки экспериментальных данных.

В работах [15–17] представлены теоретические результаты по устойчивости оболочек с вмятинами, однако в них отсутствуют данные сравнения с экспериментом. При нахождении критических сил использовались замеры начальных прогибов по всей поверхности оболочки, что позволило добиться хорошего совпадения результатов теории и эксперимента [18]. В [19] в расчет также вводились замеренные начальные прогибы. Расчетные данные от экспериментальных отличаются на +16...–17%. Несовершенные оболочки общего вида рассмотрены в [20].

Указанные работы содержат либо теоретические результаты без какого-либо сравнения с экспериментом, либо одиночные сопоставления с данными

эксперимента [19], но в них отсутствует систематический подход к изучаемой проблеме и не затрагивается вопрос о несущей способности оболочек.

Систематическое экспериментальное исследование по оценке влияния различных типов начальных несовершенств на несущую способность оболочек выполнено ранее [21–23] без детального теоретического анализа.

Цель настоящей работы заключается в объединении известных экспериментальных результатов и предложенного теоретического подхода не только для сопоставления начальных и локальных критических нагрузок, но и нагрузок, определяющих несущую способность оболочек. Результаты получены при достаточно густой сетке и могут быть уточнены для оболочек определенного типа при использовании трехмерной теории устойчивости [24] и накоплении численных данных о закритическом поведении оболочек, аналогично работам [25–27].

Методика эксперимента и образцы. Кратко опишем методику испытаний [28]. В экспериментах изучалось докритическое поведение и устойчивость оболочек с различным числом начальных вмятин, размещенных равномерно по окружности в среднем сечении оболочки (рис. 1).

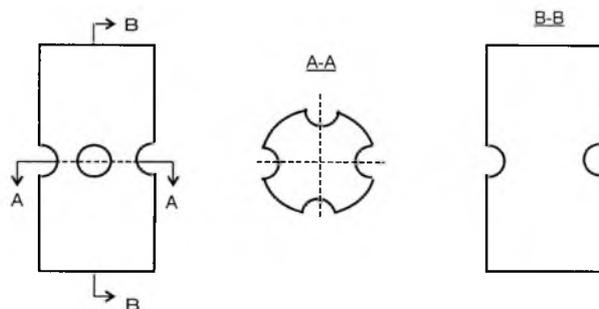


Рис. 1. Схема экспериментальной оболочки с четырьмя периодическими вмятинами.

С целью устранения возможных пластических деформаций использовались оболочки с безразмерным радиусом $r/t = 360$, где r – радиус оболочки, t – ее толщина. Все образцы (внутренний диаметр $2r = 143$ мм, относительная рабочая длина $l/r = 2$) изготовлялись из одного материала (стальная лента Х18Н9н) по единой технологии (контактная точечная сварка с одним продольным швом). При этом использовался материал с высоким условным пределом текучести ($\sigma_{02} \approx 800$ МПа, модуль Юнга $E = 191$ ГПа, коэффициент Пуассона $\nu = 0,32$), который не только устранял эффекты пластичности на этапах докритического нагружения оболочек, но и ограничивал их на стадии начального закритического деформирования.

Вмятины наносились на оболочки путем вдавливания в поверхность сферических сегментов размером 26 мм по окружности и 28 мм по длине оболочки.

Оболочки нагружались осевой сжимающей силой через центрирующие шары и специальные приспособления, обеспечивающие граничные условия шарнирного опирания. Их поведение изучалось на всех этапах деформирования: докритическом, критическом, а также закритическом, вплоть до разрушения.

Основные результаты эксперимента. В процессе испытаний определялись параметры относительных критических нагрузок осевого сжатия $\bar{p} = N_{кр}/N_{кл}$, где $N_{кр}$ и $N_{кл}$ – действительное и классическое значения критической нагрузки гладкой оболочки. Максимальная глубина начальных вмятин постоянна: $w_0/t = 1,5$.

На рис. 2 приведена экспериментальная зависимость \bar{p} от n_0 , где n_0 – число пологих периодических начальных вмятин.

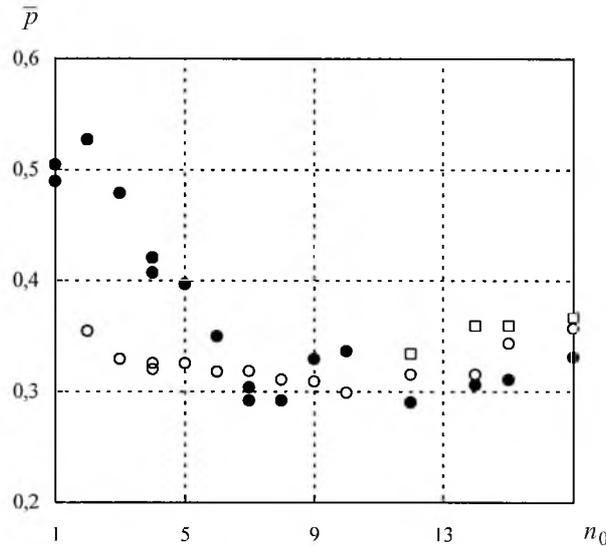


Рис. 2. Экспериментальная зависимость \bar{p} от n_0 для оболочек с периодическими вмятинами: ○ – нагрузки локального выпучивания; □ – бифуркационная перестройка локальной закритической конфигурации; ● – общая потеря устойчивости.

Изучение форм выпучивания показало, что форма вмятин локального выпучивания подобна форме одиночных закритических вмятин ($n = 8-9$) при $n_0 \leq 6$. С увеличением числа вмятин до $n_0 = 7-8$ вмятины локального выпучивания становились крупнее, с одной полуволной по длине оболочки ($n = 8-9$). При числе вмятин $n_0 = 12-17$ обнаруживались первая и вторая локальные формы. Первая локальная форма при возрастающем числе локальных вмятин $n_{л} = 12$ при $n_0 = 12$, $n_{л} = 14-15$ при $n_0 = 14-15$, $n_{л} = 17$ при $n_0 = 17$, вторая – $n_{л} = 7$ при $n_0 = 12-15$ и $n_{л} = 9$ при $n_0 = 17$. Форма общего выпучивания для всех оболочек одинакова, ей соответствовало $n = 8-9$.

Детальный анализ рис. 2 показал, что нагрузки общей потери устойчивости при $n_0 \leq 6$ значительно превышают нагрузки локального выпучивания. Их величина уменьшается с ростом n_0 и достигает минимума при $n_0 = 6-7$. С дальнейшим ростом числа вмятин ($n_0 = 9-17$) нагрузки локального выпучивания оказываются существенно выше, чем нагрузки общей потери устойчивости, которые могут служить во всем диапазоне ($1 \leq n_0 \leq 17$) критерием исчерпания несущей способности. Одновременно возникает вопрос, как их определить теоретически. Для этого используем численный метод.

Методика численного расчета устойчивости и несущей способности оболочек. Для расчета неоднородного докритического напряженно-деформированного состояния используются нелинейные уравнения смешанного типа относительно функции усилий и функции радиальных перемещений Муштари–Доннелла–Власова [29–31].

С помощью известного приема линеаризации получают линеаризованную относительно искомым добавок систему уравнений:

$$\begin{aligned} \nabla^4 \Phi - \frac{1}{r} w_{,xx} + L(w, w^0 + w_0) &= - \left[\nabla^4 \Phi_0 - \frac{1}{r} w_{,xx}^0 + \frac{1}{2} L(w^0, w^0 + 2w_0) \right]; \\ \nabla^4 w + \frac{\Phi_{,xx}}{r} - L(w^0 + w_0, \Phi) - L(w, \Phi_0) &= \\ = - \left[\nabla^4 w^0 - \frac{\Phi_{0,xx}}{r} - L(w^0 + w_0, \Phi_0) + q \right], \end{aligned} \quad (1)$$

где

$$\nabla^4 \bar{\Phi} = A \left(\frac{\partial^4 \bar{\Phi}}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \bar{\Phi}}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \bar{\Phi}}{\partial y^4} \right);$$

$$\nabla^4 \bar{w} = D \left(\frac{\partial^4 \bar{w}}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \bar{w}}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \bar{w}}{\partial y^4} \right);$$

$$L(\bar{w}, \bar{w} + 2\bar{w}_0) = \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial x^2} \frac{(\bar{w} + 2\bar{w}_0)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial y^2} \frac{\partial^2 (\bar{w} + 2\bar{w}_0)}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 (\bar{w} + 2\bar{w}_0)}{\partial x \partial y};$$

остальные операторы $L(\Phi_i, w_i)$ аналогичны по построению оператору $L(w, w^0 + w_0)$; Φ – функция усилий для добавок; w – функция приращений радиальных прогибов; w_0 – функция заданных начальных несовершенств; w^0 – уточняемая функция перемещений; Φ_0 – известная функция усилий.

Заметим, что правые части системы (1) являются, по существу, исходными нелинейными уравнениями относительно уточняемых значений Φ_0 и w^0 . Поэтому их назначение двойное. Применяя метод сеток и полагая правые части системы (1) на первом этапе расчета равными нулю, помимо значений функций на границе в процессе последовательных приближений получают новые значения Φ_0 и w^0 . Кроме того, когда правые части обращаются в нуль либо становятся как угодно близки к нему, можно считать полученные величины решениями нелинейных уравнений. Стремление правых частей к нулю – критерий сходимости решений нелинейных уравнений. Ведя этот процесс при возрастающем параметре нагрузки, можно по смене знака определителя судить о достижении указанным параметром критического значения. Процедура определения критических нагрузок детально описана в [2, 32–34].

При расчетах рассматривались вмятины следующей формы:

$$w_0 = -f_0 \sin \frac{\pi x}{l_1} \sin \frac{\pi y}{l_2}, \quad (2)$$

где l_1 и l_2 – размеры вмятины по длине и окружности.

Учитываемые критические нагрузки являются локальными критическими нагрузками.

После трансформации начальных вмятин вследствие локальной потери устойчивости для их описания использовались функции, отражающие качественно экспериментальный процесс:

$$w_0 = -f_0 \sin \frac{\pi x}{l_1} \sin^2 \frac{\pi y}{l_2}. \quad (3)$$

Указанные функции содержат следующую особенность поведения вмятин: форма малых вмятин трансформируется прежде всего в окружном направлении. Можно считать, что такое экспериментальное наблюдение используется как рабочая гипотеза, применяемая в расчете. Форма вмятины может быть уточнена, если аналитически точно решить задачу.

Расчет на устойчивость при использовании формы трансформированной вмятины и уточненной формы потери устойчивости дает возможность определить нагрузку общей потери устойчивости, которая исчерпывает несущую способность рассматриваемых оболочек.

Сопоставление теоретических и экспериментальных результатов.

Для численного анализа подобных задач необходимы методики, позволяющие учитывать локальность начального несовершенства и применять сгущенные сетки. Это не означает, что достаточно использовать мощный суперкомпьютер, и проблема решена. Использование густых сеток и большого числа неизвестных в каждом узле приводит к системам уравнений в сотни тысяч неизвестных. Такие методы требуют больших затрат машинного времени. Необходимо решать сотни тысяч уравнений на каждом шаге нагружения при большом числе приближений для различных форм потери устойчивости, большом числе геометрических и физических параметров и т.д. Все это приводит к непомерным расходам и не позволяет исследовать необходимое множество задач и получать обобщенные данные, используемые на практике. К тому же владение суперкомпьютерами доступно не всем исследователям. По мнению авторов, следует искать другой путь. Лучше использовать методы, приводящие к системам уравнений низких порядков. Для ПК класса Pentium III – это системы порядка 10–20 тыс. неизвестных. Поэтому нами использован смешанный метод.

Однако даже метод с малым числом неизвестных не является гарантией быстрого анализа. Для оценки несущей способности приходится исследовать сотни и тысячи вариантов решений, связанных с различными переборами нагрузки, приближений и пр., о чем говорилось ранее. Организация

счета должна быть такой, чтобы оптимизировать число вариантов задач, а также процедуры вычисления определителей и нахождения решений с целью получения обобщенных зависимостей, например зависимостей параметра критической нагрузки от безразмерного параметра максимального прогиба. Причем приходится вводить в расчет различные классы несовершенств (произвольные). Организация такой иерархии блока управления счетом и нахождения определителей позволяет в несколько раз ускорить счет для любой фиксированной сетки. Все это сводится к оптимальному алгоритму, использующему только оперативную память машины, что обычно в течение нескольких часов позволяет достичь поставленной цели. В противном случае на это ушли бы недели, месяцы, а часто решение поставленной задачи было бы невозможно из-за исчерпания ресурсов оперативной памяти машины, что характерно для расчета реальных конструкций. Использование же внешней памяти приводит к еще большему замедлению счета.

Ряд экспериментальных результатов (рис. 2) подвергался теоретическому анализу. Расчетные и экспериментальные данные представлены на рис. 3,а. Рассматривались оболочки следующей толщины при определенном n_0 : $t = 0,195$ мм ($n_0 = 2$); $t = 0,195$ мм ($n_0 = 3,57$); $t = 0,194$ мм ($n_0 = 4$); $t = 0,197$ мм ($n_0 = 4$); $t = 0,196$ мм ($n_0 = 6$); $t = 0,193$ мм ($n_0 = 8$).

При расчете использовалась максимальная сетка $I \times J = 143 \times 76$, где I – число узлов по длине; J – число узлов по окружности. С увеличением числа вмятин число узлов по окружности расчетного участка ($1/2n_0$ часть оболочки) уменьшалось. Как видно, расчетные величины локальных критических нагрузок существенно выше экспериментальных. Расхождение между нагрузками общего выпучивания еще выше. Теоретическое решение в третьем приближении может служить только для примерной качественной оценки нагрузок локального выпучивания.

С целью уточнения численных результатов проводился расчет тех же оболочек при шести приближениях, причем результаты пятого и шестого приближений совпадают до второй значащей цифры после запятой, что уже невозможно отразить графически. Как видно из рис. 3,б, значения расчетных нагрузок локальной потери устойчивости лежат ниже экспериментальных и близки к ним, в то время как расчетные нагрузки общей потери устойчивости либо близки к экспериментальным, либо определены в запас прочности ($n_0 = 2,3$).

Исследовались как локальная потеря устойчивости, так и принятая общая форма потери устойчивости. Из приведенных расчетов совершенно ясно, что описание этих явлений в рамках линейного подхода довольно грубое, поэтому не может служить в качестве оценки несущей способности таких оболочек и неприменимо для практических целей. Лишь расчеты, выполненные по предложенной методике с использованием нелинейной теории в высоких приближениях, можно рекомендовать для практических расчетов.

Из рис. 3,б видно, что нагрузка локальной потери устойчивости определяется с высокой точностью и в запас прочности. Расчетные данные располагаются ниже экспериментальных, характеризующих локальную по-

терю устойчивости. Расчетные значения исчерпания несущей способности также либо близки к экспериментальным, либо определены в запас прочности ($n_0 = 2-3$). Они могут быть уточнены при более тщательном анализе развития формы потери устойчивости.

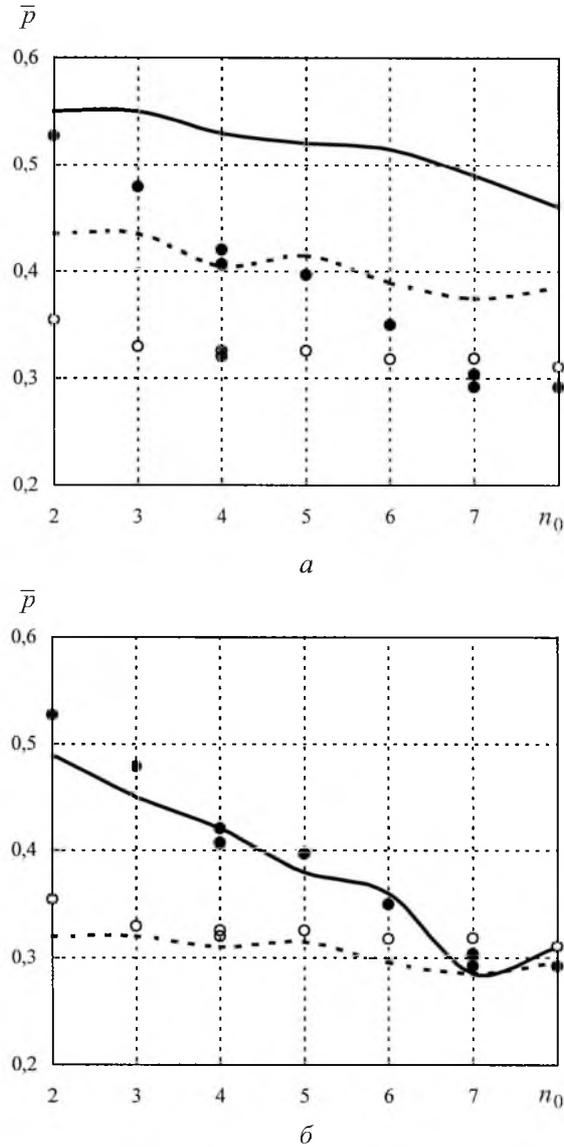


Рис. 3. Зависимости \bar{p} от n_0 для оболочек с периодическими вмятинами: $a - k = 3$; $b - k = 6$, k – число приближений: \circ , штриховые линии – соответственно экспериментальные и расчетные значения нагрузок локального выпучивания; \bullet , сплошные линии – то же для нагрузок общего выпучивания.

Отметим, что в оболочках изначально имели место несовершенства формы, так называемый начальный фон. Его влияние не учитывалось, однако оно могло и должно было проявиться для некоторых из рассмотренных оболочек, повлияв на экспериментальные данные.

Заключение. Теоретически и экспериментально исследованы нагрузки локального выпучивания для продольно сжатых оболочек с периодическими вмятинами. Впервые представлено законченное комплексное исследование по прогибам типа периодических вмятин, сочетающее экспериментальные и теоретические результаты, причем проведено их сравнение.

В обычных экспериментах локальные формы потери устойчивости не улавливаются. Их возникновение обычно фиксируется лишь по наличию звукового эффекта – хлопка, свидетельствующего о смене исходной формы равновесия на смежную. Визуально и приборами этот процесс не отслеживается. Более того, когда он происходит беззвучно, то вообще остается незамеченным. В результате рассматривается только общая форма потери устойчивости. В работе описаны эксперименты, в которых специально изучалось это явление.

В теоретических расчетах почти всегда при анализе устойчивости несовершенных оболочек ограничиваются определением верхних критических нагрузок либо по линейной, либо по нелинейной, что, естественно, точнее, теории и не определяют нагрузки локальной потери устойчивости.

Теоретическая методика позволяет не только расширять рассматриваемые классы начальных несовершенств и получать обобщенные характеристики, но и составлять библиотеки номограмм $\bar{p} = f(w_0/t)$ в зависимости от типов несовершенств, числа членов аппроксимирующих их рядов, формы потери устойчивости, докритической и закритической ее трансформации.

При широком поле исследований это приведет к накоплению банка данных о несущей способности оболочек. Их наложение на общее графическое поле позволяет уточнять и расширять нижний предел несущей способности оболочек, что, в свою очередь, даст возможность для практики получить уточненный критерий оценки несущей способности при характерных конструктивных или технологических несовершенствах либо характерных форм потери устойчивости.

Резюме

Виявлене раніше авторами експериментально явище локальної втрати стійкості підтверджено теоретично. Наведено підхід до оцінки вичерпання несучої здатності кругових циліндричних оболонок із періодичними вмятинами. Для уточнення і отримання достовірних числових результатів необхідна послідовна постановка і розв'язок нелінійної задачі про неоднорідний докритичний стан у високих наближеннях. Числове значення параметра навантаження, яке відповідає локальній втраті стійкості, є трохи нижчим за експериментальне, тобто оцінюється в запас міцності. Навантаження, що характеризує загальну втрату стійкості, або близьке до експериментальних даних, або також нижче.

1. Гавриленко Г. Д. Устойчивость ребристых цилиндрических оболочек при неоднородном напряженно-деформированном состоянии. – Киев: Наук. думка, 1989. – 176 с.

2. Гавриленко Г. Д. Устойчивость ребристых оболочек несовершенной формы. – Киев: Ин-т математики НАН Украины, 1999. – 190 с.
3. Булыгин А. В. Устойчивость сжатой цилиндрической оболочки, имеющей локальную вмятину // Тр. Казан. авиац. ин-та. – Казань: КАИ, 1974. – Вып. 166. – С. 73 – 78.
4. Гавриленко Г. Д. Исследование влияния локальных и регулярных осесимметричных прогибов на критические нагрузки ребристых оболочек // Прикл. механика. – 1982. – **18**, № 4. – С. 53 – 57.
5. Гавриленко Г. Д. Устойчивость цилиндрических оболочек с продольными вмятинами // Динамика и прочность машин. – Харьков: Вища шк., 1981. – С. 32 – 35.
6. Грищак В. З. Нелинейный анализ устойчивости гладких и ребристых цилиндрических оболочек с локальными начальными несовершенствами // Нелинейная теория оболочек и пластин: Тез. докл. – Казань, 1980. – С. 61 – 62.
7. Грищак В. З. Асимптотическая формула для критических напряжений в аксиально-сжатых цилиндрических оболочках с локальными несовершенствами // Прочность и долговечность конструкций. – Киев: Наук. думка, 1980. – С. 113 – 120.
8. Койтер В. Т. Влияние более или менее локализованных несовершенств на выпучивание круговых цилиндрических оболочек при осевом сжатии // Комплексный анализ и его приложения. – М.: Наука, 1978. – С. 242 – 244.
9. Кузнецов В. К., Липовцев Ю. В. Влияние локальных несовершенств на устойчивость цилиндрической оболочки при осевом сжатии // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1970. – № 1. – С. 134 – 136.
10. Матвеев Г. А. Некоторые вопросы локального выпучивания цилиндрических оболочек // Работы по механике сплошных сред. – Тула: ТПИ, 1975. – С. 62 – 65.
11. Матвеев Г. А. О распределении напряжений в цилиндрической оболочке при локальном ее выпучивании // Работы по механике сплошных сред. – Тула: ТПИ, 1974. – С. 99 – 104.
12. Amazigo J. C. Buckling under axial compression of long cylindrical shells with random axisymmetric imperfections // Quart. Appl. Math. – 1969. – **24**, No. 4. – P. 537 – 566.
13. Hutchinson J. W., Tennison R. S., and Muggeridge D. B. Effect of a local axisymmetric imperfection on the buckling behavior of a circular cylindrical shell under axial compression // AIAA J. – 1971. – **9**, No. 1. – P. 48 – 52.
14. Григолюк Э. И., Кабанов В. В. Устойчивость оболочек. – М.: Наука, 1978. – 360 с.
15. Gavrylenko G. D. Stability of cylindrical shells with localized imperfections of the form // Int. Appl. Mech. – 2002. – **38**, No. 12. – P. 98 – 102.

16. Гавриленко Г. Д., Дудник И. Ф., Ларионов И. Ф. Устойчивость ребристых цилиндрических оболочек при наличии неосесимметричных вмятин // Прикл. механика. – 1984. – **20**, № 2. – С. 31 – 35.
17. Гавриленко Г. Д., Ситник А. С. Устойчивость ребристых оболочек с локальными вмятинами // Там же. – 1985. – **21**, № 11. – С. 128 – 130.
18. Гавриленко Г. Д., Пальчевский А. С., Якубовский Ю. Е. Определение критических нагрузок неидеальных моделей оболочек // Там же. – № 6. – С. 68 – 72.
19. Амиро И. Я., Поляков П. С., Паламарчук В. Г. Устойчивость цилиндрических оболочек несовершенной формы // Там же. – 1971. – **7**, № 8. – С. 9 – 15.
20. Гоцуляк Е. А., Прусов Д. Э., Аранчий Н. Е. Об устойчивости геометрически несовершенных оболочек общего вида // Там же. – 2000. – **36**, № 11. – С. 82 – 87.
21. Красовский В. Л. Поведение и устойчивость сжатых тонкостенных цилиндров с локальными несовершенствами формы: XV Всесоюз. конф. по теории оболочек и пластин. – Казань, 1990. – С. 303 – 308.
22. Красовский В. Л. О процессе выпучивания цилиндрических оболочек при однородном продольном сжатии // Вісн. академії. Наук. та інформ. бюл. – 1998. – № 7. – С. 25 – 31.
23. Красовский В. Л. Качество тонкостенных цилиндров и пусковые механизмы их выпучивания при продольном сжатии // Theoretical Foundations of Civil Engineering Polish-Ukrainian Transactions, Vol. II, Warsaw, June 2002. – P. 696 – 715.
24. Guz' A. N. Constructing the three-dimensional theory of stability of deformable bodies // Int. Appl. Mech. – 2001. – **37**, No. 1. – P. 1 – 37.
25. Гуляев В. И. Устойчивость деформируемой среды при больших перемещениях // Сопротивление материалов и теория сооружений. – 1971. – Вып. 14. – С. 44 – 48.
26. Гуляев В. И., Мельниченко Г. И. Закритические состояния прямоугольных цилиндрических панелей // Сопротивление материалов и теория сооружений. – 1975. – Вып. 27. – С. 10 – 18.
27. Гуляев В. И., Мельниченко Г. И. Формы закритического равновесия цилиндрических и конических оболочек эллиптического сечения под действием осевой нагрузки // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1976. – № 5. – С. 60 – 66.
28. Конох В. И., Красовский В. Л. О влиянии изолированной локальной вмятины на устойчивость гладких тонкостенных цилиндров при продольном сжатии // Сопротивление материалов и теория сооружений. – 1973. – Вып. 21. – С. 114 – 121.
29. Муштару Х. М., Галимов К. З. Нелинейная теория упругих оболочек. – Казань: Таткнигоиздат, 1957. – 431 с.

30. *Arbocz J. and Babcock C. D.* The effect of general imperfections on the buckling of cylindrical shells // *J. Appl. Mech. Ser. E.* – 1969. – **36**, No. 1. – P. 28 – 38.
31. *Donnell L. H.* A new theory for buckling of thin cylinders under axial compression and bending // *Trans. ASME.* – 1934. – **56**. – P. 795 – 806.
32. *Gavrylenko G. D., Matsner V. I., and Sytnik A. S.* Stability of ribbed cylindrical shells with a nonideal shape // *Int. Appl. Mech.* – 1999. – **35**, No. 12. – P. 1222 – 1228.
33. *Gavrylenko G. D., Matsner V. I., and Sytnik A. S.* Minimum critical loads of ribbed shells with given initial deflections // *Ibid.* – 2000. – **36**, No. 11. – P. 1482 – 1486.
34. *Gavrylenko G. D.* Stability and load-carrying capacity of incomplete shells // *Ibid.* – No. 7. – P. 866 – 887.

Поступила 12. 03. 2003