

# НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИЙ РАЗДЕЛ

УДК 534.08.620.178.5

## Приближенное аналитическое определение вибродиагностических параметров нелинейности упругих тел, обусловленной наличием закрывающейся трещины. Сообщение 2. Определение диагностических параметров при основном и супергармоническом резонансе 2-го порядка

**В. В. Матвеев**

Институт проблем прочности им. Г. С. Писаренко НАН Украины, Киев, Украина

*С использованием полученных автором определяющих уравнений установлены аналитические выражения различных приближений для определения в области основного и супергармонического резонансов вибродиагностических параметров усталостного повреждения упругого тела типа закрывающейся трещины нормального отрыва. Путем сопоставления результатов расчета с данными численных решений оценивается достоверность аналитического решения.*

**Ключевые слова:** вынужденные колебания, нелинейные колебания, билинейная упругая характеристика, основной и супергармонический резонансы, трещина усталости, вибродиагностика усталостного повреждения.

**Введение.** Ранее [1] при анализе вынужденных колебаний упругого тела с локальной несплошностью материала типа периодически закрывающейся трещины нормального отрыва, описываемых нелинейным дифференциальным уравнением

$$\frac{d^2 u}{dt^2} + 2h \frac{du}{dt} + \omega^2 [1 - 0,5\alpha(1 + \text{sign } u)]u = q_0 \sin vt, \quad (1)$$

решение для области какого-либо супергармонического резонанса  $s$ -порядка ( $sv \approx \omega$ ,  $s = 2, 3, \dots$ ) представлялось в виде

$$u(t) = A_0 + A_1 \sin(vt + \gamma_1) + A_s \left[ \sin(svt + \gamma_s) + \sum_{n=2,4,\dots} \frac{2\alpha}{\pi(n^2 - 1)^2} \sin n(svt + \gamma_s) \right], \quad (2)$$

где  $A_0$  – постоянная составляющая, принимаемая равной

$$A_0 = \frac{\alpha}{\pi} A_1; \quad (3)$$

$\alpha$  – относительное изменение приведенной жесткости упругого тела на полциклах разного знака,

$$\alpha = \frac{K - K_T}{K}; \quad (4)$$

$K$  – жесткость неповрежденного тела, т.е. трещина закрыта ( $u < 0$ );  $K_T$  – жесткость при открытой трещине ( $u > 0$ ).

Полученные в [1] аналитические зависимости (25), (26), (29) для приближенного определения неизвестных параметров решения ( $A_s/A_1$ ,  $\gamma_1$  и  $\gamma_s$ ) в области наиболее важного в практическом отношении супергармонического резонанса 2-го порядка ( $s = 2$ ) принимают соответственно следующий вид:

$$\left\{ \left[ (2 - \alpha) - 8 \left( \frac{\nu}{\omega} \right)^2 \right] \cos(\gamma_2 - 2\gamma_1) - 8h \frac{\nu}{\omega^2} \sin(\gamma_2 - 2\gamma_1) \right\} \sin 2\beta -$$

$$- \frac{2\alpha}{\pi} \sum_{n=2,4,\dots} \frac{1}{(n^2 - 1)^2} \left\{ \left[ (2 - \alpha) - 8n^2 \left( \frac{\nu}{\omega} \right)^2 \right] \sin n(\gamma_2 - 2\gamma_1) + \right.$$

$$\left. + 8hn \frac{\nu}{\omega^2} \cos n(\gamma_2 - 2\gamma_1) \right\} \sin 2n\beta = 0; \quad (5)$$

$$\frac{A_2}{A_1} = -2 \left[ (2 - \alpha) \frac{A_0}{A_1} - \alpha \sin \beta \right] \left\{ \left[ (2 - \alpha) - 8 \left( \frac{\nu}{\omega} \right)^2 \right] \sin(\gamma_2 - 2\gamma_1) + \right.$$

$$\left. + 8h \frac{\nu}{\omega^2} \cos(\gamma_2 - 2\gamma_1) \right\} \cos 2\beta + \sum_{n=2,4,\dots} \frac{2\alpha}{\pi(n^2 - 1)^2} \times$$

$$\times \left\{ \left[ (2 - \alpha) - 8n^2 \left( \frac{\nu}{\omega} \right)^2 \right] \cos n(\gamma_2 - 2\gamma_1) - 8hn \frac{s}{\omega^2} \sin n(\gamma_2 - 2\gamma_1) \right\} \cos 2n\beta \Bigg\}^{-1}; \quad (6)$$

$$\sin \gamma_1 = - \frac{\frac{(1 + \sqrt{1 - \alpha})^2}{2(1 - \alpha)} h \nu \left\{ 1 + s^2 \left[ 1 + 4 \left( \frac{\alpha}{\pi} \right)^2 \sum_{n=2,4,\dots} \frac{n^2}{(n^2 - 1)^4} \right] \left( \frac{A_s}{A_1} \right)^2 \right\}}{\sqrt{\left[ 1 - \frac{(1 + \sqrt{1 - \alpha})^2}{4(1 - \alpha)} \left( \frac{\nu}{\omega} \right)^2 \right]^2 + \frac{(1 + \sqrt{1 - \alpha})^4}{4(1 - \alpha)^2} \left( \frac{h}{\omega} \right)^2 \left( \frac{\nu}{\omega} \right)^2}}}. \quad (7)$$

В уравнениях (5), (6) тригонометрические функции угла  $\beta$ , обозначенные чертой снизу, представляют их средние значения (24) [1] при изменении угла  $\beta$  от  $\beta_0$  до  $\pi/2$ , значение угла  $\beta_0$  соответствует условию  $\sin \beta_0 \approx A_2/A_1$ .

Относительная амплитуда основной гармоники определяется выражением (19) [1]:

$$\frac{A_1}{q_0} = - \frac{(1 + \sqrt{1 - \alpha})^2}{4(1 - \alpha)} \frac{1}{\omega^2 \sqrt{\left[1 - \frac{(1 + \sqrt{1 - \alpha})^2}{4(1 - \alpha)} \left(\frac{\nu}{\omega}\right)^2\right]^2 + \frac{(1 + \sqrt{1 - \alpha})^4}{4(1 - \alpha)^2} \left(\frac{h}{\omega}\right)^2 \left(\frac{\nu}{\omega}\right)^2}}}. \quad (8)$$

**Анализ решения в первом приближении для супергармонического резонанса.** Рассмотрим решение уравнения (1), пренебрегая гармониками выше второй, т.е. в выражении (2) полагаем  $n = 0$ . В этом случае из уравнения (5) находим явное выражение для определения сдвига фаз  $(\gamma_2 - \gamma_1)$ :

$$\operatorname{tg}(\gamma_2 - 2\gamma_1) = \frac{(2 - \alpha) - 8\left(\frac{\nu}{\omega}\right)^2}{8h \frac{\nu}{\omega^2}}. \quad (9)$$

Определив средние значения соответствующих тригонометрических функций угла  $\beta$

$$\begin{aligned} \underline{\sin \beta} &= \frac{2 \cos \beta_0}{\pi - 2\beta_0}; & \underline{\cos \beta} &= \frac{2(1 - \sin \beta_0)}{\pi - 2\beta_0}; \\ \underline{\sin 2\beta} &= \frac{1 + \cos 2\beta_0}{\pi - 2\beta_0}; & \underline{\cos 2\beta} &= -\frac{\sin 2\beta_0}{\pi - 2\beta_0}, \end{aligned} \quad (10)$$

после некоторых преобразований из (6) с учетом (3) получим уравнение для нахождения отношения  $A_2/A_1$  при условии  $\beta_0 \approx \arcsin A_2/A_1$ :

$$\frac{A_2}{A_1} = \frac{\alpha[(2 - \alpha)(\pi - 2\beta_0) - 2\pi \cos \beta_0]}{8\pi h \frac{\nu}{\omega^2} \sin 2\beta_0} \cos(\gamma_2 - 2\gamma_1). \quad (11)$$

Выражение (7) для определения сдвига фазы  $\gamma_1$  принимает вид

$$\sin \gamma_1 = - \frac{\frac{(1 + \sqrt{1 - \alpha})^2}{2(1 - \alpha)} \frac{h\nu}{\omega^2} \left[1 + 4\left(\frac{A_2}{A_1}\right)^2\right]}{\sqrt{\left[1 - \frac{(1 + \sqrt{1 - \alpha})^2}{4(1 - \alpha)} \left(\frac{\nu}{\omega}\right)^2\right]^2 + \frac{(1 + \sqrt{1 - \alpha})^4}{4(1 - \alpha)^2} \left(\frac{h}{\omega}\right)^2 \left(\frac{\nu}{\omega}\right)^2}}}. \quad (12)$$

Проанализируем результаты вычислений параметров  $A_2/A_1$  и  $\gamma_2, \gamma_1$  для исследуемого супергармонического резонанса соответственно по уравнению (11) и формулам (9), (12). На рис. 1 приведены полученные зависимости относительной амплитуды второй гармоники  $A_2/A_1$  от параметра  $\alpha$  для различных значений коэффициента  $h$  в случае точного резонанса, т.е. при  $\nu = 1/2\omega_0$ , где собственная частота упругого тела с закрывающейся трещиной (см. (5) [1])

$$\omega_0 = \frac{2\sqrt{1-\alpha}}{1+\sqrt{1-\alpha}} \omega. \quad (13)$$

(Здесь и далее в расчетах принимаем  $\omega = 1$ , и выбранный диапазон значений коэффициента  $h = 0,001 \dots 0,01$  определяет значения логарифмического декремента свободных колебаний системы ( $\delta = 2\pi h/\omega_0 \approx 2\pi h/\omega$ ) в диапазоне 0,63...6,3%.)

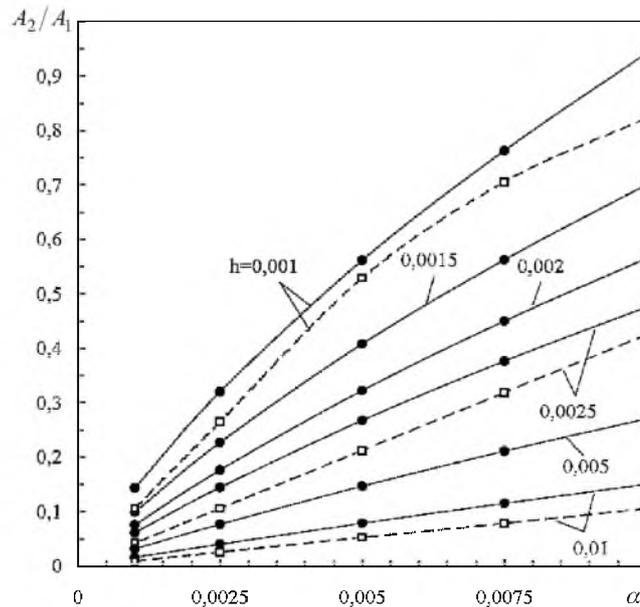


Рис. 1. Зависимости отношения амплитуд  $A_2/A_1$  от параметра  $\alpha$  при разных значениях коэффициента  $h$  для супергармонического резонанса ( $\nu = 0,5\omega_0$ ). (Сплошные линии – расчет по уравнению (11) при выборе значения  $\beta_0$  из условия  $\sin \beta_0 \approx A_2/A_1$ ; здесь и на рис. 2, 4, 6, 7, 10, 11: штриховые линии – данные численного решения.)

В качестве примера на рис. 2 показана амплитудно-частотная характеристика, на рис. 3 – фазочастотные характеристики в зоне резонанса при  $\alpha = 0,005$  и  $h = 0,001$ . Расчеты проводились при выборе значения угла  $\beta_0$  из условия  $\sin \beta_0 \approx A_2/A_1$ .

Полученные значения сдвига фаз  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$  свидетельствуют о возможности уменьшения угла  $\beta_0$  с гарантией достоверного разграничения значений жесткости системы. Зависимости отношения амплитуд  $A_2/A_1$  при супергармоническом резонансе ( $\nu = 0,5\omega_0$ ) от параметра  $\alpha$  при разных значениях  $h$ , определенные из условий  $\sin \beta_0 \approx A_2/A_1$  и  $\sin \beta_0 \approx 0,5 A_2/A_1$ ,

представлены на рис. 4 (кривые 1). Как видно, с уменьшением значения угла  $\beta_0$  увеличивается определяемое отношение  $A_2/A_1$ . Более наглядно это иллюстрирует зависимость изменения отношения  $A_2/A_1$  от угла  $\beta_0$  в диапазоне  $0,3... \pi/2$  (рис. 5).

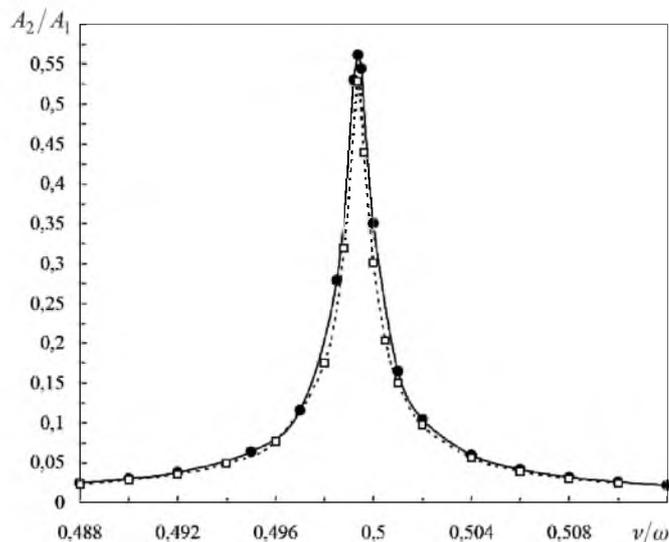


Рис. 2. Амплитудно-частотные характеристики в области супергармонического резонанса. (Сплошная линия – расчет по уравнению (11) при выборе значения  $\beta_0$  из условия  $\sin \beta_0 \approx A_2/A_1$ ; штриховая линия – данные численного решения при  $\alpha = 0,005$  и  $h = 0,001$ .)

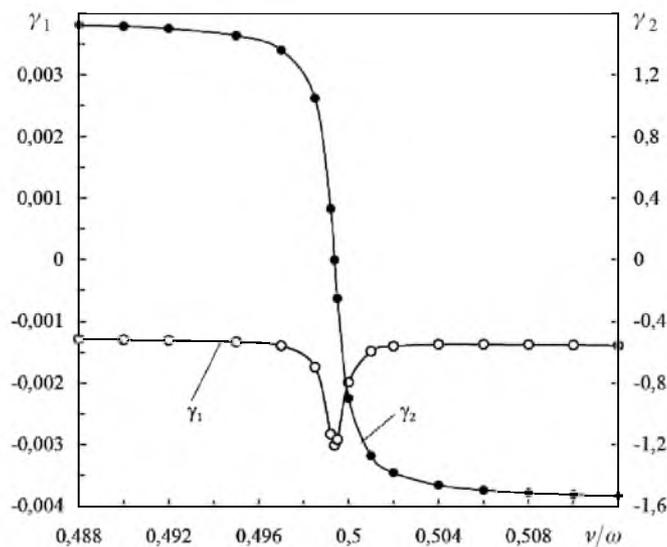


Рис. 3. Расчетные фазочастотные характеристики исследуемой системы в области супергармонического резонанса при  $\alpha = 0,005$  и  $h = 0,001$ .

Для уменьшения зависимости вычисляемого значения  $A_2/A_1$  при резонансе от выбора величины угла  $\beta_0$  представим выражение (11) через интегральные значения числителя и знаменателя, считая  $\beta_0$  переменной интегрирования, изменяющейся от  $\beta_0$  до  $\pi/2$ :

$$\frac{A_2}{A_1} = \frac{\alpha \left[ (2 - \alpha) \left( \frac{\pi}{2} - \beta_0 \right)^2 - 2\pi(1 - \sin \beta_0) \right]}{4\pi h \frac{\nu}{\omega^2} (1 + \cos 2\beta_0)} \cos(\gamma_2 - 2\gamma_1). \quad (14)$$

Полученные с использованием уравнения (14) зависимости резонансного отношения  $A_2/A_1$  от параметра  $\beta_0$  показаны на рис. 4. Как видно, уравнение (14) дает меньшее различие значений  $A_2/A_1$  при разной величине  $\beta_0$  и несколько меньшие значения  $A_2/A_1$ , чем уравнение (11).

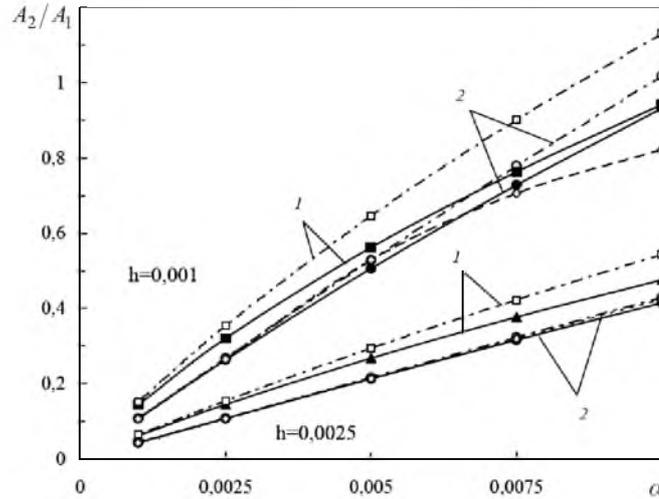


Рис. 4. Зависимости отношения амплитуд  $A_2/A_1$  от параметра  $\alpha$  при  $h=0,001$  и  $0,0025$ , рассчитанные по уравнениям (11) – 1 и (14) – 2 при выборе значения  $\beta_0$  из условий  $\sin \beta_0 \approx A_2/A_1$  (сплошные линии) и  $\sin \beta_0 \approx 0,5 A_2/A_1$  (штрихпунктирные линии) для случая супергармонического резонанса ( $\nu = 0,5\omega_0$ ).

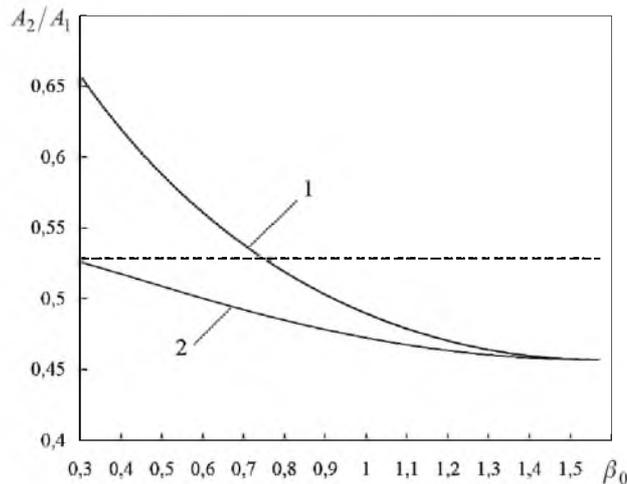


Рис. 5. Зависимости отношения амплитуд  $A_2/A_1$  от величины угла  $\beta_0$ , рассчитанные по формулам (11) – 1 и (14) – 2 для случая супергармонического резонанса ( $\nu = 0,5\omega_0$ ) при  $\alpha = 0,005$  и  $h = 0,001$ . (Штриховая линия – значение  $A_2/A_1$ , полученное по данным численного решения.)

Более отчетливо это прослеживается из сравнения представленных на рис. 5 зависимостей отношения амплитуд  $A_2/A_1$  от величины угла  $\beta_0$ , определенных по уравнениям (11) и (14), как выражений для  $A_2/A_1$ , заданных в явном виде при данном значении  $\beta_0$ .

Выражение (12) для  $\sin \gamma_1$  остается без изменения.

**Анализ решения во втором приближении для супергармонического резонанса.** В качестве второго приближения рассмотрим возможность учета высших гармоник, определяемых значениями  $n = 2$  и  $4$ , т.е. при  $s = 2$  – это (см. (2)) четвертая и восьмая гармоники. В этом случае усложняется нахождение сдвига фаз  $(\gamma_2 - 2\gamma_1)$ , поскольку из уравнения (5) не удастся получить явное выражение для  $\text{tg}(\gamma_2 - 2\gamma_1)$ . Так, используя выражения для тригонометрических функций кратных углов

$$\begin{cases} \sin 2(\gamma_2 - 2\gamma_1) = 2 \cos(\gamma_2 - 2\gamma_1) \text{tg}(\gamma_2 - 2\gamma_1); \\ \cos 2(\gamma_2 - 2\gamma_1) = \cos^2(\gamma_2 - 2\gamma_1) [1 - \text{tg}^2(\gamma_2 - 2\gamma_1)]; \\ \sin 4(\gamma_2 - 2\gamma_1) = 4 \cos^4(\gamma_2 - 2\gamma_1) [\text{tg}(\gamma_2 - 2\gamma_1) - \text{tg}^3(\gamma_2 - 2\gamma_1)]; \\ \cos 4(\gamma_2 - 2\gamma_1) = 1 - 8 \cos^4(\gamma_2 - 2\gamma_1) \text{tg}^2(\gamma_2 - 2\gamma_1) \end{cases} \quad (15)$$

и учитывая наряду с выражениями (10) средние значения тригонометрических функций угла  $\beta$

$$\underline{\sin 4\beta} = -\frac{1 - \cos 4\beta_0}{2(\pi - 2\beta_0)}; \quad \underline{\sin 8\beta} = -\frac{1 - \cos 8\beta_0}{4(\pi - 2\beta_0)}, \quad (16)$$

уравнение (5) преобразуется следующим образом:

$$\begin{aligned} & \frac{2\alpha}{225\pi} \left[ (2 - \alpha) - 128 \left( \frac{\nu}{\omega} \right)^2 \right] \cos^3(\gamma_2 - 2\gamma_1) (1 - \cos 8\beta_0) \text{tg}^3(\gamma_2 - 2\gamma_1) + \\ & + \frac{16\alpha}{9\pi} h \frac{\nu}{\omega^2} \cos(\gamma_2 - 2\gamma_1) \left[ (1 - \cos 4\beta_0) + \frac{8}{25} \cos^2(\gamma_2 - 2\gamma_1) (1 - \cos 8\beta_0) \right] \times \\ & \times \text{tg}^2(\gamma_2 - 2\gamma_1) + \left\{ 8h \frac{\nu}{\omega^2} (1 + \cos 2\beta_0) - \frac{2\alpha}{9\pi} \left[ (2 - \alpha) - 32 \left( \frac{\nu}{\omega} \right)^2 \right] \cos(\gamma_2 - 2\gamma_1) \times \right. \\ & \left. \times (1 - \cos 4\beta_0) - \frac{2\alpha}{225\pi} \left[ (2 - \alpha) - 128 \left( \frac{\nu}{\omega} \right)^2 \right] \cos^3(\gamma_2 - 2\gamma_1) (1 - \cos 8\beta_0) \right\} \times \\ & \times \text{tg}(\gamma_2 - 2\gamma_1) - \left\{ \left[ (2 - \alpha) - 8 \left( \frac{\nu}{\omega} \right)^2 \right] (1 + \cos 2\beta_0) + \right. \\ & \left. + \frac{16\alpha}{9\pi} h \frac{\nu}{\omega^2} \left[ \cos(\gamma_2 - 2\gamma_1) (1 - \cos 4\beta_0) + \frac{1 - \cos 8\beta_0}{25 \cos(\gamma_2 - 2\gamma_1)} \right] \right\} = 0. \quad (17) \end{aligned}$$

Учитывая выражения (10), а также средние значения

$$\overline{\cos 4\beta} = -\frac{\sin 4\beta_0}{2(\pi - 2\beta_0)}; \quad \overline{\cos 8\beta} = -\frac{\sin 8\beta_0}{4(\pi - 2\beta_0)},$$

уравнение для определения основного диагностического параметра  $A_2/A_1$  получим из (6) при  $A_0/A_1 = \alpha/\pi$ :

$$\begin{aligned} \frac{A_2}{A_1} = \frac{\alpha}{\pi} [(2 - \alpha)(\pi - 2\beta_0) - 2\pi \cos \beta_0] & \left\langle \left[ \left[ (2 - \alpha) - 8 \left( \frac{\nu}{\omega} \right)^2 \right] \sin(\gamma_2 - 2\gamma_1) + \right. \right. \\ & + 8h \frac{\nu}{\omega^2} \cos(\gamma_2 - 2\gamma_1) \left. \right\} \sin 2\beta_0 + \frac{\alpha}{9\pi} \left[ \left[ (2 - \alpha) - 32 \left( \frac{\nu}{\omega} \right)^2 \right] \cos 2(\gamma_2 - 2\gamma_1) - \right. \\ & - 16h \frac{\nu}{\omega^2} \sin 2(\gamma_2 - 2\gamma_1) \left. \right\} \sin 4\beta_0 + \frac{\alpha}{450\pi} \left[ \left[ (2 - \alpha) - 128 \left( \frac{\nu}{\omega} \right)^2 \right] \times \right. \\ & \left. \left. \times \cos 4(\gamma_2 - 2\gamma_1) - 32h \frac{\nu}{\omega^2} \sin 4(\gamma_2 - 2\gamma_1) \right\} \sin 8\beta_0 \right]^{-1}. \end{aligned} \quad (18)$$

В отличие от решения задачи в первом приближении, когда значение  $\text{tg}(\gamma_2 - 2\gamma_1)$ , вычисляемое по формуле (9), не зависело от выбора угла  $\beta_0$ , нахождение  $\text{tg}(\gamma_2 - 2\gamma_1)$  из уравнения (17) связано с необходимостью предварительного выбора величины  $\beta_0$  и значения  $\cos(\gamma_2 - 2\gamma_1)$ , входящего в уравнение в различной степени. Однако, как показывает решение задачи в первом приближении, сдвиг фаз  $(\gamma_2 - 2\gamma_1)$  при супергармоническом резонансе весьма мал и составляет менее одной сотой радиана, что позволяет в начале расчета принять величину  $\cos(\gamma_2 - 2\gamma_1)$  равной единице, а затем исходя из полученного значения  $\text{tg}(\gamma_2 - 2\gamma_1)$  определить ее и, решив уравнение (17), уточнить значение  $\text{tg}(\gamma_2 - 2\gamma_1)$ .

Выбор значения угла  $\beta_0$  представляет определенные трудности, поскольку от него зависят как сдвиг фаз  $(\gamma_2 - 2\gamma_1)$ , так и отношение  $A_2/A_1$ . Поэтому здесь также необходимо использовать метод последовательных приближений, рассматривая в комплексе уравнения (17) и (18). Так, приняв угол  $\beta_0$  равным его значению, полученному при решении задачи в первом приближении, находим первое значение  $\text{tg}(\gamma_2 - 2\gamma_1)$ , используя уравнение (17). По этому значению вычисляем  $\cos(\gamma_2 - 2\gamma_1)$  и, решая опять уравнение (17), определяем уточненное значение  $\text{tg}(\gamma_2 - 2\gamma_1)$ , по формуле (18) – отношение  $A_2/A_1$ , а из условий  $\sin \beta_0 \approx A_2/A_1$  и  $\sin \beta_0 \approx 0,5 A_2/A_1$  – угол  $\beta_0$ , и повторяем вычисления  $\text{tg}(\gamma_2 - 2\gamma_1)$  и  $A_2/A_1$ .

В качестве примера в табл. 1 для случая  $\alpha = 0,005$ ,  $h = 0,001$  и  $\nu = 0,5\omega_0 = 0,499373$  приведены значения  $(\gamma_2 - 2\gamma_1)$ , найденные из уравнения (17) второго приближения и по формуле (9) первого приближения, и отношение  $A_2/A_1$ , вычисленное по формуле (18) второго приближения и формулам (11), (14) первого приближения.

Т а б л и ц а 1

Значения сдвига фаз  $(\gamma_2 - 2\gamma_1)$ , найденные из решения уравнений (17), (19) и формулы (9), и отношения амплитуд  $A_2/A_1$ , вычисленные по формулам (11), (14) и (18), (20)

Условие определения угла $\beta_0$	$(\gamma_2 - 2\gamma_1)$ , рад. по			$ A_2/A_1 $ по			
	(9)	(17)	(19)	(11)	(14)	(18)	(20)
$\Gamma_1$	0,003218	0,002045	0,001799	0,5613	0,50600	0,6132	0,4569
$\Gamma_2$	0,003218	0,002292	0,001970	0,6459	0,52834	0,8747	0,5091
$\Delta$	0	+12,0	+9,5	+15,0	+4,4	+42,6	+11,4

Примечание.  $\Gamma_1$ :  $\sin \beta_0 \approx A_2/A_1$ ;  $\Gamma_2$ :  $\sin \beta_0 \approx 0,5 A_2/A_1$ ;  $\Delta = \frac{\Gamma_2 - \Gamma_1}{\Gamma_1}$ , %.

Как видно, по сравнению с первым приближением величина сдвига фаз  $(\gamma_2 - 2\gamma_1)$  уменьшилась, а отношение  $A_2/A_1$  возросло и увеличилось влияние выбора угла  $\beta_0$ .

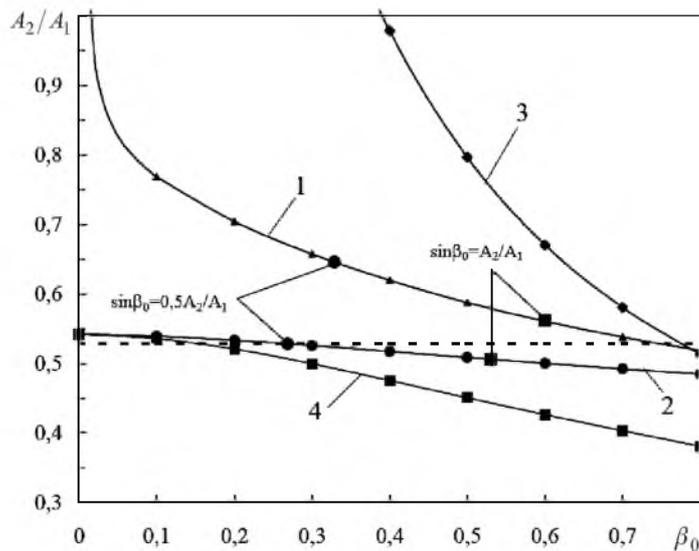


Рис. 6. Зависимости отношения амплитуд  $A_2/A_1$  от угла  $\beta_0$ , рассчитанные по формулам (11) – 1, (14) – 2, (18) – 3 и (20) – 4 для случая супергармонического резонанса ( $\nu = 0,5\omega_0$ ) при  $\alpha = 0,005$  и  $h = 0,001$ .

Для оценки влияния угла  $\beta_0$  на определяемое значение отношения  $A_2/A_1$  на рис. 6 приведены зависимости  $A_2/A_1$  от  $\beta_0$ , рассчитанные по формуле (18) при определении сдвига фаз  $(\gamma_2 - 2\gamma_1)$  из уравнения (17) и по формулам (11), (14) первого приближения. На зависимостях, которые рассчитаны по формулам (11) и (14), отмечены характерные точки, соответствующие значениям  $\beta_0$ , определяемым из условий  $\sin \beta_0 \approx A_2/A_1$  и  $\sin \beta_0 \approx 0,5 A_2/A_1$ . Видно, что учет высших гармоник обусловил существенную зависимость определяемого значения отношения  $A_2/A_1$  от угла  $\beta_0$ . Для уменьшения зависимости получаемого результата от выбора угла  $\beta_0$  поступим аналогично рассмотренному интегральному усреднению при определении уравнения (14), т.е. полагая угол  $\beta_0$  переменной интегрирования, про-

интегрируем все члены уравнения (17), а также числитель и знаменатель выражения (18) в пределах изменения этого угла от  $\beta_0$  до  $\pi/2$ . В результате получим уравнения соответственно для определения  $\text{tg}(\gamma_2 - 2\gamma_1)$ :

$$\begin{aligned}
 & \frac{2\alpha}{225\pi} \left[ (2 - \alpha) - 128 \left( \frac{\nu}{\omega} \right)^2 \right] \cos^3(\gamma_2 - 2\gamma_1) \left[ 1 + \frac{\sin 8\beta_0}{4(\pi - 2\beta_0)} \right] \text{tg}^3(\gamma_2 - 2\gamma_1) + \\
 & + \frac{16\alpha}{9\pi} h \frac{\nu}{\omega^2} \cos(\gamma_2 - 2\gamma_1) \left[ \left( 1 + \frac{\sin 4\beta_0}{2(\pi - 2\beta_0)} \right) + \frac{8}{25} \cos^2(\gamma_2 - 2\gamma_1) \times \right. \\
 & \times \left. \left( 1 + \frac{\sin 8\beta_0}{4(\pi - 2\beta_0)} \right) \right] \text{tg}^2(\gamma_2 - 2\gamma_1) + \left\{ 8h \frac{\nu}{\omega^2} \left[ 1 - \frac{\sin 2\beta_0}{\pi - 2\beta_0} \right] - \right. \\
 & - \frac{2\alpha}{9\pi} \cos(\gamma_2 - 2\gamma_1) \left[ \left[ (2 - \alpha) - 32 \left( \frac{\nu}{\omega} \right)^2 \right] \left[ 1 + \frac{\sin 4\beta_0}{2(\pi - 2\beta_0)} \right] + \right. \\
 & + \frac{1}{25} \left[ (2 - \alpha) - 128 \left( \frac{\nu}{\omega} \right)^2 \right] \cos^2(\gamma_2 - 2\gamma_1) \left[ 1 + \frac{\sin 8\beta_0}{4(\pi - 2\beta_0)} \right] \left. \right\} \text{tg}(\gamma_2 - 2\gamma_1) - \\
 & - \left[ \left[ (2 - \alpha) - 8 \left( \frac{\nu}{\omega} \right)^2 \right] \left[ 1 - \frac{\sin 2\beta_0}{\pi - 2\beta_0} \right] + \frac{16\alpha}{9\pi} h \nu \left[ \cos(\gamma_2 - 2\gamma_1) \left( 1 + \frac{\sin 4\beta_0}{2(\pi - 2\beta_0)} \right) + \right. \right. \\
 & \left. \left. + \frac{1}{25 \cos(\gamma_2 - 2\gamma_1)} \left( 1 + \frac{\sin 8\beta_0}{4(\pi - 2\beta_0)} \right) \right] \right] \quad (19)
 \end{aligned}$$

и диагностического параметра  $A_2/A_1$ :

$$\begin{aligned}
 & \frac{A_2}{A_1} = \frac{2\alpha}{\pi} \left[ (2 - \alpha) \left( \frac{\pi}{2} - \beta_0 \right)^2 - 2\pi(1 - \sin \beta_0) \right] \times \\
 & \times \left\{ \left[ \left[ (2 - \alpha) - 8 \left( \frac{\nu}{\omega} \right)^2 \right] \sin(\gamma_2 - 2\gamma_1) + 8h \frac{\nu}{\omega^2} \cos(\gamma_2 - 2\gamma_1) \right] (1 + \cos 2\beta_0) - \right. \\
 & - \frac{\alpha}{18\pi} \left[ \left[ (2 - \alpha) - 32 \left( \frac{\nu}{\omega} \right)^2 \right] \cos 2(\gamma_2 - 2\gamma_1) - 16h \frac{\nu}{\omega^2} \sin 2(\gamma_2 - 2\gamma_1) \right] \times \\
 & \times (1 - \cos 4\beta_0) - \frac{\alpha}{1800\pi} \left[ \left[ (2 - \alpha) - 128 \left( \frac{\nu}{\omega} \right)^2 \right] \cos 4(\gamma_2 - 2\gamma_1) - \right.
 \end{aligned}$$

$$-32h \frac{\nu}{\omega^2} \sin 4(\gamma_2 - 2\gamma_1) \left. \right\} (1 - \cos 8\beta_0) \left. \right\}^{-1} \quad (20)$$

Значения  $(\gamma_2 - 2\gamma_1)$  и  $A_2/A_1$  при определении  $\beta_0$  из условий  $\sin \beta_0 \approx A_2/A_1$  и  $\sin \beta_0 \approx 0,5A_2/A_1$  приведены в табл. 1. Как видно, влияние выбора угла  $\beta_0$  на определяемые значения  $(\gamma_2 - 2\gamma_1)$  и  $A_2/A_1$  уменьшилось. Это особенно наглядно следует из представленной на рис. 6 зависимости определяемого отношения амплитуд  $A_2/A_1$  от величины  $\beta_0$ . Эта зависимость также показывает, что учет высших гармоник при использовании уравнения (20) определяет несколько меньшие резонансные значения  $A_2/A_1$ . Однако при  $\beta_0 = 0$  значения  $A_2/A_1$ , вычисляемые по формуле (14) первого приближения и по (20), практически совпадают. Это объясняется тем, что при  $\beta_0 = 0$  выражение (20) аналогично выражению (14) первого приближения, если учесть соотношение (9).

Выражение для  $\sin \gamma_1$  с учетом высших гармоник имеет вид

$$\sin \gamma_1 = - \frac{\frac{(1 + \sqrt{1 - \alpha})^2}{2(1 - \alpha)} \frac{h\nu}{\omega^2} \left\{ 1 + 4 \left[ 1 + 1,779 \left( \frac{\alpha}{\pi} \right)^2 \right] \left( \frac{A_2}{A_1} \right)^2 \right\}}{\sqrt{\left[ 1 - \frac{(1 + \sqrt{1 - \alpha})^2}{4(1 - \alpha)} \left( \frac{\nu}{\omega} \right)^2 \right]^2 + \frac{(1 + \sqrt{1 - \alpha})^4}{4(1 - \alpha)^2} \left( \frac{h}{\omega} \right)^2 \left( \frac{\nu}{\omega} \right)^2}} \quad (21)$$

**Решение для области основного резонанса.** Учитывая результаты исследования резонансных колебаний рассматриваемой системы с использованием асимптотического метода, определяющие наличие в спектре колебаний (см. (17) и (18) [1]) только четных высших гармоник с преобладающим значением амплитуды второй гармоники  $A_2$  ( $A_4/A_2 = 0,04$ ;  $A_6/A_2 = 0,00735$  и т.д.), можно в первом приближении отыскивать решение уравнения (1) также для случая основного резонанса в виде (2) при  $s = 2$  и  $n = 0$ . При этом для определения основного диагностического параметра  $A_2/A_1$  в области основного резонанса можно использовать выражения (9), (11), (12), (14), (15) при частоте внешнего возбуждения  $\nu \approx \omega_0$ , где  $\omega_0$  определяется выражением (13).

На рис. 7 приведены зависимости диагностического параметра  $A_2/A_1$  при  $\nu \approx \omega_0$  от параметра нелинейности системы  $\alpha$  при  $h = 0,001 \dots 0,01$ , рассчитанные по уравнениям (11) и (14) при условии  $\sin \beta_0 \approx A_2/A_1$  и по формуле (18) [1] при  $n = 2$  ( $A_2/A_1 \approx 2\alpha/9\pi$ ). Видно, что результаты расчета  $A_2/A_1$  по уравнению (14) для значений  $\alpha < 0,025$  практически соответствуют результатам, полученным с помощью асимптотического метода [1], т.е. значению  $2\alpha/9\pi$ , и не зависят от коэффициента  $h$  в рассматриваемом диапазоне его изменения. Например, при  $\alpha = 0,005$  значение отношения  $A_2/A_1$  выше  $2\alpha/9\pi$  на 2,35%, при  $\alpha = 0,025$  – на 7,1%, при  $\alpha = 0,05$  – на 13,1% и при  $\alpha = 0,1$  – на 26%, в то время как определяемое из уравнения (11) значение указанного отношения выше в 4,9...4,99 раза. Таким образом, для основного резонанса следует использовать уравнение (14). При этом отметим, что ввиду малости амплитуды высшей гармоники ( $A_2/A_1 < 0,01$ ) в

практических расчетах в уравнении (14) условие  $\sin \beta_0 \approx A_2/A_1$  фактически эквивалентно принятию значения угла  $\beta_0$  равным нулю. Кроме того, наблюдаемое условие  $A_2 \ll A_1$  обеспечивает правомерность использования исходных выражений (9), (14) при значительно больших значениях параметра  $\alpha$ , чем при супергармоническом резонансе, ограничиваемых условием  $A_2 < A_1$ .

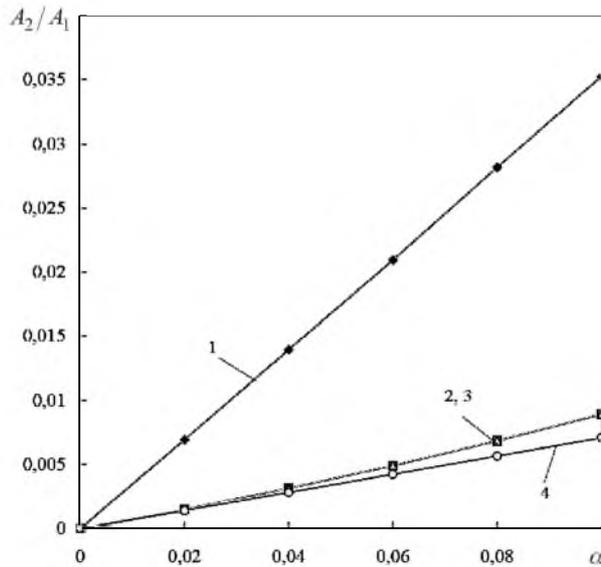


Рис. 7. Зависимости отношения амплитуд  $A_2/A_1$  от параметра  $\alpha$  для основного резонанса ( $\nu = \omega_0$ ), рассчитанные по уравнениям (11) – 1 и (14) – 2 при условии  $\sin \beta_0 \approx A_2/A_1$ , по (22) – 3 и по формуле  $A_2/A_1 = 2\alpha/9\pi - 4$  при  $n = 2$  (штриховая линия, соответствующая численному решению, совпадает с кривой 4).

Полагая значение угла  $\beta_0$  равным нулю, получаем простую формулу для определения отношения амплитуд  $A_2/A_1$  как при основном, так и супергармоническом резонансе 2-го порядка:

$$\frac{A_2}{A_1} \approx \frac{\alpha \left[ (2 - \alpha) \frac{\pi}{4} - 2 \right]}{8h \frac{\nu}{\omega^2}} \cos(\gamma_2 - 2\gamma_1). \quad (22)$$

Угол сдвига фазы  $\gamma_1$  определяется формулой (21), для значений  $\alpha < 0,1$  с достаточной точностью можно использовать также формулу (12).

Проведенные для основного резонанса ( $\nu = \omega_0$ ) вычисления значений  $A_2/A_1$  по уравнению (14) при выборе угла  $\beta_0$  из условия  $\sin \beta_0 \approx A_2/A_1$  и по формуле (22) показывают, что они практически совпадают (на рис. 7 кривые 2, 3). Некоторое различие между значениями  $A_2/A_1$  проявляется при  $\alpha < 0,3$ , при возрастании  $\alpha$  от 0,04 до 0,1 оно не превышает 0,032...0,18%.

Относительная амплитуда основной гармоники как для основного резонанса, так и для супергармонического резонанса 2-го порядка определяется выражением (8).

На рис. 8 для области основного резонанса приведены амплитудно-частотные зависимости, на рис. 9 – фазочастотные характеристики, рассчитанные с использованием формул (8), (9), (21), (22) при  $\alpha = 0,01$  и  $0,05$  и  $h = 0,001$  и  $0,01$ . Как и ранее, в расчетах принимаем  $\omega = 1$ , т.е.  $h/\omega \equiv h$ . Следует заметить, что значения отношения  $A_2/A_1$  не зависят от коэффициента  $h$ , а сдвиг фаз  $(\gamma_2 - 2\gamma_1)$  практически не зависит от параметра  $\alpha$ .

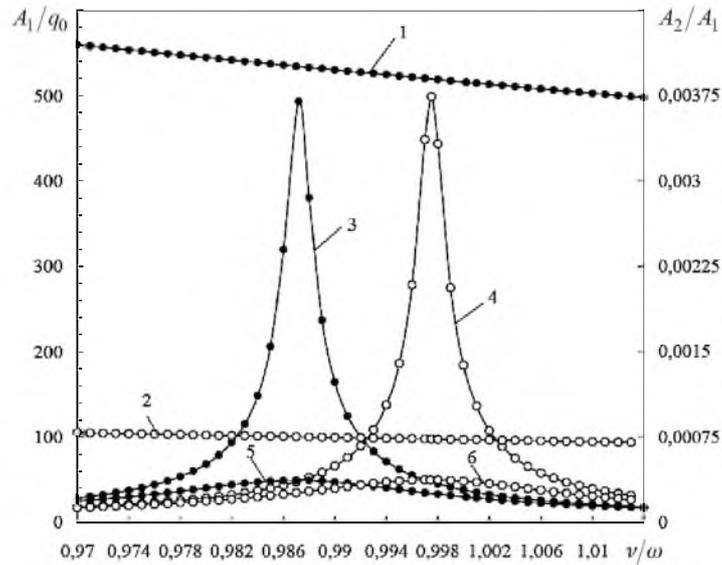


Рис. 8. Амплитудно-частотные характеристики  $A_2/A_1(\nu/\omega) - 1, 2$  и  $A_1/q_0(\nu/\omega) - 3, 4$  для области основного резонанса при разных значениях параметров  $\alpha$  и  $h$ : 1 –  $\alpha = 0,05$ ,  $h = 0,001 \dots 0,01$ ; 2 –  $\alpha = 0,01$ ,  $h = 0,001 \dots 0,01$ ; 3 –  $\alpha = 0,05$ ,  $h = 0,001$ ; 4 –  $\alpha = 0,01$ ,  $h = 0,001$ ; 5 –  $\alpha = 0,05$ ,  $h = 0,01$ ; 6 –  $\alpha = 0,01$ ,  $h = 0,01$ .

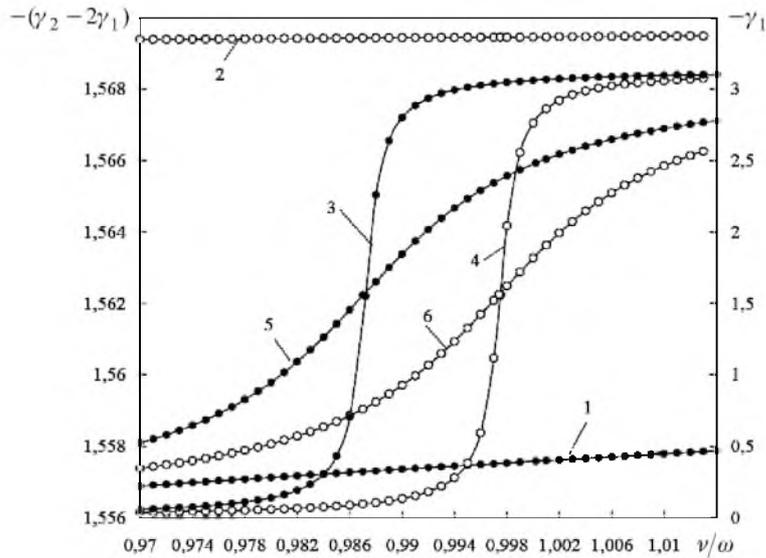


Рис. 9. Фазочастотные характеристики  $[\gamma_2 - 2\gamma_1](\nu/\omega) - 1, 2$  и  $\gamma_1(\nu/\omega) - 3-6$  для области основного резонанса при разных значениях параметров  $\alpha$  и  $h$ : 1 –  $\alpha = 0,01 \dots 0,05$ ,  $h = 0,01$ ; 2 –  $\alpha = 0,01 \dots 0,05$ ,  $h = 0,001$ ; 3 –  $\alpha = 0,05$ ,  $h = 0,001$ ; 4 –  $\alpha = 0,01$ ,  $h = 0,001$ ; 5 –  $\alpha = 0,05$ ,  $h = 0,01$ ; 6 –  $\alpha = 0,01$ ,  $h = 0,01$ .

**Оценка достоверности аналитического решения.** Для оценки достоверности полученных результатов приближенного аналитического определения диагностических параметров колебательного процесса в области основного и супергармонического резонансов системы с асимметричной билинейной характеристикой восстанавливающей силы было выполнено численное решение исходного уравнения (1) методом усреднения по ускорению [2] с произвольно выбранными начальными условиями и продолжением вычисления до установления с заданной точностью стационарного режима колебаний [3].

Данные численного исследования представлены на рисунках штриховыми линиями. Сопоставление результатов аналитического и численного решений свидетельствует о вполне удовлетворительном их соответствии. При супергармоническом резонансе лучшее согласование результатов дают интегрально-усредненные зависимости (14), (20), при основном – зависимость (22).

Т а б л и ц а 2

**Значения отношения амплитуд  $A_2/A_1$ , рассчитанные по формулам (14) и (20), а также результаты численного решения методами Рунге-Кутты [4] и усреднения по ускорению [3]**

№ уравнения	$\alpha$						
	0,0909091				0,4382	0,264706	0,0909091
	$h$						
	0,02	0,03	0,04	0,05	0,1		
(14) $\sin \beta_0 \approx A_2/A_1$	0,515284 (+9,9)	0,357799 (+9,1)	0,274068 (+9,6)	0,222069 (+12,2)	0,692211 (+9,8)	0,390546 (+0,7)	0,113877 (-5,7)
(14) $\sin \beta_0 \approx 0,5 A_2/A_1$	0,547843 (+16,9)	0,3732 (+13,8)	0,282881 (+13,1)	0,227731 (+15,0)	0,78384 (+24,3)	0,418244 (+7,8)	0,115251 (-4,6)
(20) $\sin \beta_0 \approx A_2/A_1$	0,469674 (+0,2)	0,34464 (+5,1)	0,269115 (+7,6)	0,219883 (+11,0)	0,623058 (-1,2)	0,377174 (-2,7)	0,113723 (-5,9)
(20) $\sin \beta_0 \approx 0,5 A_2/A_1$	0,529122 (+12,9)	0,368741 (+12,4)	0,281362 (+12,5)	0,227072 (+14,7)	0,749809 (+18,9)	0,412977 (+6,5)	0,115203 (-4,6)
(14), (20) $\beta_0 = 0$	0,582418 (+24,2)	0,38840 (+18,4)	0,291328 (+16,5)	0,233065 (+17,7)	0,954 (+51,3)	0,45505 (+17,3)	0,116554 (-3,5)
Метод Рунге-Кутты	0,46875	0,3280	0,2500	0,1980	0,6306	0,3878	0,1208
Метод усреднения по ускорению	0,49310	0,32845	0,24535	0,19378	0,50362	0,29315	0,1029

**Примечание.** В скобках приведены данные (в %), определенные по отношению к результатам численного интегрирования методом Рунге-Кутты.

Проведено также сопоставление (табл. 2) определенных по уравнениям (14) и (20) значений отношения амплитуд  $A_2/A_1$  с данными численных решений уравнения вида (1) методом Рунге-Кутты [4] при различных значениях параметров  $\alpha$  и  $h$ . (В табл. 2 приведены также результаты, получен-

ные методом усреднения по ускорению [3].) Как видно, и в этом случае, за редким исключением, наблюдается удовлетворительное соответствие между результатами даже при весьма больших значениях параметра  $\alpha$ . Лучшее согласование отмечается при использовании уравнения (20) при условии  $\sin \beta_0 \approx A_2/A_1$ . Отметим, что анализ зависимостей  $A_2/A_1$  от параметра  $\alpha$  (рис. 1) при различных значениях коэффициента  $h$  подтверждает полученный в [5] вывод, что слабый резонанс ( $A_2/A_1 < 1$ ) проявляется при  $\alpha\omega/h \leq 10$ . Так, точка на приведенной зависимости для  $h = 0,001$  при  $\alpha = 0,01$ , определяющая  $A_2/A_1 \approx 1$ , соответствует значению  $\alpha\omega/h = 10$ . Кроме того, такое сопоставление свидетельствует о возможности использования предложенного аналитического решения и полученных выражений для определения отношения  $A_2/A_1$  также при значительной степени нелинейности системы ( $0,01 < \alpha < 0,5$ ) при условии  $\alpha\omega/h < 10$ , обуславливающим слабый резонанс, т.е.  $A_2 < A_1$ .

Анализ зависимостей отношения  $A_2/A_1$  от угла  $\beta_0$  (рис. 6) показал, что наилучшее согласование с численным решением имеют результаты расчетов по уравнениям (14) и (20). При  $\beta_0 = 0$  расчеты по указанным уравнениям определяют одинаковое значение  $A_2/A_1$ , достаточно удовлетворительно соответствующее данным численного решения. Это позволяет использовать уравнения (14) и (20) с достаточным приближением при значении  $\beta_0 = 0$ , что значительно упрощает вычисления. Следует также заметить, что при  $\beta_0 = 0$  выражение (20), как и выражение (14), приводится к виду (22). Таким образом, как при основном, так и при супергармоническом резонансе 2-го порядка ( $s=2$ ) для оперативной оценки основного диагностического параметра (относительной величины амплитуды второй гармоники ( $A_2/A_1$ )) можно использовать простое явное выражение (22) при определении сдвига фаз ( $\gamma_2 - 2\gamma_1$ ) по формуле (9).

Выражение (22) с учетом (9) можно преобразовать к виду

$$\frac{A_2}{A_1} = \frac{\alpha \left[ (2 - \alpha) \frac{\pi}{4} - 2 \right]}{(2 - \alpha) - 8 \left( \frac{\nu}{\omega} \right)^2} \sin(\gamma_2 - 2\gamma_1). \quad (23)$$

При строго супергармоническом резонансе  $\cos(\gamma_2 - 2\gamma_1) \approx 1$  и из формулы (22) прослеживается зависимость отношения амплитуды  $A_2/A_1$  от коэффициента  $h$ , при основном резонансе  $\sin(\gamma_2 - 2\gamma_1) \approx 1$  и формула (23) свидетельствует об отсутствии влияния коэффициента  $h$ .

На рис. 10 приведены полученные по формуле (22) и путем численного исследования зависимости отношения амплитуд  $A_2/A_1$  от параметра нелинейности  $\alpha$  упругой системы при разных значениях коэффициента  $h$ , характеризующего диссипативные свойства системы, для режима супергармонического резонанса 2-го порядка. Видно, что при  $\alpha\omega/h \leq 5$  наблюдается практически полное совпадение результатов простого приближенного расчета с численным решением, т.е. при супергармоническом резонансе расчетные формулы (8), (9), (12), (22) можно с успехом применять для оценки наиболее важных с практической точки зрения диагностических

признаков ранних стадий развития трещин. Для больших значений параметра  $\alpha$ , как следует из данных табл. 2, целесообразно использовать уравнения (19), (20) или более простое уравнение (14) и формулу (9).

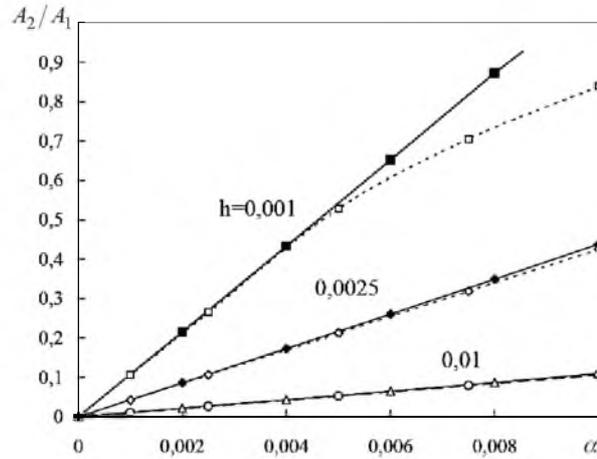


Рис. 10. Зависимости отношения амплитуд  $A_2/A_1$  от параметра  $\alpha$  при разных значениях коэффициента  $h$ , рассчитанные по формуле (22) (сплошные линии) и по данным численного решения (штриховые линии) для случая супергармонического резонанса ( $\nu = 0,5\omega_0$ ).

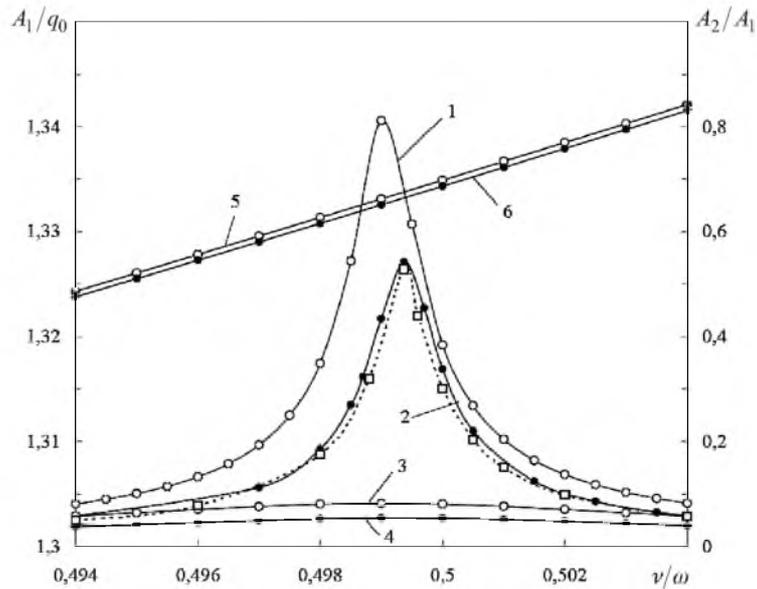


Рис. 11. Амплитудно-частотные зависимости  $\frac{A_2}{A_1}(\nu/\omega)$  – 1–4 и  $\frac{A_1}{q_0}(\nu/\omega)$  – 5, 6 для области супергармонического резонанса при разных значениях параметров  $\alpha$  и  $h$ . 1 –  $\alpha = 0,0075$ ,  $h = 0,001$ ; 2 –  $\alpha = 0,005$ ,  $h = 0,001$ ; 3 –  $\alpha = 0,0075$ ,  $h = 0,01$ ; 4 –  $\alpha = 0,005$ ,  $h = 0,01$ ; 5 –  $\alpha = 0,0075$ ,  $h = 0,001\dots 0,01$ ; 6 –  $\alpha = 0,005$ ,  $h = 0,001\dots 0,01$ .

Полученные с помощью расчетных формул (8), (22) и (9), (12) амплитудно-частотные и фазочастотные характеристики для супергармонического резонанса при разных значениях  $\alpha$  и  $h$  приведены на рис. 11, 12. Для

одного из конкретных значений  $\alpha = 0,005$  и  $h = 0,001$  приведена амплитудно-частотная характеристика, построенная по данным численного решения. Как и в случае использования уравнения (11), при определении  $\beta_0$  из условия  $\sin \beta_0 \approx A_2/A_1$  (рис. 2) во всей резонансной области изменения частоты возбуждения наблюдается хорошее соответствие между результатами расчета и численного решения.

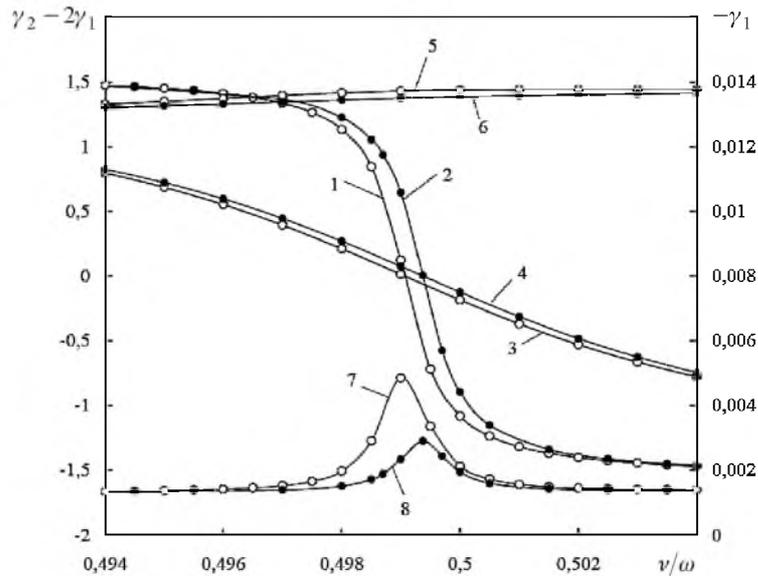


Рис. 12. Фазочастотные характеристики  $[\gamma_2 - 2\gamma_1](v/\omega) - 1-4$  и  $\gamma_1(v/\omega) - 5-8$  для области супергармонического резонанса при разных значениях параметров  $\alpha$  и  $h$ : 1, 7 -  $\alpha = 0,0075$ ,  $h = 0,001$ ; 2, 8 -  $\alpha = 0,005$ ,  $h = 0,001$ ; 3, 5 -  $\alpha = 0,0075$ ,  $h = 0,01$ ; 4, 6 -  $\alpha = 0,005$ ,  $h = 0,01$ .

В области супергармонического резонанса максимальное значение отношения  $A_2/A_1$  при сохранении постоянной величины  $h$  изменяется пропорционально изменению параметра  $\alpha$  (рис. 10), однако в отличие от основного резонанса (рис. 7) величина этого отношения на два порядка выше, даже при значениях  $\alpha$  на порядок меньше, и существенно зависит от коэффициента  $h$ .

**Заключение.** Рассмотрен приближенный аналитический метод исследования вынужденных колебаний нелинейной системы с асимметричной билинейной характеристикой восстанавливающей силы, моделирующей упругое тело с локальной несплошностью материала типа закрывающейся трещины усталости нормального отрыва. Метод основан на отыскании периодических решений в области основного и супергармонического резонансов путем удовлетворения дифференциального уравнения колебаний в моменты заведомо известного значения упругой характеристики. Анализ полученных решений для основного и супергармонического резонанса 2-го порядка и сопоставление расчетных данных с численным решением дифференциального уравнения позволили найти в явном виде простые выражения различных приближений для определения основного вибродиагностического параметра – относительной амплитуды второй гармоники в зависимости от интегрального параметра нелинейности системы, т.е. относительного разли-

чия жесткости системы на полувциклах деформирования разного знака, а также построить для заданных параметров системы ее амплитудно-частотные и фазочастотные характеристики.

### **Резюме**

Из використанням отриманих автором визначальних рівнянь встановлено аналітичні вирази різних наближень для визначення в області основного та супергармонічного резонансів вібродіагностичних параметрів пошкодження від втоми пружного тіла типу тріщини нормального відриву, що закривається. Шляхом зіставлення результатів розрахунку з даними числових розв'язків оцінюється вірогідність аналітичного розв'язку.

1. *Матвеев В. В.* Приближенное аналитическое определение вибродиагностических параметров нелинейности упругих тел, обусловленной наличием закрывающейся трещины. Сообщ. 1. Существующие и предлагаемый методы решения // Пробл. прочности. – 2004. – № 4. – С. 5 – 20.
2. *Тимошенко С. П., Янг Д. Х., Уивер У.* Колебания в инженерном деле. – М.: Машиностроение, 1985. – 472 с.
3. *Бовсуновский А. П.* Численное исследование колебаний нелинейной механической системы, моделирующей тело с трещиной // Пробл. прочности. – 1999. – № 6. – С. 65 – 80.
4. *Плахтиенко Н. П.* К диагностике кусочно-постоянной жесткости при нелинейных резонансах // Прикл. механика. – 1991. – 27, № 10. – С. 112 – 120.
5. *Плахтиенко Н. П.* Резонанс второго порядка пластины, содержащей протяженные дефекты целостности // Пробл. прочности. – 2001. – № 1. – С. 105 – 116.

Поступила 29. 10. 2003