УДК 539.37

# Моделирование затухающей памяти формы траектории в теории простых материалов с упругопластическим поведением. Сообщение 1. Конечные деформации

**П. П. Лепихин**

Институт проблем прочности им. Г. С. Писаренко НАН Украины, Киев, Украина

*Предложена математическая теория строгого построения и специализации определяющих соотношений простых по Ноллу упрочняющихся упругопластических материалов с затухающей памятью формы траектории, в которых пластические деформации имеют место сразу после приложения нагрузки и монотонно увеличиваются при деформировании. Деформации и тип симметрии материала – произвольные. Для процессов деформирования, близких к пропорциональным и малоотличающихся от ненапряженной и недеформируемой конфигурации, построены физические уравнения материалов без памяти формы траектории, со слабой затухающей памятью и с затухающей памятью n-го порядка, на основе которых получены определяющие соотношения для изотропных материалов.*

***Ключевые слова***: рациональная механика континуума, определяющее соотношение, активное деформирование, простой упругопластический материал, произвольные деформации, анизотропия.

Экспериментальное изучение механических свойств материалов с упругопластическим поведением показало, что в процессе активного деформирования имеет место не зависящее от времени уменьшение влияния формы предшествующей траектории (процесса, истории) на реакцию материала. Сведения об экспериментальных исследованиях подобного эффекта приведены в [1], в [2–4] – результаты более поздних исследований.

Известны феноменологические теории пластичности, моделирующие подобное забывание (затухающая память формы траектории). К ним относятся теория упругопластических процессов Ильюшина с учетом так называемого следа запаздывания, эндохронная теория пластичности, теории течения и др. Эндохронная теория [4–7] и теории течения функционального типа [4, 8] учитывают явление затухания в течение всего процесса деформирования, теория упругопластических процессов [4, 9] – некоторый конечный интервал деформирования в конце процесса, теории течения дифференциального типа [4, 8] – подобное свойство материала на произвольно малом интервале прошлого. Классические варианты отмеченных выше теорий справедливы для бесконечно малых деформаций. Известны также обобщения ряда указанных моделей на конечные деформации [4, 10–13] и анизотропные материалы [4, 14].

В рамках рациональной механики континуума разработана общая теория простых по Ноллу упрочняющихся упругопластических материалов, моделирующая деформирование без учета эффекта забывания, и построен ряд частных моделей [15–23]. В теории простых упругопластических материалов описание не зависящего от времени забывания формы траектории не известно. Причем, как показал проведенный анализ, выбор постоянной истории (истории константы) [24], оказавшейся эффективной при формулировке затухающей памяти по времени в вязкоупругости, для упругопластических материалов, когда траектория деформирования до начала постоянной истории определяет не зависящую от времени реакцию материала, в общем случае неприменим.

Теоретическая и прикладная важность вопроса моделирования поведения упругопластических материалов с учетом эффекта забывания и, несмотря на большое количество работ, отсутствие общепринятых основ построения таких теорий приводят к необходимости дальнейшего развития исследований в этом направлении.

Настоящая статья посвящена разработке математической теории строгого построения и специализации определяющих соотношений простых по Ноллу упрочняющихся упругопластических материалов с забыванием формы траектории, в которых пластические деформации имеют место сразу после приложения нагрузки и монотонно увеличиваются при деформировании. Деформации и тип симметрии материала – произвольные. Для процессов деформирования, близких к пропорциональным и малоотличающихся от ненапряженной и недеформируемой конфигурации, построены физические уравнения материалов без памяти формы траектории, со слабой затухающей памятью и с затухающей памятью $n$-го порядка. На основе последних получены определяющие соотношения для изотропных материалов.

Предположим: все процессы деформирования начинаются в некоторый момент времени $t_0$ из ненапряженного и недеформированного начального состояния $\kappa_0$; при значениях момента времени $t < t_0$ материал находился в таком же начальном состоянии. Это позволяет исключить в рассматриваемых материалах, которые проявляют не зависящую от времени память о "прошлом", влияние предшествующего начальному состоянию деформирования (в большинстве случаев неизвестного) на напряжения в конце процесса деформирования. Обозначим множество таких процессов $E$. Согласно данным [17], $E$ состоит из всех историй, начальное значение градиента деформации $\mathbf{F}$ которых есть вращение.

Для некоторого принадлежащего $E$ процесса деформирования материальной точки $X$ введем действительную неотрицательную неубывающую функцию

$$\xi'(\tau) = \int_{-\infty}^{\tau} \left|\dot{\mathbf{E}}(\tau')\right| d\tau' = \int_{t_0}^{\tau} \left|\dot{\mathbf{E}}(\tau')\right| d\tau', \tag{1}$$

где $\left|\dot{\mathbf{E}}\right| = \sqrt{tr(\dot{\mathbf{E}}\dot{\mathbf{E}}^{\mathrm{T}})}$ – норма тензора $\dot{\mathbf{E}}$; $tr\mathbf{A}$ – след некоторого тензора $\mathbf{A}$; $\mathbf{E} = 0{,}5(\mathbf{C} - \mathbf{1})$ – тензор деформаций Грина второго типа; $\mathbf{1}$ – единичный тензор; $\mathbf{C} = \mathbf{F}^{\mathrm{T}}\mathbf{F}$ – правый тензор Коши–Грина; $\dot{\mathbf{E}}(\tau') = \left.\dfrac{\partial \mathbf{E}(\tau')}{\partial \tau'}\right|_{X=\mathrm{const}}$.

В этом случае $\xi' = 0$ при $\tau \le t_0$ и $\xi' = \xi$ при $\tau = t$ ($\xi$ – значение $\xi'$ в конце процесса деформирования). При записи (1) учитывалось, что $\dot{\mathbf{E}}(\tau') = \mathbf{E}(\tau') = \mathbf{0}$ для всех $t \le t_0$. (Здесь и далее верхний индекс "т" обозначает транспонированный тензор).

Согласно [18, 20, 25], определяющее соотношение, моделирующее реакцию произвольного простого материала с не зависящим от временной истории поведением, можно записать так:

$$\mathbf{T}(\xi)=\mathbf{G}(\mathbf{F}^{\xi}), \tag{2}$$

где $\mathbf{T}(\xi)$ – тензор напряжений Коши в конце процесса деформирования; $\mathbf{F}^{\xi}$ – история градиента деформации $\mathbf{F}$ вплоть до $\xi$; $\mathbf{F}^{\xi}=\mathbf{F}^{\xi}(\eta)\equiv\mathbf{F}(\xi-\eta)$; $\xi$ – фиксировано, $0\leq\eta\leq\xi$, $\eta=\xi-\xi'$; $\xi'$ – значение длины дуги траектории тензора $\mathbf{E}$ в "прошлом"; $\mathbf{G}$ – однозначно определенное отображение историй $\mathbf{F}^{\xi}$ на симметричные тензоры.

Историю $\mathbf{F}^{\xi}$ предполагаем непрерывной и кусочно-непрерывно дифференцируемой. В "момент" $\eta$ значение $\mathbf{F}^{\xi}(\eta)$ истории $\mathbf{F}^{\xi}$ интерпретируется как градиент деформации в фиксированной материальной точке по отношению к некоторой фиксированной отсчетной конфигурации $\kappa_0$. Приняв в качестве параметра деформирования аналогично [25] величину $\xi'/\xi$, из (2) получим в точности совпадающее с построенным в [17] определяющее соотношение.

Аналогично [24] можно показать, что приведенная (не зависящая от системы отсчета) форма уравнения (2) может, в частности, быть записана следующим образом:

$$\mathbf{T}(\xi)=\mathbf{R}(\xi)\mathbf{G}_1(\mathbf{C}^{\xi})\mathbf{R}^{\mathrm{T}}(\xi), \tag{3}$$

где $\mathbf{C}^{\xi}=(\mathbf{U}^{\xi})^2$ – история правого тензора Коши–Грина вплоть до $\xi$; $\mathbf{R}(\xi)$ – ортогональный тензор поворота в полярном разложении градиента деформации $\mathbf{F}(\xi)=\mathbf{R}(\xi)\mathbf{U}(\xi)$ в конце процесса деформирования; $\mathbf{U}(\xi)$ – правый тензор растяжения; $\mathbf{G}_1$ – отображение истории $\mathbf{C}^{\xi}$ на симметричные тензоры.

Отметим некоторые особенности поведения простого материала, частным случаем которого является простой материал с не зависящим от временной истории поведением.

Аналогично работе [24] рассмотрим принадлежащие $E$ истории $\mathbf{C}^{\xi}$ с чистым растяжением без вращения ($\mathbf{R}^{\xi}=\mathbf{1}$). Отнесем их к множеству $L$. Здесь $\mathbf{R}^{\xi}$ – история изменения тензора $\mathbf{R}$ вплоть до $\xi$. Для таких процессов из (3) получим

$$\mathbf{T}(\xi)=\mathbf{G}_1(\mathbf{C}^{\xi}). \tag{4}$$

В силу (3) $\mathbf{T}(\xi)$ известно для любых историй градиента деформации. Это свойство простого материала будем использовать в дальнейшем при построении теории упругопластических материалов с забыванием формы траектории, что позволит в принципе уменьшить число испытаний для экспериментального определения реакции $\mathbf{G}_1$ [24] и упростить эксперимент.

Введем определение [18]. Пропорциональным назовем такой процесс, для которого

$$\mathbf{C}(\xi'_p)=\mathbf{1}+\frac{\xi'_p}{\xi_p}(\mathbf{C}_p(\xi_p)-\mathbf{1});\qquad \mathbf{R}_p^{\xi_p}=\mathbf{1},\qquad 0\le\xi'_p\le\xi_p,\tag{5}$$

где $\xi_p$ – фиксировано; $\xi'_p$ – монотонно возрастающий параметр; $\mathbf{C}_p(\xi_p)$ – значение правого тензора Коши–Грина в конце процесса деформирования.

Как следует из (5), компоненты $\mathbf{C}_p(\xi'_p)-\mathbf{1}$ при деформировании возрастают пропорционально $\xi'_p/\xi_p$, главные оси тензора $\mathbf{C}_p(\xi'_p)$ неизменны и связаны с одними и теми же материальными волокнами тела. Причем материальные волокна остаются в процессе деформирования перпендикулярными друг к другу и неподвижными. (Здесь и далее нижний индекс $p$ соответствует объектам с пропорциональным деформированием.)

Совокупность процессов пропорционального деформирования обозначим $M$. Из второго уравнения (5) следует, что пропорциональное деформирование является частным случаем процессов чистого растяжения без вращения.

Обозначив в первом уравнении (5) $\xi'_p=\xi_p-\eta_p$, его можно преобразовать следующим образом:

$$\mathbf{C}_p^{\xi_p}=\mathbf{1}+\frac{\xi_p-\eta_p}{\xi_p}(\mathbf{C}_p(\xi_p)-\mathbf{1});\qquad \mathbf{R}_p^{\xi_p}=\mathbf{1},\qquad 0\le\eta_p\le\xi_p,\tag{6}$$

где

$$\xi_p=\frac{1}{2}\left|\mathbf{C}_p(\xi_p)-\mathbf{1}\right|.$$

Из (6) следует, что для процессов пропорционального деформирования $\mathbf{C}_p^{\xi_p}$ полностью определяется значением $\mathbf{C}_p(\xi_p)$. С учетом этого уравнение (2) может быть, в частности, записано так:

$$\mathbf{T}_p(\xi_p)=\mathbf{G}_1(\mathbf{C}_p^{\xi})=\mathbf{g}_{1_p}(\mathbf{C}_p(\xi_p)),\tag{7}$$

где $\mathbf{g}_{1p}(.)$ – тензорная функция.

Уравнение (7) получено без наложения каких-либо ограничений на свойства материала. Следовательно, оно справедливо для любых процессов пропорционального деформирования произвольных простых материалов с не зависящим от временной истории поведением. Процессы пропорционального деформирования подробно изучены ранее [18, 19].

В рамках подчиняющихся приведенным выше уравнениям материалов с не зависящим от времени поведением выделим класс упругопластических тел, которые кроме не зависящего от времени поведения обладают другими дополнительными (определяющие) свойствами [17, 25]: деформацию тем или иным способом можно разделить на упругую и пластическую составляющие; справедлив некоторый критерий текучести; выполняется какой-либо закон течения. В первом случае можно выделить как активные (изменяются упругие и пластические деформации), так и пассивные (изменяются только упругие деформации) процессы деформирования.

Следуя [26], предположим, что среди упругопластических материалов можно выделить такие, которые в произвольных процессах активного деформирования проявляют затухающую память формы траектории. При этом отмеченная затухающая память представляет собой свойство, которое можно выразить математически с использованием функции реакции простого материала с упругопластическим поведением.

Для определения отмеченной выше затухающей памяти вначале ограничимся активными процессами чистого растяжения без вращения и запишем переменную $\xi'$ так: $\xi' = K\xi'_p$, где $K = \xi/\xi_p$. Примем, что всегда $K < \infty$. Далее с помощью $\xi'$ параметризуем тректории изменения того или иного тензора деформации как для произвольного, так и для пропорционального процессов деформирования. В этом случае для любого процесса деформирования справедливо уравнение (4).

Рассмотрим два принадлежащих множеству $L$ процесса активного деформирования: произвольный с историей $\mathbf{C}^{\xi}$ и пропорционального деформирования $\mathbf{C}_p^{\xi}$ до одного и того же значения правого тензора Коши–Грина в конце процесса. Каждая история пропорционального активного деформирования рассматривается как история, соответствующая текущему значению $\mathbf{C}(\xi)$ в месте $\mathbf{X}$ в истории активного деформирования $\mathbf{C}^{\xi}$. При этом полагаем, что если $\mathbf{C}^{\xi}$ – история, принадлежащая области определения $D$ реакции $\mathbf{G}_1$ в (4), то для каждого $\eta$ из $[0, \xi]$ история пропорционального активного деформирования также принадлежит $D$. Основная идея затухающей памяти формы траектории заключается в следующем: если история активного деформирования $\mathbf{C}^{\xi}$ близка к истории пропорционального активного деформирования $\mathbf{C}_p^{\xi}$, то напряжения $\mathbf{G}_1(\mathbf{C}^{\xi})$ близки к напряжениям $\mathbf{G}_1(\mathbf{C}_p^{\xi})$. Понятие "близости" уточняется с помощью топологии, и в качестве необходимого условия для затухающей памяти формы траектории принимается аксиома непрерывности: реакция $\mathbf{G}_1$ непрерывна в каждой истории $\mathbf{C}_p^{\xi}$ из $D$.

Аналогично [24] рассмотрим тензорные функции, суммируемые относительно некоторой меры Лебега–Стилтьеса $\mu$ на действительной прямой $R$, и будем полагать, что

$$\|\mathbf{A}\| \equiv \sqrt{\int_R |\mathbf{A}(\eta)|^2 \, d\mu}\,, \tag{8}$$

где $\|\mathbf{A}\|$ – полунорма.

Согласно [24], полунорма $\|\ \|$ – это функция, определенная на векторном пространстве $\wp$ и принимающая неотрицательные действительные значения:

$$\|A\mathbf{x}\| = |A|\|\mathbf{x}\| \quad \forall \mathbf{x} \in \wp, \quad \forall A \in R;$$

$$\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \le \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\| \quad \forall \mathbf{x} \in \wp, \quad \forall \mathbf{y} \in \wp.$$

Из первого соотношения видно, что $\|\mathbf{0}\| = 0$, однако из него не следует, что $\mathbf{0}$ – единственный вектор, полунорма которого равна нулю. Полунорма называется нормой, если

$$\|\mathbf{x}\| = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0}.$$

Мера $\mu$ порождается действительной неубывающей функцией $\sigma$:

$$\begin{aligned} &\sigma(s-0) = \sigma(s); \\ &\mu\{[a,b)\} = \sigma(b) - \sigma(a) \end{aligned} \tag{9}$$

для любых действительных чисел $a$ и $b$.

Рассмотрим истории, которые представляют собой функции, заданные на $[0,\infty)$. Предположим, подобно тому как это сделано в [24], что все прошлое вносит только конечный вклад в полунормы ограниченных историй, т.е. будем называть меру $\mu$ забывающей, если

$$\begin{aligned} &\sigma(s) \equiv 0 \quad \text{при} \quad s \le 0; \\ &\lim_{s\to\infty} \sigma(s) = M < \infty. \end{aligned} \tag{10}$$

Отсюда следует, что перенесение любого интервала прямой бесконечно далеко в прошлое уменьшает его меру до нуля:

$$\lim_{c\to\infty} \mu\{[a+c,\, b+c)\} = 0. \tag{11}$$

Полунорму (8), вычисленную по мере, удовлетворяющей условию (10), назовем, как и в [24], соответствующим этой мере запоминанием истории $\mathbf{A}$. Совокупность историй $\mathbf{A}$, для которых полунорма $\|\mathbf{A}\|$ конечна, образуют функциональное пространство, являющееся подпространством пространства всех историй, измеримых относительно $\mu$. Это подпространство называется пространством историй с конечным запоминанием [24]. Оно включает в себя все ограниченные измеримые истории и, в частности, все истории пропорционального активного деформирования $\mathbf{C}_p^{\xi}$. Будем полагать, что раз и навсегда установлена определенная забывающая мера $\mu$, и иметь в виду, что результаты зависят от ее выбора. Полагаем, что область определения $D$ реакции $\mathbf{G}_1$ из (4) представляет собой связное подмножество пространства историй с конечным запоминанием относительно $\mu$. Подмножество считается связным [27] в том смысле, что всякие две точки из $D$ можно соединить некоторой траекторией $\mathbf{C}^{\xi}$, при этом $\mathbf{C}^{\xi}$ принадлежит $D$ для всякого $\xi$.

Введем следующее определение. Упругопластический материал при активном деформировании имеет слабо затухающую память, если он удовлетворяет аксиоме непрерывности с непрерывностью, определенной с помощью забывающей меры:

$$\mathbf{T}(\xi)=\mathbf{G}_1(\mathbf{C}^{\xi})=\mathbf{g}_1(\mathbf{C}(\xi))+\mathbf{o}(1) \quad \text{при} \quad \left\|\mathbf{C}^{\xi}-\mathbf{C}_p^{\xi}\right\|\to\mathbf{0}, \tag{12}$$

где $\mathbf{g}_1(\mathbf{C}(\xi))=\mathbf{g}_1(\mathbf{C}_p(\xi))=\mathbf{G}_1(\mathbf{C}_p^{\xi})$.

Таким образом, при условии, что запоминание разности историй $\mathbf{C}^{\xi}$ и $\mathbf{C}_p^{\xi}$ достаточно мало, напряжения представляют собой приблизительно напряжения при пропорциональном активном деформировании, соответствующие $\mathbf{C}(\xi)$.

Не обладающий памятью формы траектории упругопластический материал имеет остаточный член в (12), тождественно равный нулю. При этом забывающая мера должна быть такой, что $\left\|\mathbf{C}^{\xi}-\mathbf{C}_p^{\xi}\right\|=0$.

Для описания более высоких, чем (12), приближений затухающей памяти формы траектории примем запоминание в виде [24]

$$\left\|\mathbf{C}^{\xi}\right\|^2=A\left|\mathbf{C}(\xi)\right|^2+\int\limits_0^{\infty}k(\eta)\left|\mathbf{C}^{\xi}(\eta)\right|^2 d\eta, \tag{13}$$

где $A$ – положительная постоянная. Функция $k(.)$ называется забывателем, или функцией влияния.

Запоминание в форме (13) введено в качестве постулата в работе [28], где дана первая математическая трактовка общего понятия затухающей памяти, на которой базировались многие более поздние работы.

Далее будем считать справедливым принцип затухающей памяти формы траектории $n$-го порядка, заключающийся в предположении, что в истории пропорционального активного деформирования $\mathbf{C}_p^{\xi}$ реакция $\mathbf{G}_1$ $n$ раз дифференцируема по Фреше. Тогда

$$\mathbf{T}(\xi)=\mathbf{G}_1(\mathbf{C}^{\xi})=\mathbf{g}(\mathbf{C}(\xi))+\sum_{i=1}^{n}\mathbf{G}_i(\mathbf{C}^{\xi}-\mathbf{C}_p^{\xi})+\mathbf{o}\left(\left\|\mathbf{C}^{\xi}-\mathbf{C}_p^{\xi}\right\|^n\right), \tag{14}$$

где $\mathbf{G}_i$ – ограниченные однородные полиномиальные отображения степени $i$, зависящие от $\mathbf{C}_p^{\xi}$.

Согласно [24], если $\Im$ и $\Re$ – нормированные векторные пространства с нормами $\|\ \|$ и $|\ |$ соответственно, то отображение $\aleph_i$ из $\Im\times\Im\times\ldots\times\Im$ ($i$ сомножителей) в $\Re$ называется ограниченной $i$-линейной формой, когда оно линейно по каждому из своих аргументов и когда существует постоянная $K$ такая, что

$$\left|\aleph_i(\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\ldots,\mathbf{u}_i)\right|\le K\|\mathbf{u}_1\|\|\mathbf{u}_2\|\ldots\|\mathbf{u}_i\| \quad \forall\mathbf{u}_j\in\Re.$$

Такая форма симметрична, если ее значение не изменяется при любой перестановке $i$ аргументов. Отображение $\mathbf{G}_i$ из $\Im$ в $\Re$ называется ограниченным однородным полиномиальным отображением степени $i$, если существует ограниченная $i$-линейная форма $\aleph_i$ такая, что

$$\mathbf{G}_i(\mathbf{u}) = \aleph_i(\mathbf{u},\mathbf{u},\ldots,\mathbf{u},) \quad \forall \mathbf{u}_j \in \Im.$$

Поскольку произвольное, в том числе ограниченное однородное полиномиальное отображение степени $i$ для пропорционального деформирования есть функция от $\mathbf{C}(\xi)$, то $\mathbf{G}_i$ зависит от $\mathbf{C}(\xi)$.

Как следует из данных [24], разложение типа (14) заменяет данное отображение $\mathbf{G}_1$ суммой более простых отображений с ошибкой, которая стремится к нулю быстрее, чем $n$-я степень запоминания $\left\| \mathbf{C}^{\xi} - \mathbf{C}^{\xi}_{p} \right\|$ разности между истинной историей $\mathbf{C}^{\xi}$ и соответствующей историей пропорционального деформирования $\mathbf{C}^{\xi}_{p}$. Разложение Фреше (14) не дает никакой информации о значении $\mathbf{G}_1(\mathbf{C}^{\xi})$ для конкретных историй $\mathbf{C}^{\xi}$. Оно показывает, что если строить последовательность или семейство историй $\mathbf{C}^{\xi}$, запоминание разностей между которыми и историей пропорционального деформирования стремится к нулю, то можно определить некоторую сумму однородных полиномиальных отображений степени $n$, отличающуюся от $\mathbf{G}_1(\mathbf{C}^{\xi})$ на величину, стремящуюся к нулю быстрее, чем $n$-я степень этого запоминания.

Свойство затухающей памяти более высокого порядка не несет никакой информации о влиянии только деформирования или только материала. Оно позволяет построить более простые физические уравнения, которые будут пригодны асимптотически для выбранных классов материалов при определенных семействах историй деформаций.

Если принять, что материал имеет затухающую память 1-го порядка, то (14) аппроксимирует отклонение от напряжений при пропорциональном деформировании с помощью ограниченного линейного функционала. Совокупность всех историй деформаций с конечным запоминанием образует гильбертово пространство, и по теореме Фреше–Рисса [24] каждый ограниченный линейный функционал в нем допускает представление в виде скалярного произведения. Чтобы применить эту теорему в данном случае, предположим, что рассматривается затухающая память типа Колемана–Нолла (13), согласно которой получим

$$\mathbf{T}(\xi) = \mathbf{g}(\mathbf{C}(\xi)) + \int_0^{\xi} h(\eta)\underline{\mathbf{K}}(\mathbf{C}(\xi),\eta)[\mathbf{C}^{\xi}(\eta) - \mathbf{C}^{\xi}_{p}(\eta)]d\eta + \mathbf{o}(\left\| \mathbf{C}^{\xi} - \mathbf{C}^{\xi}_{p} \right\|), \qquad (15)$$

где ядро $\underline{\mathbf{K}}$ – тензор четвертого ранга,

$$\int_0^{\infty} \left| \underline{\mathbf{K}}(\mathbf{C}(\xi),\eta) \right|^2 d\eta < \infty. \qquad (16)$$

При записи (15), (16) учитывалось, что, как отмечалось выше, произвольное отображение истории пропорционального деформирования представляет собой функцию от значения правого тензора Коши–Грина в конце процесса.

Если пренебречь поправочным членом в (15), то получим соотношение, не зависящее от системы отсчета, которое можно использовать для задания специального воображаемого материала. Это специальное определяющее соотношение назовем, аналогично, как это сделали Колеман и Нолл в теории вязкоупругости [24], линейной теорией упругопластичности при конечных деформациях. Последняя от соответствующей теории вязкоупругости отличается тем, что она справедлива только для монотонных активных процессов деформирования упругопластических материалов, поведение которых не зависит от времени и в которых после начала деформирования имеют место пластические деформации и затухающая память формы траектории.

Построим иную форму представления определяющих соотношений простого упругопластического материала с затухающей памятью формы траектории.

Рассмотрим опять две начинающиеся из ненапряженной и недеформируемой конфигурации истории. Одну – произвольного деформирования, другую – отсчетную историю [24], т.е. историю постоянного нахождения в некоторой ненапряженной и недеформированной конфигурации.

Применив изложенную выше методику, для упругопластического материала со слабой затухающей памятью получим

$$\mathbf{T}(\xi)=\mathbf{G}_1(\mathbf{C}^{\xi})=\mathbf{g}(\mathbf{C}(0))+\mathbf{o}(1)=\mathbf{0}+\mathbf{o}(1) \quad \text{при} \quad \left\|\mathbf{C}^{\xi}-\mathbf{1}\right\|\to 0, \tag{17}$$

где $\mathbf{g}(\mathbf{C}(0))=\mathbf{G}_1(\mathbf{C}(0)^c)=\mathbf{G}_1(\mathbf{1}^c(\eta))$ – значение тензора напряжений в процессе $\mathbf{1}^c(\eta)\equiv\mathbf{1}$, в котором материал постоянно находится в отсчетной, т.е. ненапряженной и недеформированной конфигурации.

Из (17) следует, что в случае малого отклонения процесса деформирования от постоянного процесса нахождения в отсчетной конфигурации, когда напряжения в материале равны нулю, напряжения незначительно отличаются от нуля.

Для материала с затухающей памятью $n$-го порядка можно записать

$$\mathbf{T}(\xi)=\mathbf{G}_1(\mathbf{C}^{\xi})=\sum_{i=1}^{n}\overline{\mathbf{G}}_i(\mathbf{C}^{\xi}-\mathbf{1}^c(\eta))+\mathbf{o}(\left\|\mathbf{C}^{\xi}-\mathbf{1}^c(\eta)\right\|), \tag{18}$$

где $\overline{\mathbf{G}}_i$ – ограниченные однородные полиномиальные отображения степени $i$.

Для материала с затухающей памятью первого порядка

$$\mathbf{T}(\xi)=\int_0^{\xi} h(\eta)\underline{\mathbf{K}}_1(\mathbf{1},\eta)[\mathbf{C}^{\xi}(\eta)-\mathbf{1}^c(\eta)]d\eta+\mathbf{o}(\left\|\mathbf{C}^{\xi}-\mathbf{1}^c(\eta)\right\|), \tag{19}$$

где ядро $\underline{\mathbf{K}}_1$ – тензор четвертого ранга,

$$\int_0^\infty \left|\underline{\mathbf{K}}_1(\mathbf{1},\eta)\right|^2 d\eta < \infty. \tag{20}$$

Построенные определяющие соотношения справедливы для произвольных непрерывных и кусочно-непрерывно дифференцируемых активных процессов чистого растяжения без вращения из ненапряженной и недеформируемой конфигурации материалов с любым типом симметрии свойств при больших деформациях. С использованием (3), зная для конкретного процесса историю изменения тензора $\mathbf{R}$, можно выполнить моделирование произвольных (не обязательно чистого растяжения) процессов деформирования простых упругопластических материалов с забыванием формы траектории.

В отличие от затухающей по времени памяти в вязкоупругости, когда забывание формы траектории имеет место также после прекращения процесса деформирования, в моделируемых здесь упругопластических материалах затухание происходит только в активных процессах, а после прекращения активного деформирования отсутствует забывание формы траектории.

Для изотропного материала, следуя данным [29], соотношения (15) и (19) могут быть приведены соответственно к таким выражениям:

$$\mathbf{T}(\xi) = \mathbf{f}(\mathbf{B}(\xi)) + \int_0^\xi h(\eta)\underline{\mathbf{K}}(\mathbf{B}(\xi),\eta)[\mathbf{C}^\xi(\eta) - \mathbf{C}_p^\xi(\eta)]d\eta; \tag{21}$$

$$\mathbf{T}(\xi) = \int_0^\xi h(\eta)\underline{\mathbf{K}}_1(\mathbf{1},\eta)[\mathbf{C}^\xi(\eta) - \mathbf{1}^c(\eta)]d\eta. \tag{22}$$

При записи (21) и (22) опущены поправочные члены. Согласно [24], соотношения (21) и (22) справедливы для произвольных процессов деформирования, а не только для процессов чистого растяжения без вращения.

Тензорная функция $\mathbf{f}(\cdot)$ и линейные функционалы, заданные интегралами в уравнениях (21) и (22), изотропные в том смысле, что они подчиняются тождествам:

$$\mathbf{Q}\mathbf{f}(\mathbf{B}(\xi))\mathbf{Q}^{\mathrm{T}} = \mathbf{f}(\mathbf{Q}\mathbf{B}(\xi)\mathbf{Q}^{\mathrm{T}}); \tag{23}$$

$$\mathbf{Q}\int_0^\xi h(\eta)\underline{\mathbf{K}}(\mathbf{B}(\xi),\eta)[\mathbf{C}^\xi(\eta) - \mathbf{C}_p^\xi(\eta)]d\eta\mathbf{Q}^{\mathrm{T}} =$$

$$= \int_0^\xi h(\eta)\underline{\mathbf{K}}(\mathbf{Q}\mathbf{B}(\xi)\mathbf{Q}^{\mathrm{T}},\eta)\mathbf{Q}[\mathbf{C}^\xi(\eta) - \mathbf{C}_p^\xi(\eta)]\mathbf{Q}^{\mathrm{T}}d\eta; \tag{24}$$

$$\mathbf{Q}\int_0^{\xi} h(\eta)\underline{\mathbf{K}}_1(\mathbf{1},\eta)[\mathbf{C}^{\xi}(\eta)-\mathbf{1}^c(\eta)]d\eta\mathbf{Q}^{\mathrm{T}} =$$

$$=\int_0^{\xi} h(\eta)\underline{\mathbf{K}}_1(\mathbf{1},\eta)\mathbf{Q}[\mathbf{C}^{\xi}(\eta)-\mathbf{1}^c(\eta)]\mathbf{Q}^{\mathrm{T}}d\eta \tag{25}$$

для всех ортогональных тензоров $\mathbf{Q}$.

В соответствии с фундаментальной теоремой теории изотропных тензорных функций [24] $\mathbf{f}(\mathbf{B}(\xi))$ представляется следующим образом:

$$\mathbf{f}(\mathbf{B}(\xi)) = h_0\mathbf{1} + h_1\mathbf{B}(\xi) + h_2\mathbf{B}^2(\xi), \tag{26}$$

где $h_0$, $h_1$, $h_2$ – функции скалярных инвариантов;

$$tr\mathbf{B}(\xi),\ tr\mathbf{B}^2(\xi),\ tr\mathbf{B}^3(\xi). \tag{27}$$

Как следует из данных [29], $\underline{\mathbf{K}}$ и $\underline{\mathbf{K}}_1$ в соотношениях (24) и (25) могут быть представлены соответственно так:

$$\underline{\mathbf{K}}(\mathbf{B}(\xi),\eta)[\mathbf{C}^{\xi}(\eta)-\mathbf{C}^{\xi}_p(\eta)] = \mathbf{f}_1(\mathbf{B}(\xi),\eta)[\mathbf{C}^{\xi}(\eta)-\mathbf{C}^{\xi}_p(\eta)] +$$

$$+[\mathbf{C}^{\xi}(\eta)-\mathbf{C}^{\xi}_p(\eta)]\mathbf{f}_1(\mathbf{B}(\xi),\eta) + tr\{[\mathbf{C}^{\xi}(\eta)-\mathbf{C}^{\xi}_p(\eta)]\mathbf{f}_2(\mathbf{B}(\xi),\eta)\}\mathbf{1} +$$

$$+ tr\{[\mathbf{C}^{\xi}(\eta)-\mathbf{C}^{\xi}_p(\eta)]\mathbf{f}_3(\mathbf{B}(\xi),\eta)\}\mathbf{B}(\xi) + tr\{[\mathbf{C}^{\xi}(\eta)-\mathbf{C}^{\xi}_p(\eta)]\mathbf{f}_4(\mathbf{B}(\xi),\eta)\}\mathbf{B}^2(\xi); \tag{28}$$

$$\underline{\mathbf{K}}_1(1,\eta)[\mathbf{C}^{\xi}(\eta)-\mathbf{1}^c(\eta)] = \bar{\mathbf{f}}_1(\mathbf{1},\eta)[\mathbf{C}^{\xi}(\eta)-\mathbf{1}^c(\eta)] +$$

$$+[\mathbf{C}^{\xi}(\eta)-\mathbf{1}^c(\eta)]\bar{\mathbf{f}}_1(\mathbf{1},\eta) + tr\{[\mathbf{C}^{\xi}(\eta)-\mathbf{1}^c(\eta)]\bar{\mathbf{f}}_2(\mathbf{1},\eta)\}\mathbf{1} +$$

$$+ tr\{[\mathbf{C}^{\xi}(\eta)-\mathbf{1}^c(\eta)]\bar{\mathbf{f}}_3(\mathbf{1},\eta)\}\mathbf{B}(\xi) + tr\{[\mathbf{C}^{\xi}(\eta)-\mathbf{1}^c(\eta)]\bar{\mathbf{f}}_4(\mathbf{1},\eta)\}\mathbf{B}^2(\xi), \tag{29}$$

где для каждого $\eta$ тензорные функции $\mathbf{f}_i(\mathbf{B}(\xi),\eta)$ и $\bar{\mathbf{f}}_i(\mathbf{1},\eta)$ изотропны в смысле уравнения (23) и, следовательно, имеют представление в форме (26). Специальный случай $\underline{\mathbf{K}} \equiv \mathbf{0}$ в уравнении (21) соответствует теории упругопластичности изотропных материалов при пропорциональном деформировании и конечных деформациях.

Отметим, что, как следует из способа построения, зависимости (12), (14), (15), (21) в первую очередь могут использоваться для моделирования близких к пропорциональным процессов деформирования, а (17)–(19), (22) – для относительно малых деформаций (близки к отсчетной истории процессов).

**Резюме**

Запропоновано математичну теорію строгої побудови і спеціалізації визначальних співвідношень простих по Ноллу зміцнюваних пружно-пластичних матеріалів із затухаючою пам'яттю форми траєкторії, що мають пластичні деформації зразу після прикладення навантаження, котрі монотонно збільшуються в процесі деформування. Деформації і тип симетрії матеріалу – довільні. Для процесів деформування, що близькі до пропорційних і маловідмінні від ненапруженої і недеформованої конфігурації, побудовано фізичні рівняння матеріалів без пам'яті форми траєкторії, зі слабкою затухаючою пам'яттю та із затухаючою пам'яттю $n$-го порядку, на основі яких отримано визначальні співвідношення для ізотропних матеріалів.

1. *Ленский В. С.* Современные вопросы и задачи пластичности в теоретическом и прикладном аспектах // Упругость и неупругость. – 1978. – № 5. – С. 65 – 96.
2. *Ohashy Y.* Effects of complicated deformation history on inelastic deformation behavior of metals // Mem. Fac. Eng. – 1982. – **34**, No. 1. – P. 1 – 76.
3. *Васин Р. А.* Об экспериментальном исследовании функционалов пластичности в теории упругопластических процессов // Пластичность и разрушение твердых тел. – М., 1988. – С. 40 – 57.
4. *Васин Р. А.* Определяющие соотношения в теории пластичности // Итоги науки и техники. Механика деформируемого твердого тела. – 1990. – **21**. – С. 3 – 75.
5. *Valanis K. C.* A theory of viscoplasticity without a yield surface. Pt. 1. General theory // Arch. Mech. – 1971. – **23**, No. 4. – P. 517 – 533.
6. *Valanis K. C.* A theory of viscoplasticity without a yield surface. Pt. 2. Application to mechanical behavior of metals // Ibid. – P. 535 – 551.
7. *Valanis K. C.* Fundamental consequences of a new intrinsic time measure. Plasticity as a limit of the endochronic theory // Ibid. – 1980. – **32**, No. 2. – P. 171 – 191.
8. *Новожилов В. В.*, *Кадашевич Ю. И.* Микронапряжения в конструкционных материалах. – Л.: Машиностроение, 1990. – 223 с.
9. *Ильюшин А. А.* Пластичность. Основы общей математической теории. – М.: Изд-во АН СССР, 1963. – 271 с.
10. *Bertram A.* An alternative approach to finite plasticity based on material isomorphisms // Int. J. Plast. – 1999. – **15**, No. 3. – P. 353 – 374.
11. *Поздеев А. А.*, *Трусов П. В.*, *Няшин Ю. И.* Большие упругопластические деформации: теория, алгоритмы, приложения. – М.: Наука, 1986. – 231 с.
12. *Левитас В. И.* Большие упругопластические деформации материалов при высоком давлении. – Киев: Наук. думка, 1987. – 231 с.
13. *Левитас В. И.* Термомеханика фазовых переходов и неупругого деформирования микронеоднородных материалов. – Киев: Наук. думка, 1992. – 248 с.

14. *Ковальчук Б. И., Лебедев А. А., Уманский С. Э.* Механика неупругого деформирования материалов и элементов конструкций. – Киев: Наук. думка, 1987. – 280 с.
15. *Lucchesi M. and Podio-Guidugli P.* Materials with elastic range: A theory with a view toward applications. Pt. 1 // Arch. Rat. Mech. Anal. – 1988. – **102**. – P. 23 – 43.
16. *Lucchesi M. and Podio-Guidugli P.* Materials with elastic range: A theory with a view toward applications. Pt. 2 // Ibid. – 1990. – **110**. – P. 9 – 42.
17. *Lucchesi M., Owen D. R., and Podio-Guidugli P.* Materials with elastic range: A theory with a view toward applications. Pt. 3: Approximate constitutive relations // Ibid. – 1992. – **117**. – P. 53 – 96.
18. *Лепихин П. П.* Моделирование пропорционального деформирования простых по Ноллу континуумов с упругопластическим поведением. Сообщ. 1. Построение определяющих соотношений // Пробл. прочности. – 1998. – № 5. – С. 59 – 70.
19. *Лепихин П. П.* Моделирование пропорционального деформирования простых по Ноллу континуумов с упругопластическим поведением. Сообщ. 2. Анализ определяющих соотношений и сопоставление их с экспериментами // Там же. – № 6. – С. 43 – 55.
20. *Лепихин П. П.* Моделирование процессов монотонного деформирования простых материалов с упругопластическим поведением // Там же. – 1999. – № 6. – С. 35 – 41.
21. *Лепихин П. П.* Моделирование процессов пропорционального нагружения простых по Ноллу материалов с упругопластическим поведением. Сообщ. 1. Построение определяющих соотношений // Там же. – 2000. – № 3. – С. 56 – 68.
22. *Лепихин П. П.* Моделирование процессов активного деформирования простых по Ноллу упругопластических материалов с не зависящим от пути поведением // Там же. – 2001. – № 2. – С. 52 – 64.
23. *Лепихин П. П.* Моделирование процессов пропорционального нагружения простых по Ноллу материалов с упругопластическим поведением. Сообщ. 2. Сопоставление теории с экспериментами // Там же. – 2000. – № 4. – С. 45 – 53.
24. *Truesdell C.* A First Course in Rational Continuum Mechanics. – Baltimore: The Johns Hopkins University, 1972. – 372 p.
25. *Pipkin A. S. and Rivlin R. S.* Mechanics of rate-independent materials // Z. Ang. Math. Physik. – 1965. – **16**, No. 3. – P. 313 – 326.
26. *Лепихин П. П.* Моделирование затухающей памяти в теории простых по Ноллу материалов с упругопластическим поведением // Прогрессивная техника и технология машиностроения, приборостроения и сварочного производства: Тр. Междунар. науч.-техн. конф., посвященной 100-летию механико-машиностроительного и 50-летию сварочного факультетов (25–28 мая 1998 г.). – Киев: Нац. техн. ун-т Украины “КПИ”, 1998. – Т. III. – С. 105 – 109.

27. *Дей У. А*. Термодинамика простых сред с памятью. – М.: Мир, 1974. – 187 с.

28. *Coleman B. D. and Noll W*. An approximation theorem for functionals, with applications in continuum mechanics // Arch. Rat. Mech. Anal. – 1960. – **6**. – P. 355 – 370.

29. *Coleman B. D. and Noll W*. Foundations of linear viscoelasticity // Rev. Modern Phys. – 1961. – **33**. – P. 239 – 249.

Поступила 05. 02. 2004