УДК 539.4:620.17

Про перехід від моделі до натурного тіла при фотопружному моделюванні задач механіки ортотропних тіл

М. П. Малежик[а], В. І. Зубов[б]

[а] Інститут геофізики ім. С. І. Субботіна НАН України, Київ, Україна

[б] Інститут проблем міцності ім. Г. С. Писаренка НАН України, Київ, Україна

Пропонується спосіб перерахування динамічних напружень із фотопружної моделі на натурне тіло в плоских задачах механіки ортотропних тіл. Для оцінки способу проводиться перерахування напружень у задачі, що має теоретичний розв'язок.

Ключові слова: поляризаційно-оптичний метод, напружено-деформований стан, метод динамічної фотопружності, модель, хвиля, натурне тіло.

Вступ. Поляризаційно-оптичний метод (ПО-метод) дозволяє визначити динамічний напружено-деформований стан у плоских моделях з оптично-чутливого ортотропного матеріалу [1]. У зв'язку з цим виникає питання про ефективність та доцільність застосування цього методу для розв'язування динамічних задач із наступним переходом від напружень у моделі до напружень у деталі чи конструкції з натурного конструкційного матеріалу.

Отримання співвідношень для перерахування напружень із моделі на натурне тіло. Розглянемо деякі загальні принципи моделювання в методі динамічної фотопружності. При моделюванні натурного середовища та побудові моделі насамперед необхідно вибрати матеріал для моделі. У цьому випадку задаються три масштаби: $\rho_0 = \sigma_0 / \alpha_0^2$; $\alpha_0 = l_0 / t_0$; $\gamma_0 = \alpha_0^2 / l_0$.

Геометричний масштаб l_0 і масштаб часу t_0 визначаються однозначно, що призводить до ускладнення при створенні потрібного динамічного навантаження і необхідного для методу фотопружності розміру моделі. Щоб уникнути цього, потрібно довільно задавати геометричний масштаб l_0, тобто він має бути фіксованим, або, використовуючи принцип суперпозиції, дослідити окремо напружений стан середовища від дії динамічного навантаження та власної ваги моделі.

Розглянемо деякі критерії подібності. Якщо $(C_p / a_0)_{\text{н}} = (C_p / a_0)_{\text{м}}$ поділити на $(C_s / a_0)_{\text{н}} = (C_s / a_0)_{\text{м}}$, отримаємо рівність відношень швидкостей поздовжніх хвиль до швидкостей поперечних хвиль у натурному тілі та моделі:

$$\left(\frac{C_p}{C_s}\right)_{\text{н}} = \left(\frac{C_p}{C_s}\right)_{\text{м}}. \tag{1}$$

Критерій подібності (1) передбачає рівність коефіцієнтів Пуассона ν для натурного і модельного середовища:

$$\nu_{\text{н}} = \nu_{\text{м}}. \tag{2}$$

Залежність (2) справедлива для випадку, коли натурне і модельне середовище знаходяться в однакових умовах напруженого стану. Зазначимо, що фотопружне моделювання динамічних напружень проводиться на плоских моделях, тобто в умовах плоского напруженого стану. Тоді виконання рівності (1) призведе до умови

$$\nu_{\text{н}} = \frac{\nu_{\text{м}}}{1+\nu_{\text{м}}}. \qquad (3)$$

Модулі пружності матеріалів натурного тіла і моделі повинні бути зв'язані співвідношенням

$$E_{\text{н}} = \frac{E_{\text{м}}(1+2\nu_{\text{м}})}{(1-\nu_{\text{м}})^2}. \qquad (4)$$

Оскільки згідно із загальним критерієм при моделюванні деформацій [2, 3] відповідні зміщення в усіх точках змінюються пропорційно до відповідних геометричних розмірів, деформації в моделі мають бути рівними деформаціям у натурній деталі:

$$\varepsilon_{\text{м}} = \varepsilon_{\text{н}}. \qquad (5)$$

Практично виконати умову (5) при моделюванні у більшості випадків не вдається, і масштаб швидкостей точок моделі доводиться вибирати на основі виразу

$$V_0 = \frac{l_0}{t_0}\varepsilon_0, \qquad (6)$$

де V_0 – масштаб швидкості точок моделі.

Виразимо масштаб швидкостей V_0 у вигляді $V_0 = u_0/t_0$, де u_0 – масштаб зміщень, і підставимо його у вираз (6):

$$\frac{u_0}{t_0} = \frac{l_0\varepsilon_0}{t_0}, \qquad \text{або} \qquad u_0 = l_0\varepsilon_0. \qquad (7)$$

Отже, при розширеній подібності масштаб зміщень визначається не тільки геометричним масштабом, а й масштабом деформацій.

Складність задачі моделювання напруженого стану анізотропних тіл у значній мірі пояснюється залежністю напруженого стану від пружних сталих [4].

Припустимо, що є два однорідних тіла, виготовлених із різних матеріалів. Тіла знаходяться в узагальненому плоскому напруженому стані і мають однакові форму, розміри та навантаження.

Розглянемо два варіанти задачі.

Варіант 1. Область пластини однозв'язна і багатозв'язна, при цьому навантаження таке, що на будь-якому внутрішньому контурі $X_k = Y_k = 0$, де X_k, Y_k – проекції головного вектора заданого навантаження на k-му контурі, віднесені до одиниці довжини твірної:

$$X_k = -\int_{L_k} (\sigma_x dy - \sigma_{xy} dx), \quad Y_k = \int_{L_k} (\sigma_y dx - \sigma_{xy} dy). \tag{8}$$

Варіант 2. Область багатозв'язна, але навантаження таке, що відмічені вище умови не виконуються. Отримаємо умови, згідно з якими повинні бути зв'язані пружні сталі S_{ij} двох тіл, щоб напруження σ_x, σ_y, σ_{xy} були однакові. Відомо [5], що функція напружень Ері Φ у плоскій задачі теорії пружності ортотропного тіла задовольняє рівняння сумісності деформацій:

$$S_{22}\frac{\partial^4\Phi}{\partial x^4} - 2S_{26}\frac{\partial^4\Phi}{\partial x^3\partial y} + (2S_{12}+S_{66})\frac{\partial^4\Phi}{\partial x^2\partial y^2} - 2S_{16}\frac{\partial^4\Phi}{\partial x\partial y} + S_{11}\frac{\partial^4\Phi}{\partial y^4} = 0 \tag{9}$$

та граничні умови у напруженнях:

$$\frac{d}{dS}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right) = \mp X, \qquad \frac{d}{dS}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right) = \pm\widetilde{Y}. \tag{10}$$

Для багатозв'язної області повинні виконуватися умови однозначності переміщень, які через деформації виражаються наступним чином:

$$\int_{L_k}\left[\left(\frac{\partial\varepsilon_x}{\partial y} - \frac{\partial\gamma_{xy}}{2\partial x}\right)dx - \left(\frac{\partial\varepsilon_y}{\partial x} - \frac{\partial\gamma_{xy}}{2\partial y}\right)dy\right] = 0; \tag{11}$$

$$\int_{L_k}\left\{\varepsilon_x dx + \frac{1}{2}\gamma_{xy}dy - y\left[\left(\frac{\partial\varepsilon_x}{\partial y} - \frac{\partial\gamma_{xy}}{2\partial x}\right)dx - \left(\frac{\partial\varepsilon_y}{\partial x} - \frac{\partial\gamma_{xy}}{2\partial y}\right)dy\right]\right\} = 0; \tag{12}$$

$$\int_{L_k}\left\{\varepsilon_y dy + \frac{1}{2}\gamma_{xy}dx + x\left[\left(\frac{\partial\varepsilon_x}{\partial y} - \frac{\partial\gamma_{xy}}{2dx}\right)dx - \left(\frac{\partial\varepsilon_y}{\partial x} - \frac{\partial\gamma_{xy}}{2\partial y}\right)dy\right]\right\} = 0. \tag{13}$$

Виразимо в (11)–(13) деформації через напруження із закону Гука, додамо і вирахуємо з лівих частин (12) величину $\int_{L_k}\frac{S_{66}}{2}\sigma_y dx$, а з (13) – величину $\int_{L_k}\frac{S_{66}}{2}\sigma_x dy$ і з урахуванням (9) отримаємо

$$\int_{L_k} d\omega_z = 0; \tag{14}$$

$$\int_{L_k}\left\{\left[S_{11}\sigma_x + \left(S_{12} + \frac{S_{66}}{2}\right)\sigma_y + S_{16}\sigma_{xy}\right]dx + \right.$$

$$+\left(\frac{S_{16}\sigma_x}{2}+\frac{S_{26}\sigma_y}{2}\right)dy - yd\omega_z\Bigg\} = Y_k\frac{1}{2}S_{66}; \tag{15}$$

$$\int\limits_{L_k}\Bigg\{\left[S_{22}\sigma_y+\left(S_{12}+\frac{S_{66}}{2}\right)\sigma_x + S_{26}\sigma_{xy}\right]dy +$$

$$+\left(\frac{S_{16}\sigma_x}{2}+\frac{S_{26}\sigma_y}{2}\right)dx + xd\omega_z\Bigg\} = -X_k\frac{1}{2}S_{66}, \tag{16}$$

де

$$d\omega_z = \int\limits_{L_k}\Bigg\{\left[S_{11}\frac{\partial\sigma_x}{\partial y}+\left(S_{12}+\frac{S_{66}}{2}\right)\frac{\partial\sigma_y}{y}-\frac{1}{2}S_{16}\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}-\frac{1}{2}S_{26}\frac{\partial\sigma_y}{\partial x}\right]dx -$$

$$-\left[S_{22}\frac{\partial\sigma_y}{\partial x}+\left(S_{12}+\frac{S_{66}}{2}\right)\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}-\frac{1}{2}S_{26}\frac{\partial\sigma_y}{x}-\frac{1}{2}S_{16}\frac{\partial\sigma_x}{\partial y}\right]dy\Bigg\} = 0.$$

При виведенні рівнянь (14)–(16) на основі рівнянь рівноваги плоскої задачі проводилась заміна $\dfrac{\partial\sigma_{xy}}{\partial x}$ на $-\dfrac{\partial\sigma_y}{\partial y}$ та $\dfrac{\partial\sigma_{xy}}{\partial y}$ на $-\dfrac{\partial\sigma_x}{\partial x}$.

Поділимо ліві і праві частини рівнянь (10), (14)–(16) на одну зі сталих, наприклад S_{11}, і отримаємо, що при $X_k = Y_k = 0$ напруження σ_x, σ_y, σ_{xy} залежать від чотирьох безрозмірних сталих S_{22}/S_{11}, S_{26}/S_{11}, S_{16}/S_{11}, $(2S_{16}+S_{66})/S_{11}$, при $X_k \neq Y_k \neq 0$ додається ще одна безрозмірна стала величина S_{66}/S_{11}.

У системі координат, суміщеній з головними напрямками ортотропії $(S_{16} = S_{26} = 0)$, для збігу напружень σ_x, σ_y, σ_{xy} у випадку $X_k = 0$, $Y_k = 0$ необхідно і достатньо, щоб збіглися головні напрямки обох тіл і дві безрозмірні сталі E_1/E_2 і $E_1/G_{12} - 2\nu_1$ одного тіла дорівнювали відповідним безрозмірним сталим іншого тіла. У випадку $X_k \neq 0$, $Y_k \neq 0$ повинна ще додатково збігатися безрозмірна стала E_1/G_{12}. Як бачимо, підібрати матеріал для моделі за відомими значеннями пружних сталих натурного матеріалу так, щоб виконувалися рівності вищенаведених сталих, досить важко. Вибір модельних оптично-чутливих матеріалів ще більш складний, оскільки вимоги до прозорості матеріалу обмежуються кількістю і властивостями армуючого елемента. Це обмежує варіювання величинами пружних констант.

Розглянемо спосіб перерахунку напружень із моделі на натурне тіло, що не накладає жорстких обмежень на властивості модельних матеріалів. Використаємо комплексні параметри μ_1, μ_2, μ_1', μ_2' [5], що характеризують анізотропію тіла і є основними величинами, від яких залежить розподіл напружень у плоских задачах ортотропної теорії пружності. Припустимо, що область моделі $S_{\text{м}}$ подібна до області натурного тіла $S_{\text{н}}$, тобто всі лінійні розміри l в області $S_{\text{м}}$ в порівнянні з тими ж розмірами в області $S_{\text{н}}$ змінено в a раз (геометрична подібність):

$$L_{\text{н}} = al_{\text{м}}. \tag{17}$$

Окрім того, зусилля, що прикладені до контурів моделі, подібні до таких, що прикладені до контурів натурного тіла (силова подібність):

$$\frac{P_{\text{н}}}{P_{\text{м}}} = \frac{Q_{\text{н}}}{Q_{\text{м}}} = \frac{R_{\text{н}}}{R_{\text{м}}} = ... = \beta. \tag{18}$$

Загальний вираз для напружень у плоскому ортотропному тілі має наступний вигляд [3]:

$$T = \frac{1}{h}\left[\frac{P}{\lambda}\varphi(\mu) f_1\left(\frac{x}{l_1}, \frac{y}{l_2}\right) + \frac{Q}{\lambda_2}\psi(\mu) f_2\left(\frac{x}{l_3}, \frac{y}{l_4}\right) + \frac{R}{\lambda_3} f_3\left(\frac{x}{l_5}, \frac{y}{l_6}\right)\right], \tag{19}$$

де P, Q, R – множники, що мають розмірність сили; f_1, f_2, f_3 – безрозмірні функції; l_i, λ_i – величини, що мають розмірність довжини; $\varphi(\mu)$, $\psi(\mu)$ – дійсні функції комплексних параметрів; h – товщина.

Виразимо напруження в моделях, що задовольняють умови силової і геометричної подібності по відношенню до натурного тіла, у вигляді

$$T_i = \frac{1}{h_i}\left[\frac{P_i}{\lambda_{1i}}\varphi_i(\mu) f_1\left(\frac{x_1}{l_{1i}}, \frac{y_i}{l_{2i}}\right) + \frac{Q_i}{\lambda_{2i}}\psi_i(\mu) f_2\left(\frac{x_i}{l_{3i}}, \frac{y_i}{l_{4i}}\right) + \frac{R_i}{\lambda_{3i}} f_3\left(\frac{x_i}{l_{5i}}, \frac{y_i}{l_{6i}}\right)\right], \tag{20}$$

де T_i, $\varphi_i(\mu)$, $\psi_i(\mu)$ – відомі величини; безрозмірні функції f_1, f_2, f_3 мають такий же вигляд, як і в (19).

З урахуванням умов геометричної (17) та силової (18) подібностей (19) запишемо у вигляді

$$T_i = \frac{a_i}{h_i \beta_i}\left[\varphi_i(\mu)\frac{P}{\lambda_1} f_1\left(\frac{x}{l_1}, \frac{x}{l_2}\right) + \psi_i(\mu)\frac{Q}{\lambda_2}\left(\frac{x}{l_3}, \frac{x}{l_4}\right) + \frac{R}{\lambda_3} f_3\left(\frac{x}{l_5}, \frac{x}{l_6}\right)\right], \tag{21}$$

де $\frac{P}{\lambda_1} f_1$, $\frac{Q}{\lambda_2} f_2$, $\frac{R}{\lambda_3} f_3$ – невідомі величини у натурному тілі, що є складовими виразів (19).

Якщо з експерименту відомі напруження T_i в трьох геометрично подібних і в аналогічно навантажених моделях, що виготовлені з конструктивно-ортотропних матеріалів і мають різні пружні сталі, то з (21) отримаємо три рівняння для визначення трьох невідомих величин: $\frac{P}{\lambda_1} f_1$, $\frac{Q}{\lambda_2} f_2$, $\frac{R}{\lambda_3} f_3$.

Рівняння (21) запишемо для трьох моделей. Розв’язок їх відносно невідомих дає

$$\frac{Pf_1}{\lambda_1}=\frac{(T_1k_1-T_2k_2)(\psi_1-\psi_2)-(T_1k_1-T_3k_3)(\psi_1-\psi_2)}{(\varphi_1-\varphi_2)(\varphi_1-\varphi_3)-(\varphi_1-\varphi_3)(\varphi_1-\varphi_2)}; \qquad (22)$$

$$\frac{Qf_2}{\lambda_2}=\frac{(T_1k_1-T_2k_2)(\psi_1-\psi_3)-(T_1k_1-T_3k_3)(\psi_1-\psi_2)}{(\varphi_1-\varphi_2)(\varphi_1-\varphi_3)-(\varphi_1-\varphi_3)(\varphi_1-\varphi_2)}; \qquad (23)$$

$$\frac{Rf_3}{\lambda_3}=T_1k_1-\varphi_1\frac{Pf_1}{\lambda_1}-\psi_1\frac{Qf_2}{\lambda_2}, \qquad (24)$$

де $k_i=\beta_i h_i/a_i$ – коефіцієнти, визначаються за відомими значеннями силової β_i і геометричної a_i подібності; T_i – напруження в моделях, визначаються експериментально методом динамічної фотопружності; φ_i, ψ_i – функції комплексних параметрів, визначаються за відомими величинами пружних констант для моделей.

Точний вираз функцій $\varphi_i(\mu), \psi_i(\mu)$ для даного класу задач або конкретної задачі невідомий. Тому ці функції будемо задавати наближено. Аналіз відомих теоретичних розв'язків деяких задач [5] показує, що у вирази для напружень входять комбінації комплексних параметрів $\mu_1+\mu_2$, $\mu_1\mu_2$, $\mu_1^2+\mu_2^2$, їх добутки, а також коефіцієнти Пуассона. Запишемо функції $\varphi_i(\mu), \psi_i(\mu)$ у вигляді

$$\begin{aligned}\varphi_i(\mu)&=1+i(\mu_1+\mu_2)+i^2(\mu_1^2+\mu_2^2)+i^2\mu_1\mu_2+\\&+\nu_2 i^2\mu_1\mu_2(1-i\mu_1-i\mu_2);\\ \psi_i(\mu)&=1+\frac{1}{i(\mu_1+\mu_2)}+\frac{1}{i^2(\mu_1^2+\mu_2^2)}+\frac{1}{i^2\mu_1\mu_2}+\frac{\nu_2}{\nu_1}i^2\mu_1\mu_2.\end{aligned} \qquad (25)$$

Слід зауважити, що вирази (25) для функцій $\varphi_i(\mu)$ і $\psi_i(\mu)$ не єдині. Можна побудувати інші вирази, наприклад, як це зроблено в роботі [6].

Проведемо перерахунок динамічних напружень із моделей на натурне тіло в задачі, що має теоретичний розв'язок для випадку статичного навантаження. Пластина з центральним коловим отвором навантажена з двох країв імпульсом розтягу. Досліджувалися три моделі, що виготовлені з оптично-чутливих анізотропних матеріалів із різними механічними та оптичними властивостями.

Модель 1: $E_1=4{,}30\cdot10^3$ МПа; $E_2=6{,}08\cdot10^3$ МПа; $\nu_{12}=0{,}33$; $\nu_{21}=0{,}47$; $G=1{,}79\cdot10^3$ МПа. Оптичні сталі: $\sigma_{d1}=25\cdot10^{-1}$ МПа·см/смуга; $\sigma_{d2}=41\cdot10^{-1}$ МПа·см/смуга; $\varepsilon_d=4{,}95\cdot10^{-4}$ см/смуга; $\mu_1=1{,}91$; $\mu_2=0{,}67$.

Модель 2: $E_1=6{,}70\cdot10^3$ МПа; $E_2=8{,}43\cdot10^3$ МПа; $\nu_{12}=0{,}31$; $\nu_{21}=0{,}39$; $G=1{,}56\cdot10^3$ МПа. Оптичні сталі: $\sigma_{d1}=17\cdot10^{-1}$ МПа·см/смуга; $\sigma_{d2}=32\cdot10^{-1}$ МПа·см/смуга; $\varepsilon_d=3{,}98\cdot10^{-4}$ см/смуга; $\mu_1=2{,}08$; $\mu_2=0{,}54$.

Модель 3: $E_1 = 4{,}38 \cdot 10^3$ МПа; $E_2 = 6{,}40 \cdot 10^3$ МПа; $\nu_{12} = 0{,}26$; $\nu_{21} = 0{,}37$; $G = 1{,}4 \cdot 10^3$ МПа. Оптичні сталі: $\sigma_{d1} = 12 \cdot 10^{-1}$ МПа · см/смуга; $\sigma_{d2} = 21 \cdot 10^{-1}$ МПа · см/смуга; $\varepsilon_d = 4{,}55 \cdot 10^{-4}$ см/смуга; $\mu_1 = 2{,}21$; $\mu_2 = 0{,}57$.

Натурне тіло виготовлено з ортотропного матеріалу, який має наступні механічні характеристики: $E_1 = E_2 = 14 \cdot 10^3$ МПа; $\nu_{12} = \nu_{21} = 0{,}47$; $G = 1{,}4 \cdot 10^3$ МПа; $\mu_1 = 3{,}1$; $\mu_2 = 1{,}1$.

Підставимо в формулу (25) значення комплексних параметрів і визначимо $\varphi_i(\mu)$ та $\psi_i(\mu)$ для кожної моделі, а також для натурного тіла. Припустимо, що вони мають однакові геометричні розміри, а імпульсне навантаження, прикладене до натурного тіла, удвічі більше, ніж у кожній з моделей, тобто $k = 2$.

В таблиці наведено величини напружень для деяких точок на контурі отвору, що визначені в трьох моделях за формулами (9) та (10). Там же представлено результати перерахунку з моделі на натурне тіло з використанням формул (19) та (22)–(24), а також значення напружень у натурній пластині, визначені за формулою Лехницького [5] для статичного розтягу.

Величини напружень для деяких точок на контурі отвору, визначені в трьох моделях

θ, град	$\sigma_\theta / \sigma_{\text{ср}} = T$				
	T_1	T_2	T_3	$T_{\text{н}}$	
				за формулами (19) та (22)–(24)	статичні значення [5]
0	−0,92	−0,88	−0,82	−0,35	−0,29
15	−0,65	−0,58	−0,59	−0,21	−0,20
30	0,05	0,04	−0,02	−0,15	−0,15
45	0,57	0,73	0,72	0,16	0,15
60	1,61	1,61	1,69	0,79	0,92
75	3,05	2,82	2,85	2,94	2,99
90	3,75	3,62	3,50	5,20	5,20

Висновки. Запропонований спосіб перерахування динамічних напружень із моделі на натурне тіло дозволяє з достатньою для інженерних розрахунків точністю визначати їх в натурних деталях з ортотропних матеріалів. Для цього необхідно знати напруження та динамічне навантаження в трьох геометрично подібних моделях. Ще одна важлива умова: динамічне навантаження моделей має бути також подібним. Щодо останньої умови, то існують певні складності у відтворенні імпульсного навантаження, якщо використовувати вибухові засоби. Найбільше ця умова задовольняється при використанні магнітно-індуктивного пристрою.

Резюме

Предлагается способ пересчета динамических напряжений с фотоупругой модели на натурное тело в плоских задачах механики ортотропных тел. Для

оценки способа проводится пересчет напряжений в задаче, имеющей теоретическое решение.

1. *Малежик М. П.* Визначення динамічних напружень в конструктивно-анізотропних тілах поляризаційно-оптичним методом // Доп. НАН України. – 2002. – № 10. – С. 44 – 48.
2. *Седов Л. И.* Методы подобия размерности в механике. – М.: Наука, 1967. – 280 с.
3. *Варданян Г. С.* Основы теории подобия и анализа размерности. – М.: Изд-во МИСИ, 1977. – 121 с.
4. *Журба В. Г.*, *Мишин В. В.* Определение оптических постоянных по деформациям–напряжениям при динамическом нагружении // Изв. Днепропетр. горного ин-та. – 1967. – № 48. – С. 147 – 151.
5. *Лехницкий Г. С.* Анизотропные пластинки. – Л.: Гостехиздат, 1957. – 300 с.
6. *Нетребко В. П.*, *Васильченко И. П.* Поляризационные методы механики композиционных материалов. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1990. – 160 с.

Поступила 28. 03. 2003