

Построение смешанной аппроксимации МКЭ для решения задачи об изгибе пластины на основе треугольника Зенкевича

А. Ю. Чирков

Институт проблем прочности им. Г. С. Писаренко НАН Украины, Киев, Украина

Для решения задачи об изгибе пластины построен специальный трехузловой треугольный конечный элемент на основе треугольника Зенкевича. Применяется смешанная аппроксимация для прогиба и углов поворотов пластины. Показано, что с уменьшением размеров треугольников численное решение сходится к точному. Представлены результаты численного анализа сходимости и точности решения ряда контрольных задач.

Ключевые слова: изгиб пластин, смешанная аппроксимация, метод конечных элементов, сходимость, точность.

В настоящей работе используются известные положения классической теории изгиба тонких пластин [1], согласно которой состояние пластины полностью описывается прогибом срединной поверхности v . При построении схем метода конечных элементов (МКЭ) аппроксимация в пределах конечного элемента должна удовлетворять критерию “постоянства деформаций” и обеспечивать непрерывность прогиба и нормальной производной на сторонах элементов [2]. Наиболее подходящим для практического применения представляется использование простых трехузловых треугольных элементов. Однако построение аппроксимирующих функций в этом случае приводит к серьезным трудностям математического и вычислительного характера [2], поскольку размерность “локальных” пространств конечных элементов достаточно велика и их структура существенно усложняется [3]. Обзор существующих реализаций МКЭ для задачи об изгибе пластины приведен в [2, 3]. Отметим наиболее важные из них: треугольник Аргириса; треугольник Сие–Клафа–Точера; сингулярный треугольник Зенкевича; треугольник Белла; треугольник Биркгофа–Мэнсвилда; треугольник Морли; треугольник Фрайш де Вебеке и др.

Для практических приложений одним из возможных и широко распространенных решений этой задачи является несогласованный треугольный элемент, предложенный О. Зенкевичем [2]. Пусть i, j, k – нумерация вершин треугольника, образованная против часовой стрелки. Тогда прогиб v_h в пределах каждого треугольника задается в виде

$$v_h = d_1\lambda_i + d_2\lambda_j + d_3\lambda_k + d_4\lambda_i^2\lambda_j + d_5\lambda_j^2\lambda_k + d_6\lambda_k^2\lambda_i + d_7\lambda_i^2\lambda_k + d_8\lambda_j^2\lambda_i + d_9\lambda_k^2\lambda_j + 2d_{10}\lambda_i\lambda_j\lambda_k. \quad (1)$$

Здесь $\lambda_i, \lambda_j, \lambda_k$ – линейные интерполяционные функции треугольника, определяемые с помощью соотношений:

$$\begin{aligned}\lambda_i(x, y) &= \frac{1}{2\Delta}(a_i + b_i x + c_i y); \\ \lambda_j(x, y) &= \frac{1}{2\Delta}(a_j + b_j x + c_j y); \\ \lambda_k(x, y) &= \frac{1}{2\Delta}(a_k + b_k x + c_k y),\end{aligned}\tag{2}$$

где

$$\begin{aligned}b_i &= y_j - y_k; & c_i &= x_k - x_j; & 2\Delta &= b_i c_j - b_j c_i; \\ b_j &= y_k - y_i; & c_j &= x_i - x_k; & 2\Delta &= b_j c_k - b_k c_j; \\ b_k &= y_i - y_j; & c_k &= x_j - x_i; & 2\Delta &= b_k c_i - b_i c_k.\end{aligned}\tag{3}$$

Коэффициенты d_1, \dots, d_9 в (1) задаются выражениями:

$$\begin{cases} d_1 = v_i; & d_2 = v_j; & d_3 = v_k; \\ d_4 = v_i - v_j + b_k \varphi_i + c_k \psi_i; \\ d_5 = v_j - v_k + b_i \varphi_j + c_i \psi_j; \\ d_6 = v_k - v_i + b_j \varphi_k + c_j \psi_k; \\ d_7 = v_i - v_j - b_j \varphi_i - c_j \psi_i; \\ d_8 = v_j - v_k - b_k \varphi_j - c_k \psi_j; \\ d_9 = v_k - v_i - b_i \varphi_k - c_i \psi_k; \\ d_{10} = \frac{1}{4}(d_4 + d_5 + d_6 + d_7 + d_8 + d_9), \end{cases}\tag{4}$$

где φ_i, ψ_i – углы поворотов срединной поверхности пластины соответственно вокруг осей x и y в узле i , $\varphi_i = -\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)_i$, $\psi_i = \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_i$. Поскольку в задании прогиба v_h использовалось девять независимых коэффициентов d_1, \dots, d_9 , аппроксимация (1) представляет собой неполный кубический полином.

Обозначим через φ_h и ψ_h углы поворотов пластины в пределах каждого треугольника:

$$\varphi_h = -\frac{\partial v_h}{\partial y}; \quad \psi_h = \frac{\partial v_h}{\partial x}.\tag{5}$$

Тогда на основании формул (1) и (5) получим

$$\begin{aligned}\psi_h &= e_0 + e_1 \lambda_i \lambda_j + e_2 \lambda_j \lambda_k + e_3 \lambda_k \lambda_i + e_4 \lambda_i^2 + e_5 \lambda_j^2 + e_6 \lambda_k^2; \\ -\varphi_h &= f_0 + f_1 \lambda_i \lambda_j + f_2 \lambda_j \lambda_k + f_3 \lambda_k \lambda_i + f_4 \lambda_i^2 + f_5 \lambda_j^2 + f_6 \lambda_k^2,\end{aligned}\tag{6}$$

где

$$\left\{ \begin{array}{ll} e_0 = \frac{1}{2\Delta}(b_i d_1 + b_j d_2 + b_k d_3); & f_0 = \frac{1}{2\Delta}(c_i d_1 + c_j d_2 + c_k d_3); \\ e_1 = \frac{1}{\Delta}(b_i d_4 + b_j d_8 + b_k d_{10}); & f_1 = \frac{1}{\Delta}(c_i d_4 + c_j d_8 + c_k d_{10}); \\ e_2 = \frac{1}{\Delta}(b_j d_5 + b_k d_9 + b_i d_{10}); & f_2 = \frac{1}{\Delta}(c_j d_5 + c_k d_9 + c_i d_{10}); \\ e_3 = \frac{1}{\Delta}(b_k d_6 + b_i d_7 + b_j d_{10}); & f_3 = \frac{1}{\Delta}(c_k d_6 + c_i d_7 + c_j d_{10}); \\ e_4 = \frac{1}{2\Delta}(b_j d_4 + b_k d_7); & f_4 = \frac{1}{2\Delta}(c_j d_4 + c_k d_7); \\ e_5 = \frac{1}{2\Delta}(b_k d_5 + b_i d_8); & f_5 = \frac{1}{2\Delta}(c_k d_5 + c_i d_8); \\ e_6 = \frac{1}{2\Delta}(b_i d_6 + b_j d_9); & f_6 = \frac{1}{2\Delta}(c_i d_6 + c_j d_9). \end{array} \right. \quad (7)$$

Согласно выражениям (4)–(7), функции φ_h и ψ_h в вершинах треугольника принимают значения $\varphi_i = \varphi_h(x_i, y_i)$ и $\psi_i = \psi_h(x_i, y_i)$, причем на сторонах треугольника имеет место параболический закон изменения:

$$\left\{ \begin{array}{l} (\psi_h)_{ij} = e_0 + e_1 \lambda_i \lambda_j + e_4 \lambda_i^2 + e_5 \lambda_j^2; \\ (\psi_h)_{jk} = e_0 + e_2 \lambda_j \lambda_k + e_5 \lambda_j^2 + e_6 \lambda_k^2; \\ (\psi_h)_{ki} = e_0 + e_3 \lambda_k \lambda_i + e_6 \lambda_k^2 + e_4 \lambda_i^2; \\ -(\varphi_h)_{ij} = f_0 + f_1 \lambda_i \lambda_j + f_4 \lambda_i^2 + f_5 \lambda_j^2; \\ -(\varphi_h)_{jk} = f_0 + f_2 \lambda_j \lambda_k + f_5 \lambda_j^2 + f_6 \lambda_k^2; \\ -(\varphi_h)_{ki} = f_0 + f_3 \lambda_k \lambda_i + f_6 \lambda_k^2 + f_4 \lambda_i^2. \end{array} \right. \quad (8)$$

Таким образом, аппроксимация (1) обеспечивает непрерывность прогиба для всей пластины и непрерывность углов поворотов только в узлах сетки. На сторонах треугольников функции φ_h и ψ_h изменяются по квадратичному закону и, значит, нарушаются условия непрерывности угла наклона. Теоретические оценки и опыт решения задач показывают, что если сетка треугольников образована системой трех эквидистантных параллельных прямых, то с уменьшением размеров треугольников решение сходится к точному [3].

В общем случае аппроксимация (1) позволяет получить решение, сходящееся не к точному, а к некоторому другому, отличающемуся от него в пределах некоторой ошибки [2, 3]. Величина ошибки зависит от способа разбиения пластины на треугольные элементы и при использовании разбиения “крест” и неравномерных сеток существенно влияет на вычисление кривизны пластины и изгибающих моментов.

Построение аппроксимирующих функций. В работах [4–7] предложена модификация треугольника Зенкевича, согласно которой в формуле (1) вместо последнего слагаемого $2d_{10}\lambda_i\lambda_j\lambda_k$ добавляются три члена четвертого порядка $\lambda_i^2\lambda_j\lambda_k$, $\lambda_i\lambda_j^2\lambda_k$, $\lambda_i\lambda_j\lambda_k^2$ с различными коэффициентами. В результате обеспечивается выполнение “кусочного” тестирования [2, 7] и, следовательно, удовлетворяется критерий “постоянства деформаций”.

Однако более простое решение получается при использовании подхода смешанной аппроксимации для прогиба и углов поворотов пластины. С этой целью модифицируем соотношения (6), полагая

$$\begin{aligned} \psi_h &= e_0 + e_1\lambda_i\lambda_j + e_2\lambda_j\lambda_k + e_3\lambda_k\lambda_i + e_4\lambda_i^2 + e_5\lambda_j^2 + e_6\lambda_k^2 + \\ &\quad + e_7(\lambda_i\lambda_j^2 + \lambda_i^2\lambda_j) + e_8(\lambda_j\lambda_k^2 + \lambda_j^2\lambda_k) + e_9(\lambda_k\lambda_i^2 + \lambda_k^2\lambda_i); \\ -\varphi_h &= f_0 + f_1\lambda_i\lambda_j + f_2\lambda_j\lambda_k + f_3\lambda_k\lambda_i + f_4\lambda_i^2 + f_5\lambda_j^2 + f_6\lambda_k^2 + \\ &\quad + f_7(\lambda_i\lambda_j^2 + \lambda_i^2\lambda_j) + f_8(\lambda_j\lambda_k^2 + \lambda_j^2\lambda_k) + f_9(\lambda_k\lambda_i^2 + \lambda_k^2\lambda_i), \end{aligned} \quad (9)$$

где коэффициенты $e_0, \dots, e_6, f_0, \dots, f_6$ определяются по выражениям (7), а $e_7, e_8, e_9, f_7, f_8, f_9$ выбираются таким образом, чтобы обеспечить линейный закон изменения функций φ_h и ψ_h на сторонах треугольника:

$$\begin{cases} e_7 = -e_1 + e_4 + e_5; & f_7 = -f_1 + f_4 + f_5; \\ e_8 = -e_2 + e_5 + e_6; & f_8 = -f_2 + f_5 + f_6; \\ e_9 = -e_3 + e_6 + e_4; & f_9 = -f_3 + f_6 + f_4. \end{cases} \quad (10)$$

Тогда с учетом свойств интерполяционных функций (2) на основании формул (9) и (10) находим

$$\begin{cases} (\psi_h)_{ij} = e_0 + e_4\lambda_i + e_5\lambda_j; & -(\varphi_h)_{ij} = f_0 + f_4\lambda_i + f_5\lambda_j; \\ (\psi_h)_{jk} = e_0 + e_5\lambda_j + e_6\lambda_k; & -(\varphi_h)_{jk} = f_0 + f_5\lambda_j + f_6\lambda_k; \\ (\psi_h)_{ki} = e_0 + e_6\lambda_k + e_4\lambda_i; & -(\varphi_h)_{ki} = f_0 + f_6\lambda_k + f_4\lambda_i. \end{cases} \quad (11)$$

Следовательно, имеет место непрерывность углов поворота φ_h и ψ_h для всей пластины. Заметим, однако, что аппроксимация (9), (10) накладывает чрезмерные требования непрерывности на функции φ_h и ψ_h . В действительности, согласно классической теории изгиба тонких пластин, достаточно потребовать непрерывность нормальной производной $\frac{\partial v_h}{\partial n}$ на границах между треугольниками [2, 3].

Пусть $\vartheta_{ij}, \vartheta_{jk}, \vartheta_{ki}$ – соответственно углы между векторами единичной нормали n_{ij}, n_{jk}, n_{ki} к рассматриваемой стороне треугольника и осью x . С использованием обозначений (2) имеем

$$\cos(\vartheta_{ij}) = -\frac{b_k}{l_{ij}}; \quad \sin(\vartheta_{ij}) = -\frac{c_k}{l_{ij}}; \quad l_{ij} = \sqrt{b_k^2 + c_k^2}; \quad (12a)$$

$$\cos(\vartheta_{jk}) = -\frac{b_i}{l_{jk}}; \quad \sin(\vartheta_{jk}) = -\frac{c_i}{l_{jk}}; \quad l_{jk} = \sqrt{b_i^2 + c_i^2}; \quad (12б)$$

$$\cos(\vartheta_{ki}) = -\frac{b_j}{l_{ki}}; \quad \sin(\vartheta_{ki}) = -\frac{c_j}{l_{ki}}; \quad l_{ki} = \sqrt{b_j^2 + c_j^2}. \quad (12в)$$

Учитывая, что

$$\begin{cases} \frac{\partial v_h}{\partial n_{ij}} = (\psi_h)_{ij} \cos(\vartheta_{ij}) - (\varphi_h)_{ij} \sin(\vartheta_{ij}); \\ \frac{\partial v_h}{\partial n_{jk}} = (\psi_h)_{jk} \cos(\vartheta_{jk}) - (\varphi_h)_{jk} \sin(\vartheta_{jk}); \\ \frac{\partial v_h}{\partial n_{ki}} = (\psi_h)_{ki} \cos(\vartheta_{ki}) - (\varphi_h)_{ki} \sin(\vartheta_{ki}), \end{cases} \quad (13)$$

коэффициенты $e_7, e_8, e_9, f_7, f_8, f_9$ определяем таким образом, чтобы обеспечить линейный закон изменения нормальной производной $\frac{\partial v_h}{\partial n}$ на сторонах каждого треугольника. На основании формул (9) и (13) получаем

$$\begin{cases} e_7 = g_1 \cos(\vartheta_{ij}) + g_4 \sin(\vartheta_{ij}); & f_7 = g_1 \sin(\vartheta_{ij}) - g_4 \cos(\vartheta_{ij}); \\ e_8 = g_2 \cos(\vartheta_{jk}) + g_5 \sin(\vartheta_{jk}); & f_8 = g_2 \sin(\vartheta_{jk}) - g_5 \cos(\vartheta_{jk}); \\ e_9 = g_3 \cos(\vartheta_{ki}) + g_6 \sin(\vartheta_{ki}); & f_9 = g_3 \sin(\vartheta_{ki}) - g_6 \cos(\vartheta_{ki}), \end{cases} \quad (14)$$

где g_4, g_5, g_6 – произвольные вещественные константы; коэффициенты g_1, g_2, g_3 задаются с помощью следующих соотношений:

$$\begin{cases} g_1 = \cos(\vartheta_{ij})(-e_1 + e_4 + e_5) + \sin(\vartheta_{ij})(-f_1 + f_4 + f_5); \\ g_2 = \cos(\vartheta_{jk})(-e_2 + e_5 + e_6) + \sin(\vartheta_{jk})(-f_2 + f_5 + f_6); \\ g_3 = \cos(\vartheta_{ki})(-e_3 + e_6 + e_4) + \sin(\vartheta_{ki})(-f_3 + f_6 + f_4). \end{cases} \quad (15)$$

Следовательно, аппроксимация углов поворотов пластины (9) с учетом соотношений (13)–(15) допускает непрерывность нормальной производной на границах между треугольниками. Тем не менее аппроксимация (1), (9), (13)–(15) не является согласованной, поскольку соотношения (5) выполняются только в узлах сетки. Таким образом, приходим к смешанной аппроксимации для прогиба и углов поворотов пластины.

С физической точки зрения ошибка согласования эквивалентна действию в пределах треугольника фиктивных поперечных деформаций сдвига, определяемых в соответствии с выражениями (5), (9) и законом Гука по формулам

$$\begin{aligned}
 \gamma_{xz}^h &= -\psi_h + \frac{\partial v_h}{\partial x} = \\
 &= -e_7(\lambda_i \lambda_j^2 + \lambda_i^2 \lambda_j) - e_8(\lambda_j \lambda_k^2 + \lambda_j^2 \lambda_k) - e_9(\lambda_k \lambda_i^2 + \lambda_k^2 \lambda_i); \\
 \gamma_{yz}^h &= \varphi_h + \frac{\partial v_h}{\partial y} = \\
 &= -f_7(\lambda_i \lambda_j^2 + \lambda_i^2 \lambda_j) - f_8(\lambda_j \lambda_k^2 + \lambda_j^2 \lambda_k) - f_9(\lambda_k \lambda_i^2 + \lambda_k^2 \lambda_i).
 \end{aligned}
 \tag{16}$$

Заметим, что в узлах сетки функции $\gamma_{xz}^h, \gamma_{yz}^h$ равны нулю, а коэффициенты $e_7, e_8, e_9, f_7, f_8, f_9$ определяются в соответствии с формулами (14), (15). Пусть γ_S^h – касательная компонента сдвига на сторонах треугольника, соответствующая деформациям (16). Выбирая коэффициенты g_4, g_5, g_6 из условия

$$\int_S (\gamma_S^h)^2 dS = 0,
 \tag{17}$$

получаем $g_4 = g_5 = g_6 = 0$. Кроме того, использование неравенства треугольника

$$\begin{aligned}
 \|\gamma_{xz}^h\| &\leq \left\| -\psi_h + \frac{\partial v}{\partial x} \right\| + \left\| \frac{\partial(v_h - v)}{\partial x} \right\|; \\
 \|\gamma_{yz}^h\| &\leq \left\| \varphi_h + \frac{\partial v}{\partial y} \right\| + \left\| \frac{\partial(v_h - v)}{\partial y} \right\|,
 \end{aligned}
 \tag{18}$$

а также результатов об интерполяции [3, 8] приводит к тому, что при $h \rightarrow 0$ имеем $\gamma_{xz}^h \rightarrow 0, \gamma_{yz}^h \rightarrow 0$. Другими словами, при уменьшении размеров треугольников ошибка согласования стремится к нулю.

Что касается разрешимости дискретной задачи, которая получается на основании смешанной аппроксимации (1) и (9), то можно ожидать, что ее собственные значения не меньше таковых для задачи, построенной с помощью обычного треугольника Зенкевича. С физической точки зрения аппроксимация (9) приводит к более жесткой механической системе, чем аппроксимация (6), поскольку выполняется непрерывность нормальной производной на сторонах треугольников и, следовательно, аппроксимация (9) обеспечивает однозначную разрешимость дискретной задачи.

Формирование матрицы жесткости элемента. Кривизны и кручение срединной поверхности пластины определяются в пределах каждого треугольника на основании соотношений

$$\begin{aligned}
 \kappa_x &= -\frac{\partial^2 v_h}{\partial x^2} = -\frac{\partial \psi_h}{\partial x}; & \kappa_y &= -\frac{\partial^2 v_h}{\partial y^2} = \frac{\partial \varphi_h}{\partial y}; \\
 \kappa_{xy} &= 2 \frac{\partial^2 v_h}{\partial x \partial y} = \frac{\partial \psi_h}{\partial y} - \frac{\partial \varphi_h}{\partial x}.
 \end{aligned}
 \tag{19}$$

В соответствии с формулами (9) и (19) получаем

$$\left\{ \begin{aligned} \kappa_x &= -\frac{1}{2\Delta}(A_1\lambda_i + A_2\lambda_j + A_3\lambda_k + A_4\lambda_i^2 + A_5\lambda_j^2 + A_6\lambda_k^2 + \\ &\quad + A_7\lambda_i\lambda_j + A_8\lambda_j\lambda_k + A_9\lambda_k\lambda_i); \\ \kappa_y &= -\frac{1}{2\Delta}(B_1\lambda_i + B_2\lambda_j + B_3\lambda_k + B_4\lambda_i^2 + B_5\lambda_j^2 + B_6\lambda_k^2 + \\ &\quad + B_7\lambda_i\lambda_j + B_8\lambda_j\lambda_k + B_9\lambda_k\lambda_i); \\ \kappa_{xy} &= \frac{1}{2\Delta}(C_1\lambda_i + C_2\lambda_j + C_3\lambda_k + C_4\lambda_i^2 + C_5\lambda_j^2 + C_6\lambda_k^2 + \\ &\quad + C_7\lambda_i\lambda_j + C_8\lambda_j\lambda_k + C_9\lambda_k\lambda_i), \end{aligned} \right. \quad (20)$$

где

$$\left\{ \begin{aligned} A_1 &= b_j e_1 + b_k e_3 + 2b_i e_4; & B_1 &= c_j f_1 + c_k f_3 + 2c_i f_4; \\ A_2 &= b_k e_2 + b_i e_1 + 2b_j e_5; & B_2 &= c_k f_2 + c_i f_1 + 2c_j f_5; \\ A_3 &= b_i e_3 + b_j e_2 + 2b_k e_6; & B_3 &= c_i f_3 + c_j f_2 + 2c_k f_6; \\ A_4 &= b_j e_7 + b_k e_9; & B_4 &= c_j f_7 + c_k f_9; \\ A_5 &= b_k e_8 + b_i e_7; & B_5 &= c_k f_8 + c_i f_7; \\ A_6 &= b_i e_9 + b_j e_8; & B_6 &= c_i f_9 + c_j f_8; \\ A_7 &= -2b_k e_7; & B_7 &= -2c_k f_7; \\ A_8 &= -2b_i e_8; & B_8 &= -2c_i f_8; \\ A_9 &= -2b_j e_9; & B_9 &= -2c_j f_9; \\ C_1 &= c_j e_1 + c_k e_3 + b_j f_1 + b_k f_3 + 2(c_i e_4 + b_i f_4); \\ C_2 &= c_k e_2 + c_i e_1 + b_k f_2 + b_i f_1 + 2(c_j e_5 + b_j f_5); \\ C_3 &= c_i e_3 + c_j e_2 + b_i f_3 + b_j f_2 + 2(c_k e_6 + b_k f_6); \\ C_4 &= c_j e_7 + c_k e_9 + b_j f_7 + b_k f_9; \\ C_5 &= c_k e_8 + c_i e_7 + b_k f_8 + b_i f_7; \\ C_6 &= c_i e_9 + c_j e_8 + b_i f_9 + b_j f_8; \\ C_7 &= -2(c_k e_7 + b_k f_7); \\ C_8 &= -2(c_i e_8 + b_i f_8); \\ C_9 &= -2(c_j e_9 + b_j f_9). \end{aligned} \right. \quad (21)$$

Согласно формулам (20), функции κ_x , κ_y , κ_{xy} изменяются в пределах каждого треугольника по квадратичному закону.

Для вычисления коэффициентов матриц жесткости и податливости введем в рассмотрение вектор, который включает все узловые неизвестные треугольника:

$$\{\delta\}^T = \{v_i \quad \varphi_i \quad \psi_i \quad v_j \quad \varphi_j \quad \psi_j \quad v_k \quad \varphi_k \quad \psi_k\}^T. \quad (22)$$

Тогда коэффициенты матрицы жесткости $a_{\alpha\beta}$ можно определить с помощью соотношений

$$\sum_{\alpha=1}^9 \sum_{\beta=1}^9 a_{\alpha\beta} \delta_{\alpha} \delta_{\beta} = \frac{1}{16\Delta^3} \sum_{n=1}^9 M_{xn} A_n + M_{yn} B_n + M_{xyn} C_n. \quad (23)$$

Здесь

$$\begin{aligned} M_{xn} &= \sum_{m=1}^9 \gamma_{nm} (D_{11} A_m + D_{12} B_m); \\ M_{yn} &= \sum_{m=1}^9 \gamma_{nm} (D_{12} A_m + D_{22} B_m); \\ M_{xyn} &= \sum_{m=1}^9 \gamma_{nm} D_{33} C_m, \end{aligned} \quad (24)$$

где $D_{11}, D_{12}, D_{22}, D_{33}$ – коэффициенты жесткости пластины; коэффициенты γ_{nm} ($1 \leq n, m \leq 9$) определяются в результате точного интегрирования по треугольнику и задаются с помощью следующих выражений:

$$\left\{ \begin{aligned} \gamma_{11} = \gamma_{22} = \gamma_{33} &= \frac{1}{6}; & \gamma_{44} = \gamma_{55} = \gamma_{66} &= \frac{1}{15}; \\ \gamma_{77} = \gamma_{88} = \gamma_{99} = \gamma_{45} = \gamma_{46} = \gamma_{56} &= \frac{1}{90}; \\ \gamma_{12} = \gamma_{13} = \gamma_{23} &= \frac{1}{12}; & \gamma_{14} = \gamma_{25} = \gamma_{36} &= \frac{1}{10}; \\ \gamma_{15} = \gamma_{16} = \gamma_{17} = \gamma_{19} = \gamma_{24} = \gamma_{26} = \gamma_{27} = \gamma_{28} = \\ &= \gamma_{34} = \gamma_{35} = \gamma_{38} = \gamma_{39} &= \frac{1}{30}; \\ \gamma_{18} = \gamma_{29} = \gamma_{37} = \gamma_{47} = \gamma_{49} = \gamma_{57} = \gamma_{58} = \gamma_{68} = \gamma_{69} &= \frac{1}{60}; \\ \gamma_{48} = \gamma_{59} = \gamma_{67} = \gamma_{78} = \gamma_{79} = \gamma_{89} &= \frac{1}{180}; \\ \gamma_{nm} = \gamma_{mn}, & \quad 1 \leq n, m \leq 9. \end{aligned} \right. \quad (25)$$

В [9] приведен полный текст Фортран-программы формирования матрицы жесткости треугольного элемента на основе рассмотренной выше аппроксимации для прогиба и углов поворотов пластины.

Коэффициенты матрицы податливости упругого основания $m_{\alpha\beta}$ вычисляются из формул

$$\sum_{\alpha=1}^9 \sum_{\beta=1}^9 m_{\alpha\beta} \delta_{\alpha} \delta_{\beta} = c_z \Delta \sum_{n=1}^{10} z_n d_n, \quad (26)$$

где c_z – жесткость упругого основания, или коэффициент постели;

$$z_n = \sum_{m=1}^{10} \omega_{nm} d_m, \quad (27)$$

причем

$$\left\{ \begin{array}{l} \omega_{11} = \omega_{22} = \omega_{33} = \frac{1}{6}; \\ \omega_{44} = \omega_{55} = \omega_{66} = \omega_{77} = \omega_{88} = \omega_{99} = \frac{1}{420}; \\ \omega_{10,10} = \frac{1}{630}; \\ \omega_{12} = \omega_{13} = \omega_{23} = \frac{1}{12}; \\ \omega_{14} = \omega_{17} = \omega_{25} = \omega_{28} = \omega_{36} = \omega_{39} = \frac{1}{60}; \\ \omega_{16} = \omega_{18} = \omega_{1,10} = \omega_{24} = \omega_{29} = \omega_{2,10} = \omega_{35} = \\ = \omega_{37} = \omega_{3,10} = \frac{1}{90}; \\ \omega_{15} = \omega_{19} = \omega_{26} = \omega_{27} = \omega_{34} = \omega_{38} = \frac{1}{180}; \\ \omega_{48} = \omega_{59} = \omega_{67} = \frac{1}{560}; \\ \omega_{47} = \omega_{4,10} = \omega_{58} = \omega_{5,10} = \omega_{69} = \omega_{6,10} = \omega_{7,10} = \\ = \omega_{8,10} = \omega_{9,10} = \frac{1}{840}; \\ \omega_{45} = \omega_{46} = \omega_{56} = \omega_{78} = \omega_{79} = \omega_{89} = \frac{1}{1680}; \\ \omega_{49} = \omega_{57} = \omega_{68} = \frac{1}{2520}; \quad \omega_{nm} = \omega_{mn}, \quad 1 \leq n, m \leq 10. \end{array} \right. \quad (28)$$

Вычисление изгибающих моментов. В задачах об изгибе пластин для вычисления изгибающих M_x , M_y и крутящего M_{xy} моментов целесообразно использовать кусочно-линейные приближения κ_x , κ_y , κ_{xy} , узловые значения которых определяются в результате решения трех систем линейных алгебраических уравнений:

$$\sum_{\beta} g_{\alpha\beta} \kappa_{x\beta} = r_{x\alpha}; \quad \sum_{\beta} g_{\alpha\beta} \kappa_{y\beta} = r_{y\alpha}; \quad \sum_{\beta} g_{\alpha\beta} = \kappa_{xy\alpha} = r_{xy\alpha}, \quad (29)$$

где $g_{\alpha\beta}$ – коэффициенты симметричной положительно определенной матрицы Грама, определяемые для треугольника по соотношениям

$$g_{ii} = g_{jj} = g_{kk} = \frac{\Delta}{6}; \quad g_{ij} = g_{ji} = g_{ik} = g_{ki} = g_{jk} = g_{kj} = \frac{\Delta}{12}. \quad (30)$$

Векторы правой части уравнений (29) вычисляются с помощью формул

$$\begin{cases} (r_x)_i = \frac{\Delta}{60} [6A_4 + 2(A_5 + A_6 + A_7 + A_9) + A_8]; \\ (r_x)_j = \frac{\Delta}{60} [6A_5 + 2(A_4 + A_6 + A_7 + A_8) + A_9]; \\ (r_x)_k = \frac{\Delta}{60} [6A_6 + 2(A_4 + A_5 + A_8 + A_9) + A_7]; \\ (r_y)_i = \frac{\Delta}{60} [6B_4 + 2(B_5 + B_6 + B_7 + B_9) + B_8]; \\ (r_y)_j = \frac{\Delta}{60} [6B_5 + 2(B_4 + B_6 + B_7 + B_8) + B_9]; \\ (r_y)_k = \frac{\Delta}{60} [6B_6 + 2(B_4 + B_5 + B_8 + B_9) + B_7]; \\ (r_{xy})_i = \frac{\Delta}{60} [6C_4 + 2(C_5 + C_6 + C_7 + C_9) + C_8]; \\ (r_{xy})_j = \frac{\Delta}{60} [6C_5 + 2(C_4 + C_6 + C_7 + C_8) + C_9]; \\ (r_{xy})_k = \frac{\Delta}{60} [6C_6 + 2(C_4 + C_5 + C_8 + C_9) + C_7]. \end{cases} \quad (31)$$

Для решения уравнений (29) целесообразно использовать итерационные методы с диагональной переобуславливающей матрицей, элементами которой являются числа $g_{\alpha\alpha}$. Таким образом, все необходимые соотношения для построения смешанной аппроксимации приведены.

Численный анализ. Переходим к численному анализу решения тестовых задач. Данные расчетов сопоставлялись с известными аналитическими решениями [1], а также с полученными на основе классического метода конечных элементов (КМКЭ) с использованием треугольника Зенкевича и смешанного метода (СМКЭ). Все результаты представлены для квадратной пластины постоянной толщины t и длиной стороны a , которая находится под действием вертикальной равномерно распределенной нагрузки q (рис. 1).

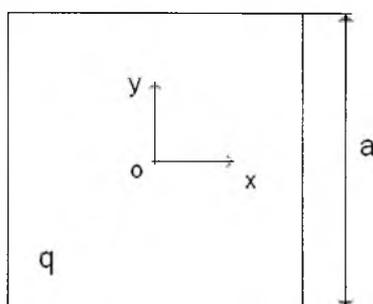


Рис. 1. Квадратная пластина под действием равномерно распределенной нагрузки q .

Использовались два варианта разбиения пластины на треугольники: первый – соответствует делению квадрата на два равных треугольника; второй – на четыре. Деление квадрата осуществлялось с помощью его диагоналей (рис. 2). Результаты расчетов представлены в табл. 1–14. Там же приведены данные о разбиении пластины. Для вычисления изгибающих и крутящего моментов в узлах сетки применялось кусочно-линейное приближение, т.е. узловые компоненты кривизны пластины определялись в результате решения систем линейных уравнений (29).

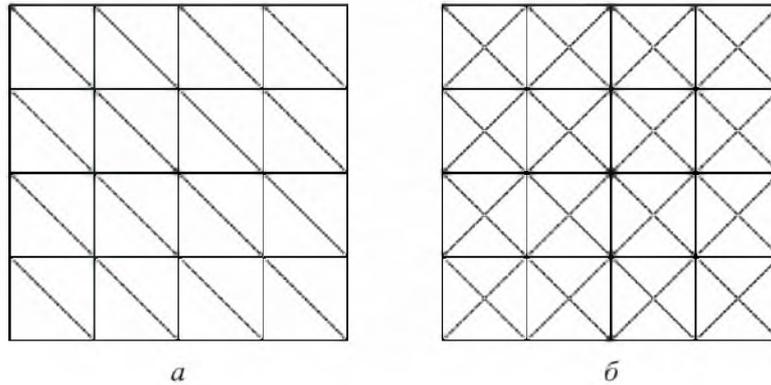


Рис. 2. Варианты разбиения квадратной пластины на треугольники (сетка 4×4): *a* – равномерная треугольная сетка; *б* – сетка типа “крест”.

Чистый изгиб пластины. В качестве примера рассматривался чистый изгиб квадратной пластины:

$$M_x = M_1, \quad M_y = M_2, \quad M_{xy} = 0, \quad (32)$$

где M_1, M_2 – изгибающие моменты на контуре пластины.

Задача решалась для различных комбинаций изгибающих моментов M_1 и M_2 . При любом виде разбиения пластины на треугольники смешанный метод обеспечивает получение точного решения (32). Таким образом, смешанная аппроксимация удовлетворяет критерию “постоянства деформаций” и, следовательно, выдерживает “кусочное” тестирование. Заметим, что обычный треугольник Зенкевича удовлетворяет критерию “постоянства деформаций” приближенно.

Цилиндрический изгиб пластины. Рассматривалась квадратная пластина, свободно опертая по двум противоположным сторонам и находящаяся под действием вертикальной равномерно распределенной нагрузки q . Коэффициент Пуассона принимался равным нулю. Полученные численные данные сравнивались с аналитическим решением [1] для центральной точки пластины по формулам

$$M_{\max} = \beta qa^2; \quad v_{\max} = \alpha \frac{qa^4}{D}, \quad (33)$$

где $D = Et^3/12(1 - \nu^2)$ – изгибная жесткость пластины; E – модуль Юнга.

Результаты численных расчетов представлены в табл. 1, 2. Применение равномерной треугольной сетки приводит к близким результатам для обоих методов. При использовании разбиения типа “крест” треугольник Зенкевича обеспечивает приемлемые результаты только для прогиба. Смешанный метод сходится при сгущении сетки и дает близкие к аналитическому решению результаты.

Т а б л и ц а 1

Результаты расчетов для задачи о цилиндрическом изгибе квадратной пластины при использовании равномерной треугольной сетки

Сетка	β		Погрешность, %		α		Погрешность, %	
	КМКЭ	СМКЭ	КМКЭ	СМКЭ	КМКЭ	СМКЭ	КМКЭ	СМКЭ
4 × 4	0,1313	0,1310	-5,04	-4,80	0,01320	0,01308	-1,38	-0,46
6 × 6	0,1270	0,1268	-1,60	-1,44	0,01310	0,01304	-0,61	-0,15
8 × 8	0,1262	0,1262	-0,96	-0,96	0,01306	0,01303	-0,31	-0,08
10 × 10	0,1258	0,1257	-0,64	-0,56	0,01305	0,01303	-0,23	-0,05
20 × 20	0,1252	0,1252	-0,16	-0,16	0,01303	0,01302	-0,08	0
40 × 40	0,1250	0,1250	0	0	0,01302	0,01302	0	0
[1]	0,125				0,01302			

Т а б л и ц а 2

Результаты расчетов для задачи о цилиндрическом изгибе квадратной пластины при использовании сетки типа “крест”

Сетка	β		Погрешность, %		α		Погрешность, %	
	КМКЭ	СМКЭ	КМКЭ	СМКЭ	КМКЭ	СМКЭ	КМКЭ	СМКЭ
4 × 4	0,1200	0,1297	4,00	-3,76	0,01350	0,01314	-3,69	-0,92
6 × 6	0,1163	0,1270	6,96	-1,60	0,01338	0,01307	-2,76	-0,38
8 × 8	0,1150	0,1261	8,00	-0,88	0,01333	0,01305	-2,38	-0,23
10 × 10	0,1144	0,1257	8,48	-0,56	0,01332	0,01304	-2,30	-0,15
20 × 20	0,1137	0,1252	9,04	-0,16	0,01330	0,01302	-2,15	0
40 × 40	0,1135	0,1250	9,20	0	0,01329	0,01302	-2,07	0
60 × 60	0,1134	0,1250	9,28	0	0,01329	0,01302	-2,07	0
[1]	0,125				0,01302			

Свободно опертая пластина. Оценивалась точность определения изгибающих моментов и прогиба в центре пластины. При этом коэффициент Пуассона принимался равным 0,3. Сравнение численных результатов с аналитическим решением [1] осуществлялось в соответствии с формулами

$$M_x = M_y = M_{\max} = \beta q a^2, \quad v_{\max} = \alpha \frac{q a^4}{D}. \quad (34)$$

Данные расчетов представлены в табл. 3, 4. Результаты, полученные с помощью КМКЭ и СМКЭ при равномерной треугольной сетке, близки, хотя смешанная аппроксимация дает несколько более точные результаты. Ситуация существенно изменяется для разбиений на треугольники типа “крест”. Из табл. 4 и рис. 3 видно, что при использовании сетки типа “крест” треугольник Зенкевича обеспечивает приемлемые результаты только для прогиба и не гарантирует получение изгибающих моментов при ее сущест-
нии. Решение для изгибающих моментов, полученное на основе треуголь-
ника Зенкевича, имеет осциллирующий характер. Смешанный метод сходит-
ся и дает близкие к аналитическому решению результаты.

Т а б л и ц а 3

Результаты расчетов свободно опертой квадратной пластины
под действием равномерно распределенной нагрузки
при использовании равномерной треугольной сетки

Сетка	β		Погрешность, %		α		Погрешность, %	
	КМКЭ	СМКЭ	КМКЭ	СМКЭ	КМКЭ	СМКЭ	КМКЭ	СМКЭ
4 × 4	0,05378	0,05208	-12,27	-8,72	0,004393	0,004197	-8,15	-3,32
6 × 6	0,05040	0,04991	-5,22	-4,19	0,004217	0,004125	-3,81	-1,55
8 × 8	0,04926	0,04895	-2,84	-2,19	0,004152	0,004099	-2,21	-0,91
10 × 10	0,04876	0,04856	-1,79	-1,38	0,004122	0,004086	-1,48	-0,59
20 × 20	0,04812	0,04805	-0,46	-0,31	0,004080	0,004068	-0,44	-0,15
40 × 40	0,04795	0,04793	-0,10	-0,06	0,004067	0,004064	-0,12	-0,05
60 × 60	0,04792	0,04790	-0,04	0	0,004065	0,004063	-0,07	-0,02
80 × 80	0,04790	0,04790	0	0	0,004064	0,004062	-0,05	0
[1]	0,0479				0,004062			

Т а б л и ц а 4

Результаты расчетов свободно опертой квадратной пластины
под действием равномерно распределенной нагрузки
при использовании сетки типа “крест”

Сетка	β		Погрешность, %		α		Погрешность, %	
	КМКЭ	СМКЭ	КМКЭ	СМКЭ	КМКЭ	СМКЭ	КМКЭ	СМКЭ
4 × 4	0,04016	0,05100	16,16	-6,47	0,004165	0,004079	-2,53	-0,42
6 × 6	0,03723	0,04915	22,27	-2,61	0,004176	0,004068	-2,80	-0,15
8 × 8	0,03632	0,04858	24,17	-1,42	0,004184	0,004065	-3,00	-0,07
10 × 10	0,03590	0,04833	25,05	-0,89	0,004187	0,004064	-3,08	-0,05
20 × 20	0,03533	0,04800	26,24	-0,21	0,004192	0,004063	-3,20	-0,02
40 × 40	0,03520	0,04791	26,51	-0,02	0,004193	0,004062	-3,22	0
60 × 60	0,03516	0,04790	26,59	0	0,004193	0,004062	-3,22	0
80 × 80	0,03516	0,04790	26,59	0	0,004193	0,004062	-3,22	0
[1]	0,0479				0,004062			

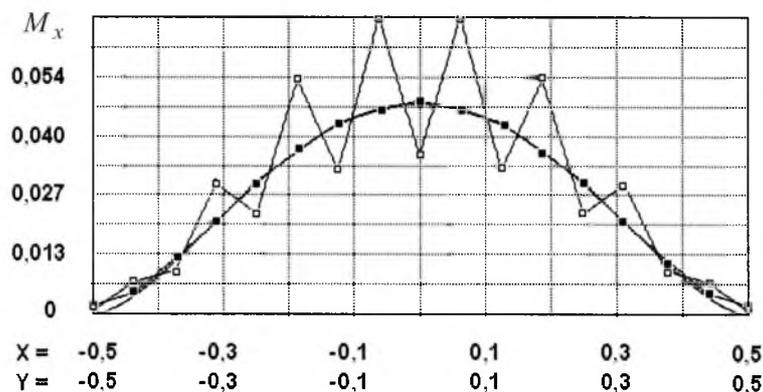


Рис. 3. Изменение изгибающего момента M_x вдоль диагонали квадратной свободно опертой пластины под действием равномерно распределенной нагрузки при использовании сетки типа “крест” 8×8 . (Здесь и на рис. 4: сплошные кривые – точное решение задачи; ■ – смешанная аппроксимация; □ – треугольник Зенкевича.)

Защемленная по всему контуру пластина. Оценивалась точность определения изгибающих моментов в центре пластины и на серединах сторон и максимального прогиба. Коэффициент Пуассона задавался равным 0,3. Для сравнения численных решений использовались аналитические формулы [1]

$$\begin{cases} (M_x)_{x=0,y=0} = (M_y)_{x=0,y=0} = \beta qa^2; \\ (M_x)_{x=a/2,y=0} = (M_y)_{x=0,y=a/2} = \gamma qa^2; \\ (v)_{x=0,y=0} = v_{\max} = \alpha qa^4/D. \end{cases} \quad (35)$$

Результаты расчетов представлены в табл. 5, 6 и на рис. 4. Ситуация полностью аналогична задаче для свободно опертой пластины и не требует комментариев.

Т а б л и ц а 5

Результаты расчетов защемленной квадратной пластины под действием равномерно распределенной нагрузки при использовании равномерной треугольной сетки

Сетка	β		γ		α	
	КМКЭ	СМКЭ	КМКЭ	СМКЭ	КМКЭ	СМКЭ
4 × 4	0,02823	0,02715	0,04140	0,04171	0,001405	0,001310
6 × 6	0,02550	0,02508	0,04508	0,04570	0,001344	0,001294
8 × 8	0,02422	0,02400	0,04650	0,04696	0,001312	0,001282
10 × 10	0,02375	0,02360	0,04750	0,04790	0,001296	0,001276
20 × 20	0,02310	0,02306	0,04945	0,04966	0,001273	0,001268
40 × 40	0,02295	0,02295	0,05042	0,05051	0,001267	0,001266
60 × 60	0,02293	0,02292	0,05073	0,05080	0,001266	0,001265
80 × 80	0,02292	0,02292	0,05086	0,05093	0,001265	0,001265
[1]	0,0231		0,0513		0,00126	

Т а б л и ц а 6

Результаты расчетов защемленной квадратной пластины под действием равномерно распределенной нагрузки при использовании сетки типа “крест”

Сетка	β		γ		α	
	КМКЭ	СМКЭ	КМКЭ	СМКЭ	КМКЭ	СМКЭ
4 × 4	0,02130	0,02590	0,05112	0,04982	0,001301	0,001295
6 × 6	0,01865	0,02408	0,04935	0,05056	0,001302	0,001278
8 × 8	0,01783	0,02355	0,04840	0,05105	0,001304	0,001273
10 × 10	0,01746	0,02332	0,04763	0,05125	0,001305	0,001270
20 × 20	0,01698	0,02300	0,04568	0,05146	0,001306	0,001266
40 × 40	0,01685	0,02293	0,04445	0,05145	0,001306	0,001265
60 × 60	0,01683	0,02292	0,04400	0,05142	0,001306	0,001265
80 × 80	0,01682	0,02292	0,04376	0,05140	0,001306	0,001265
[1]	0,0231		0,0513		0,00126	

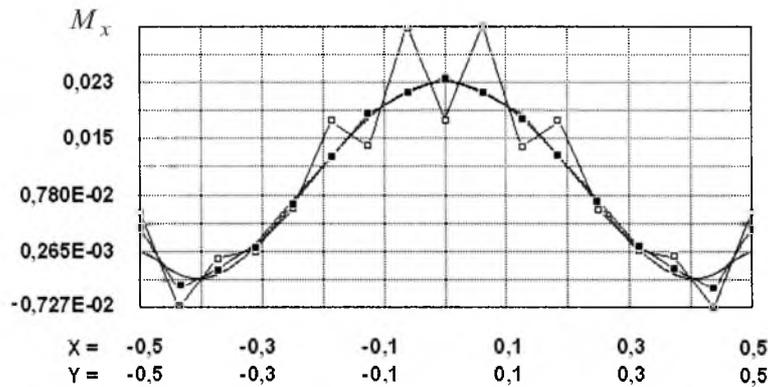


Рис. 4. Изменение изгибающего момента M_x вдоль диагонали квадратной защемленной по контуру пластины под действием равномерно распределенной нагрузки при использовании сетки типа “крест” 8 × 8.

Квадратная пластина, три края которой свободно оперты, четвертый свободен. Оценивалась точность определения максимального изгибающего момента M_x на свободном крае и в центре пластины и максимального прогиба v_{\max} на свободном крае. Коэффициент Пуассона принимался равным 0,3. Численные результаты сравнивались с аналитическим решением [1]:

$$\begin{cases} (M_x)_{x=0,y=0} = \beta qa^2; \\ (M_x)_{x=0,y=a/2} = (M_x)_{\max} = \gamma qa^2; \\ (v)_{x=0,y=a/2} = v_{\max} = \alpha qa^4/D. \end{cases} \quad (36)$$

Данные расчетов представлены в табл. 7, 8. При использовании разбиения типа “крест” смешанный метод сходится и дает близкие к аналитическому решению результаты.

Т а б л и ц а 7

Результаты расчетов равномерно нагруженной квадратной пластины, три края которой свободно оперта, четвертый свободен при использовании равномерной треугольной сетки

Сетка	β		γ		α	
	КМКЭ	СМКЭ	КМКЭ	СМКЭ	КМКЭ	СМКЭ
4 × 4	0,08545	0,08435	0,1171	0,1164	0,001244	0,001233
6 × 6	0,08198	0,08153	0,1146	0,1144	0,001266	0,001260
8 × 8	0,08113	0,08085	0,1142	0,1138	0,001276	0,001271
10 × 10	0,08065	0,08046	0,1135	0,1133	0,001279	0,001276
20 × 20	0,08006	0,08000	0,1125	0,1124	0,001284	0,001283
40 × 40	0,07991	0,07990	0,1121	0,1120	0,001285	0,001285
60 × 60	0,07988	0,07980	0,1119	0,1119	0,001285	0,001285
80 × 80	0,07988	0,07986	0,1119	0,1119	0,001285	0,001285
[1]	0,08		0,112		0,001286	

Т а б л и ц а 8

Результаты расчетов равномерно нагруженной квадратной пластины, три края которой свободно оперты, четвертый свободен при использовании сетки типа “крест”

Сетка	β		γ		α	
	КМКЭ	СМКЭ	КМКЭ	СМКЭ	КМКЭ	СМКЭ
4 × 4	0,06976	0,08288	0,1021	0,1138	0,001305	0,001268
6 × 6	0,06673	0,08110	0,0995	0,1127	0,001303	0,001277
8 × 8	0,06577	0,08055	0,0986	0,1124	0,001303	0,001281
10 × 10	0,06531	0,08030	0,0982	0,1122	0,001302	0,001282
20 × 20	0,06471	0,07996	0,0975	0,1119	0,001302	0,001285
40 × 40	0,06458	0,07988	0,0973	0,1118	0,001302	0,001285
60 × 60	0,06455	0,07986	0,0972	0,1118	0,001302	0,001285
80 × 80	0,06453	0,07986	0,0972	0,1118	0,001302	0,001285
[1]	0,08		0,112		0,001286	

Квадратная пластина, опертая в вершинах. Оценивалась точность определения изгибающих моментов в центре пластины и на серединах сторон и максимального прогиба. Коэффициент Пуассона задавался равным 0,25. Для сравнения численных решений использовались аналитические формулы [1]

$$\begin{cases} (M_x)_{x=0,y=0} = (M_y)_{x=0,y=0} = \beta qa^2; \\ (M_x)_{x=a/2,y=0} = (M_y)_{x=0,y=a/2} = \gamma qa^2; \\ (v)_{x=0,y=0} = v_{\max} = \alpha qa^4/D. \end{cases} \quad (37)$$

Т а б л и ц а 9

Результаты расчетов опертой в вершинах квадратной пластины со свободными краями под действием равномерно распределенной нагрузки при использовании равномерной треугольной сетки

Сетка	β		γ		α	
	КМКЭ	СМКЭ	КМКЭ	СМКЭ	КМКЭ	СМКЭ
4×4	0,1090	0,1124	0,1641	0,1616	0,02420	0,02415
6×6	0,1099	0,1098	0,1556	0,1560	0,02497	0,02492
8×8	0,1105	0,1106	0,1560	0,1557	0,02527	0,02523
10×10	0,1106	0,1106	0,1549	0,1548	0,02541	0,02538
20×20	0,1107	0,1107	0,1534	0,1533	0,02561	0,02559
40×40	0,1107	0,1107	0,1527	0,1526	0,02566	0,02565
60×60	0,1107	0,1107	0,1525	0,1524	0,02566	0,02566
[1]	0,1109		0,1527		0,0257	

Т а б л и ц а 10

Результаты расчетов опертой в вершинах квадратной пластины со свободными краями под действием равномерно распределенной нагрузки при использовании сетки типа “крест”

Сетка	β		γ		α	
	КМКЭ	СМКЭ	КМКЭ	СМКЭ	КМКЭ	СМКЭ
4×4	0,0851	0,1101	0,1401	0,1532	0,02680	0,02530
6×6	0,0843	0,1105	0,1381	0,1533	0,02666	0,02548
8×8	0,0840	0,1106	0,1369	0,1530	0,02660	0,02556
10×10	0,0838	0,1107	0,1362	0,1528	0,02659	0,02560
20×20	0,0836	0,1107	0,1351	0,1524	0,02656	0,02565
40×40	0,0835	0,1107	0,1346	0,1522	0,02655	0,02566
60×60	0,0835	0,1107	0,1344	0,1521	0,02655	0,02567
[1]	0,1109		0,1527		0,0257	

Результаты расчетов представлены в табл. 9, 10.

Свободные колебания опертой и защемленной квадратной пластины. Определялись первые четыре собственные частоты поперечных колебаний квадратной пластины. Коэффициент Пуассона принимался равным 0,3. Численные результаты сравнивались с аналитическим решением [10, 11]:

$$p_k = \frac{\pi\omega_k}{a^2} \sqrt{\frac{D}{\rho t}}, \quad k = 1, 2, 3, 4. \quad (38)$$

Результаты расчетов представлены в табл. 11–14 для двух вариантов разбиения пластины на треугольные элементы. При использовании сетки типа “крест” смешанный метод сходится и дает более точные значения частот p_k по сравнению с обычным треугольником Зенкевича.

Т а б л и ц а 1 1

Результаты расчетов собственных частот колебаний свободно опертой квадратной пластины при использовании равномерной треугольной сетки

Сетка	ω_1		ω_2		ω_3		ω_4	
	КМКЭ	СМКЭ	КМКЭ	СМКЭ	КМКЭ	СМКЭ	КМКЭ	СМКЭ
4×4	3,02927	3,09001	7,41289	7,62941	11,4469	11,9088	15,3072	15,4983
6×6	3,08477	3,11722	7,59887	7,74452	11,8838	12,2297	15,3842	15,6394
8×8	3,10739	3,12755	7,69377	7,78918	12,1264	12,3611	15,4630	15,6566
10×10	3,11868	3,13250	7,74527	7,81134	12,2639	12,4294	15,5262	15,6687
20×20	3,13490	3,13929	7,82356	7,84287	12,4805	12,5300	15,6512	15,6953
40×40	3,13950	3,14101	7,84558	7,85117	12,5427	12,5571	15,6923	15,7046
60×60	3,14048	3,14133	7,84995	7,85273	12,5551	12,5623	15,7006	15,7064
80×80	3,14086	3,14145	7,85154	7,85328	12,5596	12,5641	15,7036	15,7071
100×100	3,14106	3,14150	7,85320	7,85353	12,5618	12,5649	15,7051	15,7074
120×120	3,14118	3,14152	7,85257	7,85367	12,5630	12,5653	15,7059	15,7076
140×140	3,14125	3,14154	7,85302	7,85375	12,5638	12,5656	15,7064	15,7077
160×160	3,14131	3,14155	7,85321	7,85380	12,5643	12,5658	15,7067	15,7078
[10]	3,141593		7,853982		12,56637		15,70796	

Т а б л и ц а 1 2

Результаты расчетов собственных частот колебаний свободно опертой квадратной пластины при использовании сетки типа “крест”

Сетка	ω_1		ω_2		ω_3		ω_4	
	КМКЭ	СМКЭ	КМКЭ	СМКЭ	КМКЭ	СМКЭ	КМКЭ	СМКЭ
4×4	3,08683	3,13266	7,58134	7,76652	12,0137	12,2735	14,6718	15,3277
6×6	3,09172	3,13871	7,67562	7,82210	12,3306	12,5049	15,1178	15,5543
8×8	3,09211	3,14010	7,70029	7,83644	12,3636	12,5403	15,2605	15,6183
10×10	3,09130	3,14066	7,71010	7,84270	12,3685	12,5512	15,3283	15,6485
20×20	3,09207	3,14136	7,72521	7,85108	12,3687	12,5627	15,4252	15,6920
40×40	3,09205	3,14153	7,72886	7,85325	12,3683	12,5655	15,4513	15,7039
60×60	3,09204	3,14156	7,72955	7,85365	12,3682	12,5660	15,4562	15,7061
80×80	3,09204	3,14158	7,72979	7,85379	12,3682	12,5661	15,4580	15,7069
100×100	3,09204	3,14158	7,72990	7,85386	12,3682	12,5662	15,4588	15,7073
120×120	3,09204	3,14159	7,72997	7,85390	12,3682	12,5663	15,4592	15,7075
[10]	3,141593		7,853982		12,56637		15,70796	

Т а б л и ц а 1 3

Результаты расчетов собственных частот колебаний заземленной по контуру квадратной пластины при использовании равномерной треугольной сетки

Сетка	ω_1		ω_2		ω_3		ω_4	
	КМКЭ	СМКЭ	КМКЭ	СМКЭ	КМКЭ	СМКЭ	КМКЭ	СМКЭ
1	2	3	4	5	6	7	8	9
4×4	5,47619	5,64774	11,2338	11,5345	15,9912	16,7864	20,6580	21,6727

1	2	3	4	5	6	7	8	9
6×6	5,56835	5,67153	11,3118	11,5460	16,1677	16,7623	20,5179	21,0319
8×8	5,62623	5,69193	11,4111	11,5887	16,4640	16,8961	20,5440	20,9365
10×10	5,65854	5,70347	11,4857	11,6167	16,6758	16,9926	20,6207	20,9173
20×20	5,70825	5,72089	11,6226	11,6631	17,0596	17,1581	20,8313	20,9272
40×40	5,72228	5,72561	11,6655	11,6764	17,1797	17,2064	20,9113	20,9375
60×60	5,72499	5,72650	11,6740	11,6789	17,2035	17,2157	20,9279	20,9398
80×80	5,72596	5,72681	11,6770	11,6798	17,2120	17,2190	20,9338	20,9406
100×100	5,72641	5,72696	11,6784	11,6803	17,2160	17,2205	20,9366	20,9410
120×120	5,72666	5,72704	11,6792	11,6805	17,2182	17,2213	20,9382	20,9412
140×140	5,72681	5,72709	11,6797	11,6806	17,2195	17,2218	20,9391	20,9414
160×160	5,72690	5,72712	11,6800	11,6807	17,2204	17,2221	20,9397	20,9415
[11]	5,727123		11,68201		17,22378		21,03767	

Т а б л и ц а 1 4

Результаты расчетов собственных частот колебаний защемленной по контуру квадратной пластины при использовании сетки типа “крест”

Сетка	ω_1		ω_2		ω_3		ω_4	
	КМКЭ	СМКЭ	КМКЭ	СМКЭ	КМКЭ	СМКЭ	КМКЭ	СМКЭ
4×4	5,58219	5,64847	11,1540	11,4048	16,7538	16,9148	19,4641	20,1001
6×6	5,61752	5,69286	11,3319	11,5439	16,8971	17,0502	19,9491	20,5342
8×8	5,62561	5,70743	11,3994	11,6001	16,9307	17,1208	20,1934	20,6881
10×10	5,62900	5,71416	11,4316	11,6275	16,9375	17,1546	20,3254	20,7694
20×20	5,63430	5,72364	11,4784	11,6665	16,9439	17,2033	20,5309	20,8940
40×40	5,63613	5,72627	11,4918	11,6772	16,9486	17,2177	20,5903	20,9293
60×60	5,63653	5,72679	11,4945	11,6793	16,9501	17,2207	20,6019	20,9361
80×80	5,63668	5,72698	11,4955	11,6800	16,9507	17,2217	20,6060	20,9386
100×100	5,63675	5,72706	11,4959	11,6804	16,9510	17,2223	20,6080	20,9397
120×120	5,63679	5,72711	11,4962	11,6806	16,9511	17,2225	20,6090	20,9403
[11]	5,727123		11,68201		17,22378		21,03767	

Заключение. Приведенный вариант смешанной аппроксимации прогиба и угла поворота нормали срединной поверхности пластины удовлетворяет критерию “постоянства деформаций” и, следовательно, выдерживает “кусочное” тестирование. При использовании равномерной треугольной сетки смешанная аппроксимация и треугольник Зенкевича приводят к близким результатам, которые при сгущении сетки сходятся к аналитическому решению задачи. Для неравномерных сеток и разбиений типа “крест” треугольник Зенкевича дает приемлемые результаты только для прогиба и не гарантирует сходимости численного решения для изгибающих моментов. Смешанный метод обеспечивает сходимость при сгущении сетки как прогиба пластины, так и изгибающих моментов, точность вычисления которых прак-

тически не зависит от способа разбиения пластины на треугольные элементы. В задачах о свободных колебаниях пластин смешанный метод позволяет получить более точные значения собственных частот по сравнению с обычным треугольником Зенкевича.

Резюме

Для розв'язку задачі про вигин пластины побудовано спеціальний тривузловий трикутний скінченний елемент на основі трикутника Зенкевича. Використовується змішана апроксимація для прогину та кутів повороту пластины. Показано, що зі зменшенням розмірів трикутників числовий розв'язок збігається з точним. Наведено результати числового аналізу збіжності і точності розв'язання ряду контрольних задач.

1. Тимошенко С. П., Войновский-Кригер С. Пластинки и оболочки. – М.: Наука, 1966. – 635 с.
2. Zienkiewicz O. C. and Taylor R. L. The Finite Element Method. – Dutterworth-Heinemann; Oxford; Auckland; Boston; Johannesburg; Melbourne; New Delhi (5th ed.). – 2000. – 1482 p.
3. Ciarlet P. The Finite Element Method for Elliptic Problems. – Amsterdam; New York; Oxford, 1978. – 512 p.
4. Bergan P. G. and Hanssen L. A new approach for deriving “good” element stiffness matrices // Mathematics of Finite Elements and Applications / Ed. J. R. Whiteman. – London: Academic Press, 1977. – P. 483 – 498.
5. Bergan P. G. and Nygard M. K. Finite elements with increased freedom in choosing shape functions // Int. J. Num. Eng. – 1984. – **20**. – P. 643 – 664.
6. Felippa C. A. and Bergan P. G. A triangular plate bending element based on energy orthogonal free formulation // Comp. Meth. Appl. Mech. Eng. – 1987. – **61**. – P. 129 – 160.
7. Specht B. Modified shape functions for the three node plate bending element passing the patch test // Int. J. Num. Mech. Eng. – 1988. – **26**. – P. 705 – 715.
8. Оганесян Л. А., Руховец Л. А. Вариационно-разностные методы решения эллиптических уравнений. – Ереван: Изд-во АН АрмССР, 1979. – 235 с.
9. Чирков А. Ю. Смешанная схема метода конечных элементов для решения краевых задач теории упругости и малых упругопластических деформаций. – Киев: Изд. Ин-та пробл. прочности, 2003. – 250 с.
10. Бабаков И. М. Теория колебаний. – М.: Наука, 1968. – 559 с.
11. Биргер И. А., Пановко Я. Г. Прочность, устойчивость, колебания. – М.: Машиностроение, 1968. – Т. 3. – 567 с.

Поступила 14. 04. 2003