

## **Анализ деформацийгиба трубы на основе смешанного подхода. Сообщение 2. Пространственный изгиб с учетом внутреннего давления**

**И. В. Орыняк, С. А. Радченко**

Институт проблем прочности им. Г. С. Писаренко НАН Украины, Киев, Украина

*Рассмотрена задача об определении напряженного состояния и податливостигиба трубы, находящегося под одновременным действием внутреннего давления и изгибающих моментов, приложенных как в плоскости, так и из плоскости его кривизны. Задача относится к геометрически нелинейным, когда увеличение внутреннего давления приводит к уменьшению напряжений оваллизации от изгибающих моментов. Предложен оригинальный метод учета давления, основанный на значительном превышении окружными напряжениями от давления таковых от изгибающего момента. Получена общая система уравнений для всех компонент перемещений и напряжений. Настоящие результаты сопоставляются с приведенными в литературных источниках.*

**Ключевые слова:** гиб трубы, изгибающий момент, напряженное состояние, податливость, внутреннее давление.

**Введение.** Внутреннее давление часто является основным параметром, который служит определяющим при выборе материала и размеровгиба при проектировании трубопроводов. Расчет напряженного состояниягиба трубы кругового сечения при действии только внутреннего давления – достаточно тривиальная задача. В этом случае давление уравнивается только осевой и окружной силами, и напряженное состояние – безмоментное. Поэтому, с одной стороны, рассмотрение совместного влияния внешних изгибающих моментов и давления не должно приводить к каким-то дополнительным трудностям, поскольку в соответствии с принципом суперпозиции необходимо сложить два решения.

С другой стороны, овализационные перемещения от внешних моментов являются достаточно большими, и пренебрежение их влиянием на изменение геометрии сечения (в нашем случае изменяется кривизна поперечного сечения) при действии внутреннего давления может приводить к существенным ошибкам. Данная задача относится к геометрически нелинейным задачам, для решения которых применяются специфические методы.

Исследованийгиба трубы при совместном действии давления и изгибающего момента [1, 2] значительно меньше, чем при пространственном изгибе. Так в [1, 2] установлены коэффициенты податливости на основе минимизации потенциальной энергии с применением гипотезы Кармана. В [3] при решении данной задачи также использовалось допущение о нерастяжимости срединной поверхности в окружном направлении, в [4, 5] аналитические решения получены с помощью общего подхода Мейснера. Современные нормы [6, 7], регламентирующие коэффициенты увеличения податливости, основаны на решениях, приведенных в [1, 3].

Цель настоящего сообщения состоит в развитии общих методов, разработанных ранее [8] для анализа совместного действия давления и изгибающего момента в плоскости и из плоскости гiba трубы. При этом используются геометрические и физические обозначения, приведенные в сообщении 1 [8].

**1. Влияние внутреннего давления.** В качестве внешнего нагружения рассматривается действие только внутреннего давления:

$$P = \frac{t}{R} \bar{\sigma} f_p. \quad (1)$$

Эта задача – достаточно тривиальна. Полагая все внутренние усилия, за исключением продольной  $N_x$  и окружной  $N_\varphi$  сил, равными нулю, уравнения равновесия для гiba (см. уравнения (4) [8]) записываются следующим образом:

$$\frac{N_\varphi}{R} + \frac{N_x \sin \varphi}{S} = P; \quad (2a)$$

$$\frac{1}{RS} \frac{\partial}{\partial \varphi} (SN_\varphi) - \frac{N_x \cos \varphi}{S} = 0, \quad (2b)$$

где

$$S(\varphi) = B_0 + R \sin \varphi = B_0(1 + \alpha \sin \varphi). \quad (3)$$

Решение системы (2) имеет вид

$$N_x = \frac{PR}{2} = \frac{t \bar{\sigma} f_p}{2}; \quad (4a)$$

$$N_\varphi = \frac{PR}{2} \frac{2 + \alpha \sin \varphi}{1 + \alpha \sin \varphi} = \frac{t \bar{\sigma} f_p}{2} \frac{2 + \alpha \sin \varphi}{1 + \alpha \sin \varphi}. \quad (4b)$$

Перемещения, возникающие в гibe при наличии внутренних усилий (4), будут рассмотрены в сообщении 3 при анализе перемещений линии центров гiba трубы.

**2. Постановка задачи совместного действия момента и давления.** Суть вопроса состоит в том, что кривизну поперечного сечения в результате овализации нельзя считать равной исходной, а именно  $1/R$ , она является переменной по углу  $\varphi$  в зависимости от величины внешнего изгибающего момента. Настоящая задача относится к геометрически нелинейным, и для получения ее аналитического решения необходимо выделить основные факторы с последующим упрощением математической постановки. Одна из основных исходных предпосылок заключается в значительном превышении окружным усилием  $N_\varphi$  (4б), вызванным давлением, окружного усилия,

обусловленного овализацией. Для различия этих понятий введем следующие обозначения:  $N_\varphi^P$  и  $N_\varphi^M$ , где  $P$  соответствует давлению, а  $M$  – изгибающему моменту. Аналогично введем обозначения  $N_x^P$  и  $N_x^M$ . Полагаем, что составляющие от давления однозначно определяются выражениями (4). Далее в первых двух уравнениях равновесия примем, что кривизна поперечного сечения  $\chi_\varphi$  в каждой его точке может быть представлена в виде суммы исходной кривизны  $1/R$  и кривизны  $\chi_\varphi^M$ , связанной с деформированием от действия моментов овализации и пропорциональной им:

$$\chi_\varphi = 1/R + \chi_\varphi^M. \quad (5)$$

Уровень приложенных изгибающих моментов, и как следствие, внутренних моментов овализации считаем достаточно малым, чтобы полагать  $1/R \gg \chi_\varphi^M$ .

Перепишем два первых уравнения равновесия (см. аналогичные уравнения в [8]):

$$\left(\frac{1}{R} + \chi_\varphi^M\right)(N_\varphi^P + N_\varphi^M) + \frac{1}{RS} \frac{\partial}{\partial \varphi}(Q_\varphi S) + \frac{(N_x^P + N_x^M) \sin \varphi}{S} = P; \quad (6a)$$

$$\frac{1}{RS} \frac{\partial}{\partial \varphi}(S(N_\varphi^P + N_\varphi^M)) - \frac{Q_\varphi}{R} + \frac{1}{S} \frac{\partial L}{\partial \theta} - \frac{(N_\varphi^P + N_\varphi^M) \cos \varphi}{S} = 0. \quad (6b)$$

Учитывая вышеизложенное и решения (4), а также обычные обозначения для осевых сил и кривизны, т.е. без индекса  $M$ , вместо уравнений (6) получаем

$$\frac{N_\varphi}{R} + \frac{1}{RS} \frac{\partial}{\partial \varphi}(Q_\varphi S) + \frac{N_x \sin \varphi}{S} + \chi_\varphi N_\varphi^P = 0; \quad (7a)$$

$$\frac{1}{RS} \frac{\partial}{\partial \varphi}(SN_\varphi) - \frac{Q_\varphi}{R} + \frac{1}{S} \frac{\partial L}{\partial \theta} - \frac{N_x \cos \varphi}{S} = 0. \quad (7b)$$

Таким образом, постановка задачи о совместном влиянии внутреннего давления и изгибающего момента отличается от задачи о действии только изгибающего момента тем, что в первое уравнение равновесия входит дополнительный член, который пропорционален окружному усилию от давления  $N_\varphi^P$  (рассматривается здесь как некоторое постоянное внешнее нагружение), умноженному на кривизну, обусловленную деформированием контура. Последующее решение этой задачи ничем существенно не отличается от задачи овализации при действии внешнего изгибающего момента [8]. Кратко повторим основные моменты решения.

1. Из (7а) определяем значение внутреннего усилия  $N_\varphi$  и подставляем в (7б).

2. Исходя из обоснованных гипотез малости (условия (20) в [8]) оба внутренних момента, обе перерезывающие силы и кривизна  $\chi_\varphi$  могут быть выражены только через тангенциальные перемещения  $v$ . В частности, для перерезывающей силы и кривизны имеем [8]

$$Q_\varphi S = -H\delta \left[ \frac{S}{R^3} \left( \frac{\partial^4 v}{\partial \varphi^4} + \frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2} \right) + \frac{\cos \varphi}{R^2} \left( \frac{\partial v}{\partial \varphi} + \frac{\partial^3 v}{\partial \varphi^3} \right) - \frac{\mu \sin \varphi}{R^2} \left( v + \frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2} \right) \right]; \quad (8)$$

$$\chi_\varphi = \frac{1}{R^2} \left( \frac{\partial^3 v}{\partial \varphi^3} + \frac{\partial v}{\partial \varphi} \right). \quad (9)$$

3. Значение касательного усилия  $L$  выражается из третьего уравнения равновесия (уравнение (4в) в [8]) через осевое усилие и подставляется во второе уравнение равновесия (7б), в которое подставляется также значение силы  $Q_\varphi$ , выраженной через перемещения  $v$  (8).

4. С помощью выражения для касательного усилия  $L$  и деформации сдвига  $\gamma_{\theta\varphi}$  (уравнение (14в) в [8]) составляем уравнение связи перемещений  $u, v$  с  $L$ .

5. Замыкает систему уравнений физическое уравнение, связывающее осевое усилие  $N_x$  с осевой деформацией  $\varepsilon_\theta$  и окружным усилием  $N_\varphi$ .

Целесообразно два вида нагружения – в плоскости и из плоскости – рассмотреть отдельно.

### 3. Изгиб в плоскости и давление.

3.1. **Решение задачи.** Аналогично [8] используем комбинированный метод представления искомых неизвестных:

$$u = u_0 + \theta_z R \sin \varphi; \quad (10a)$$

$$v = -w_y \cos \varphi + \Omega^{in} R [C_2^{in} \sin 2\varphi + C_3^{in} \cos 3\varphi + \dots]; \quad (10б)$$

$$w = -w_y \sin \varphi + \Omega^{in} R [-2C_2^{in} \cos 2\varphi + 3C_3^{in} \sin 3\varphi + \dots]; \quad (10в)$$

$$N_x(\theta, \varphi) = -k_z \bar{\sigma} t (\sin \varphi + A_2^{in} \cos 2\varphi + A_3^{in} \sin 3\varphi + \dots), \quad (10г)$$

где, как и ранее [8], безразмерный параметр  $\Omega^{in} = \frac{k_z \bar{\sigma} B_0}{ER}$  введен для удобства. В соответствии с описанным методом решения на основе представлений (10) путем сравнения коэффициентов при одинаковых тригонометрических членах, т.е. при  $\sin n\varphi$  и  $\cos n\varphi$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , аналогично [8] получаем три таких же уравнения балочного типа и две системы уравнений для определения коэффициентов  $A_i^{in}$  и  $C_i^{in}$ .

В общем виде первая система уравнений имеет следующий вид:

$$\begin{aligned}
 & 6A \left\{ (i+2)A_i^m - iA_{i+2}^m + P_n \left[ (-1)^i i(i+1)[(i+1)^2 - 1] \frac{\alpha}{2} C_i - \right. \right. \\
 & \left. \left. - 2(i+1)^2 [(i+1)^2 - 1] C_{i+1} + (-1)^{i+1} (i+1)(i+2)[(i+2)^2 - 1] \frac{\alpha}{2} C_{i+2} \right] \right\} = \\
 & = (-1)^{i+1} \frac{(i^2 - 1)[(i+1)^2 - 1]}{2} [i(i+1) + \mu] \alpha C_i^m + (i+1)^2 [(i+1)^2 - 1]^2 C_{i+1}^m + \\
 & + (-1)^i \frac{[(i+2)^2 - 1][(i+1)^2 - 1]}{2} [(i+2)(i+1) + \mu] \alpha C_{i+2}^m, \quad (11a)
 \end{aligned}$$

вторая – осталась без изменений:

$$\begin{aligned}
 & A_{i+1}^m + (-1)^i \frac{\alpha}{2} (1 + \mu) (A_i^m - A_{i+2}^m) = C_i^m \left( \frac{i}{2} - \frac{1}{2} \right) - C_{i+2}^m \left( \frac{i}{2} + \frac{3}{2} \right) + \\
 & + (-1)^i \frac{(i+1)^3 [(i+1)^2 - 1]}{12A} \mu \alpha C_{i+1}^m - \frac{(i^2 - 1)(i+1)}{24A} [i(i+1) + \mu] \mu \alpha^2 C_i^m + \\
 & + \frac{[(i+2)^2 - 1](i+1)}{24A} [(i+2)(i+1) + \mu] \mu \alpha^2 C_{i+2}^m, \quad (11b)
 \end{aligned}$$

где  $i \in (1, 2, \dots, 2k)$ ;  $A$  – константа,

$$A = \frac{R^2 R^2 (1 - \mu^2)}{B_0^2 t^2} = (1 - \mu^2) \lambda^2. \quad (12)$$

Безразмерный параметр  $P_n$  вводится для удобства и определяется как

$$P_n = \frac{PB_0^2}{ERt} = \frac{\sigma_{\varphi p}}{E\alpha^2}, \quad (13)$$

где  $\sigma_{\varphi p} = PR/t$  – окружные напряжения от давления в тонкостенной цилиндрической оболочке.

Уравнения (11а) отличаются от соответствующих уравнений (36а) [8] наличием группы слагаемых, пропорциональных давлению. Коэффициент увеличения податливости гйба  $K^m$  формально имеет тот же вид, что и в случае без давления:

$$K^m = 1 - \frac{\alpha}{2} A_2^m (1 + \mu) + \frac{3}{2} C_2^m - \frac{\mu \alpha^2}{4A} C_2^m \left( 1 + \frac{\mu}{2} \right). \quad (14)$$

Уравнения (11), как и уравнения (36) [8], имеют бесконечное число членов, и решения можно получать только в некоторых приближениях по параметру  $\lambda$ . Так, в первом приближении уравнения для определения коэффициентов  $A_i^{in}$ ,  $C_i^{in}$  записываются следующим образом:

$$\begin{cases} 6A \left( 3 - A_3^{in} - \frac{PB_0^2}{EtR} (12C_2^{in} - 12\alpha C_3^{in}) \right) = 36C_2^{in} - 12\alpha C_3^{in} (6 + \mu); \\ 6A \left( 4A_2^{in} - \frac{PB_0^2}{2EtR} (144C_3^{in} - 9\alpha C_2^{in}) \right) = 9 \cdot 64C_3^{in} - \frac{3 \cdot 8\alpha}{2} C_2^{in} (6 + \mu); \\ A_2^{in} - \frac{\alpha}{2} (1 + \mu) (1 - A_3^{in}) = -\frac{2\mu\alpha}{A} C_2^{in} + \frac{4\mu\alpha^2}{A} C_3^{in} + \frac{2\mu^2\alpha^2}{3A} C_3^{in} - 2C_3^{in}; \\ A_3^{in} + \frac{\alpha}{2} (1 + \mu) A_2^{in} = \frac{3^3 \cdot 8\mu\alpha}{12A} C_3^{in} - \frac{3 \cdot 3\mu\alpha^2}{24A} C_2^{in} (6 + \mu) + \frac{1}{2} C_2^{in}. \end{cases} \quad (15)$$

Решения уравнений (11) позволяют определить все внутренние усилия, а также записать выражение для  $K^{in}$  в любых приближениях по коэффициенту  $\lambda$ .

Приведем некоторые аналитические решения для  $K^{in}$ . В первом приближении выражение для  $K^{in}$  согласно (14) и с учетом коэффициентов  $A_2^{in}$ ,  $C_2^{in}$ , определяемых из системы уравнений (15), имеет вид

$$\begin{aligned} K = & \frac{-3456 - 144\mu\alpha^4 - 288\alpha^2 A + 82\mu^3\alpha^4 + 22\mu^4\alpha^4 - 3168A + \dots}{-216\alpha^4 - 144\alpha^2 A + 1728\alpha^2 - 3456 - 576A + 144\mu\alpha^2 - \dots} \rightarrow \\ & \rightarrow \dots \frac{+576\mu\alpha^2 - 768\mu^2\alpha^2 + 2592\alpha^2 - 240A^2 - 120\mu\alpha^2 A - 340\mu^2\alpha^2 A + \dots}{-120\mu^2\alpha^2 - 12\mu\alpha^2 A + 2\mu^2\alpha^2 A + 42\mu^2\alpha^4 + 13\mu^3\alpha^4 + \mu^4\alpha^4 - \dots} \rightarrow \\ & \rightarrow \dots \frac{+168\mu^2\alpha^4 - 432\alpha^4 + P_n A (108\mu^4\alpha^4 + 432\mu^2\alpha^2 A - 360\alpha^2 A - 19008 - \dots}{-36\mu\alpha^4 - 24A^2 + P_n A (7128\alpha^2 - 198\alpha^2 A - 19008 - 1584A + \dots} \rightarrow \\ & \rightarrow \dots \frac{-5472A + 11880\alpha^2 + 13536\mu\alpha^2 - 1044\mu\alpha^4 + 648\mu^2\alpha^4 + 1896\mu^2\alpha^2 + \dots}{+5976\mu\alpha^2 - 531\mu\alpha^4 + 90\mu^2\alpha^4 - 588\mu^2\alpha^2 + 27\mu^3\alpha^4 - 594\alpha^4 - \dots} \rightarrow \\ & \rightarrow \dots \frac{+612\mu^3\alpha^4 - 1188\alpha^4 + 72\mu\alpha^2 A + P_n^2 A^2 (10368\mu^2\alpha^2 - 648\alpha^4 - \dots}{-198\mu\alpha^2 A + P_n^2 A^2 (5184\mu^2\alpha^2 - 324\alpha^4 - 324\mu^2\alpha^4 - 648\mu\alpha^4 + \dots} \rightarrow \\ & \rightarrow \dots \frac{648\mu^2\alpha^4 - 1296\mu\alpha^4 + 20736\mu\alpha^2 + 11664\alpha^2 - 20736}{+10368\mu\alpha^2 + 6480\alpha^2 - 20736}. \end{aligned} \quad (16)$$

При  $\alpha \rightarrow 0$  в соответствии с решениями (11) значения  $K$  равны:

$$K_1 = \frac{12 + 10A + 48P_n A}{12 + A + 48P_n A} \quad (17a)$$

для первого приближения;

$$K_2 = \frac{4800 + 4136A + 105A^2 + 3744P_n A^2 + 23040P_n A + 15360P_n^2 A^2}{4800 + 536A + 3A^2 + 864P_n A^2 + 23040P_n A + 15360P_n^2 A^2} \quad (17b)$$

для второго приближения;

$$K_3 = \frac{2822400 + 2446176A + 73912A^2 + 252A^3 + 14515200P_n A + \dots \rightarrow}{2822400 + 329376A + 3280A^2 + 3A^3 + 14515200P_n A + \dots \rightarrow} \rightarrow \dots \rightarrow$$

$$\frac{+3103488P_n A^2 + 31968P_n A^3 + 13676544P_n^2 A^2 + 800256P_n^2 A^3 + \dots \rightarrow}{+684288P_n A^2 + 2880P_n A^3 + 13676544P_n^2 A^2 + 219648P_n^2 A^3 + \dots \rightarrow} \rightarrow \dots \rightarrow$$

$$\frac{+3096576P_n^3 A^3}{+3096576P_n^3 A^3} \quad (17b)$$

для третьего приближения.

С помощью уравнений (11), используя компьютерные математические пакеты, несложно получить последующие приближения для  $K^{in}$  в аналитическом виде. Однако из-за громоздкости они не приводятся.

Полученные решения при  $\alpha \rightarrow 0$  почти идентичны решениям Костовецкого [3] для коэффициента податливости в соответствующих приближениях, отличие состоит лишь в том, что в решениях Костовецкого в членах, соответствующих только изгибу, используется коэффициент  $\lambda^2$ , в то время как в наших формулах коэффициент  $A$  согласно (12) содержит дополнительный множитель  $(1 - \mu^2)$ .

На рис. 1 представлены решения для  $K^{in}$  при разных значениях параметра  $P_n$ , полученные по предлагаемому методу расчета и по формулам, представленным в [6, 9]. При этом безразмерный параметр  $\alpha = 1/3$  и наши решения для  $K^{in}$  были получены в четвертом приближении по  $\lambda$ . Как видно, при  $P_n = 0$  решение для  $K^{in}$ , приведенное в [9], совпадает с нашим решением. Решение по ПНАЭ [6] дает завышенные результаты при всех значениях  $P_n$ .

**3.2. Примеры.** Для проверки точности полученных решений с помощью предлагаемого метода расчета гибов труб рассмотрим примеры вычисления коэффициента податливости  $K^{in}$  и напряжений  $\sigma_\varphi$  и  $\sigma_x$  [1, 2].

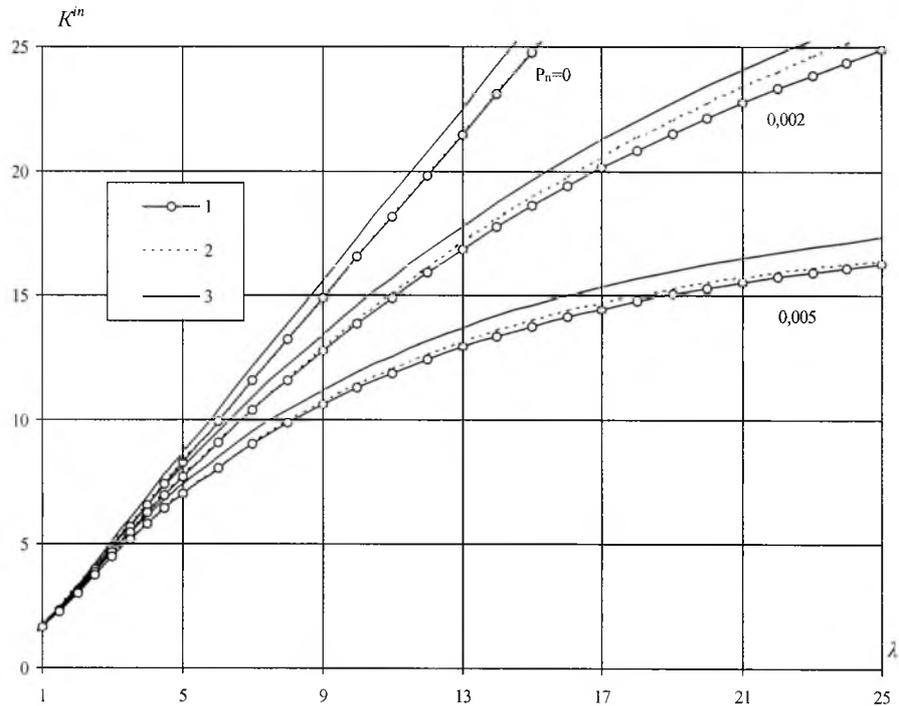
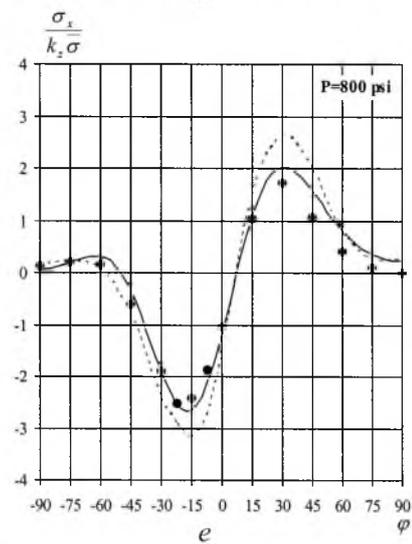
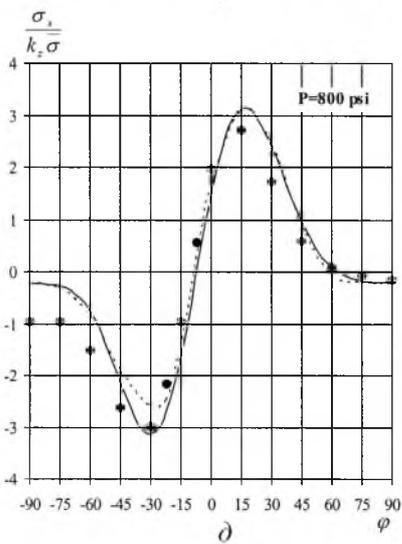
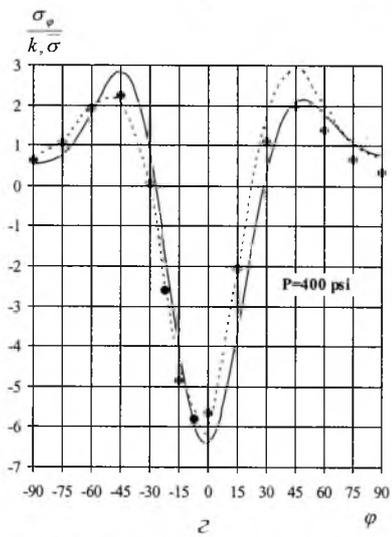
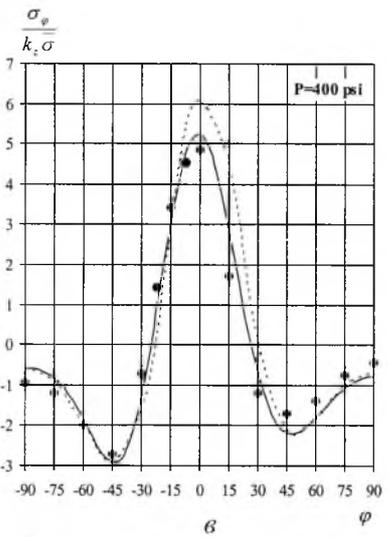
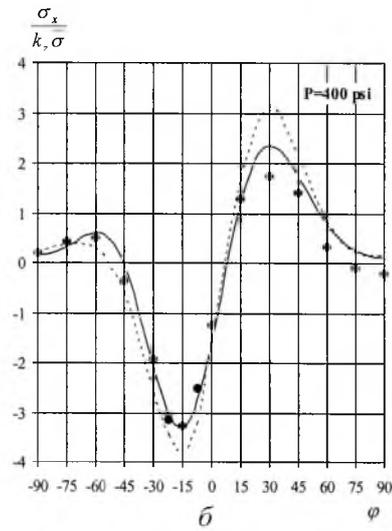
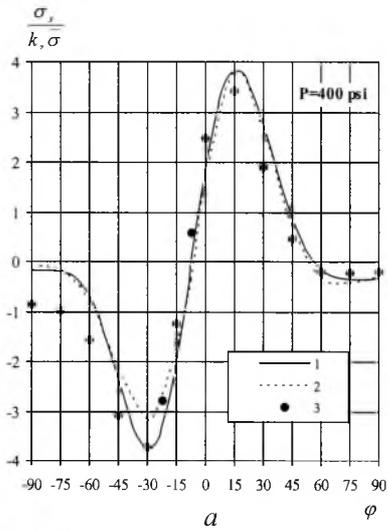


Рис. 1. Коэффициент увеличения податливости в зависимости от величины внутреннего давления: 1 – наши данные; 2, 3 – соответственно данные работ [9, 6].

*Случай 1.* Геометрические размерыгиба трубы следующие: радиус кривизныгиба  $B_0 = 45''$  (1143 мм), внешний диаметр  $D_n = 29,973''$  (~ 761,3 мм), толщина стенки  $t = 0,515''$  (~ 13,1 мм).

На рис. 2 показаны зависимости окружных  $\sigma_\varphi(\varphi)$  и осевых  $\sigma_x(\varphi)$  напряжений на внутренней и внешней поверхностях при внутреннем давлении  $P = 400\text{ psi}$ ;  $800\text{ psi}$ . Там же представлены расчетные и экспериментальные данные [2]. Для всех значений  $P$  наблюдается более хорошее соответствие между экспериментальными и полученными по предлагаемому методу результатами по сравнению с решениями [2]. Отметим несоответствие между экспериментальными и расчетными результатами для осевых напряжений  $\sigma_x(\varphi)$  на внешней поверхности в окрестности точки  $\varphi = -90^\circ$ . Между тем в сообщении 1, в котором проводился анализ без учета внутреннего давления, обеспечивается хорошая точность при сопоставлении полученных по предлагаемому методу результатов и численных расчетов [10, 11] с экспериментальными данными [11].

*Случай 2.* На рис. 3 показано изменение коэффициента податливости  $K^{in}$  и максимальных осевых напряжений  $\beta$  в зависимости от внутреннего давления. Там же представлены экспериментальные и расчетные данные [1], а также полученные по формулам [6]. Сопоставление проводится для трех гибов трубы с разной геометрией. Их геометрические размеры приведены на рис. 3. При уровнях внутреннего давления  $P > 25\text{ psi}$  обеспечивается хорошее соответствие между расчетными и экспериментальными значениями  $K^{in}$ .



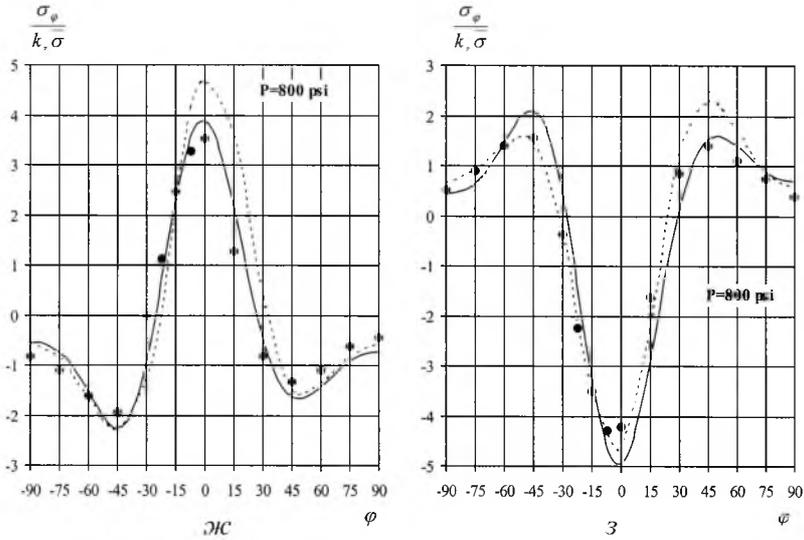


Рис. 2. Напряжения в гйбе трубы при  $P = 400\text{psi}$  (а-г) и  $P = 800\text{psi}$  (д-з): а, б и д, е – продольные напряжения на внешней и внутренней поверхности соответственно; в, г и ж, з – окружные напряжения на внешней и внутренней поверхности соответственно (1 – наши данные; 2 – [2]; 3 – эксперимент).

Представленные на рис. 3 графики максимальных осевых напряжений  $\beta$  иллюстрируют более хорошее соответствие между экспериментальными и полученными по предлагаемому методу результатами, по сравнению с решениями [1, 6]. Следует отметить, что приведенные в [6] решения свидетельствуют о существенном их отличии от данных эксперимента в сторону завышения результатов.

При малых значениях  $P$  наблюдается завышение расчетных значений  $K^{in}$  и  $\beta$  по сравнению с полученными экспериментально. Это, скорее всего, связано с влиянием краевого эффекта; оно тем значительнее, чем больше по сравнению с единицей значение  $K^{in}$ .

4. **Изгиб из плоскости и давление.** Поскольку обозначения, план решения и представление результатов не отличаются от таковых при изгибе из плоскости без давления [8], приведем только постановочные выражения и окончательные формулы. Итак, исходные неизвестные записываем в виде

$$u = \theta_y R \cos \varphi + TR[B_2^{out} \sin 2\varphi + B_3^{out} \cos 3\varphi + \dots]; \quad (18a)$$

$$v = -W_z \sin \varphi + R\varphi_0 + \Omega^{out} R[C_2^{out} \cos 2\varphi + C_3^{out} \sin 3\varphi + \dots]; \quad (18б)$$

$$w = W_z \cos \varphi + \Omega^{out} R[2C_2^{out} \sin 2\varphi - 3C_3^{out} \cos 3\varphi + \dots]; \quad (18в)$$

$$N_x(\theta, \varphi) = -k_y(\theta)\bar{\sigma}t(\cos \varphi + A_2^{out} \sin 2\varphi + A_3^{out} \cos 3\varphi + \dots); \quad (18г)$$

$$L(\theta, \varphi) = -k_x(\theta)\bar{\sigma}t(1 + L_2^{out} \cos 2\varphi + L_3^{out} \sin 3\varphi + \dots), \quad (18д)$$

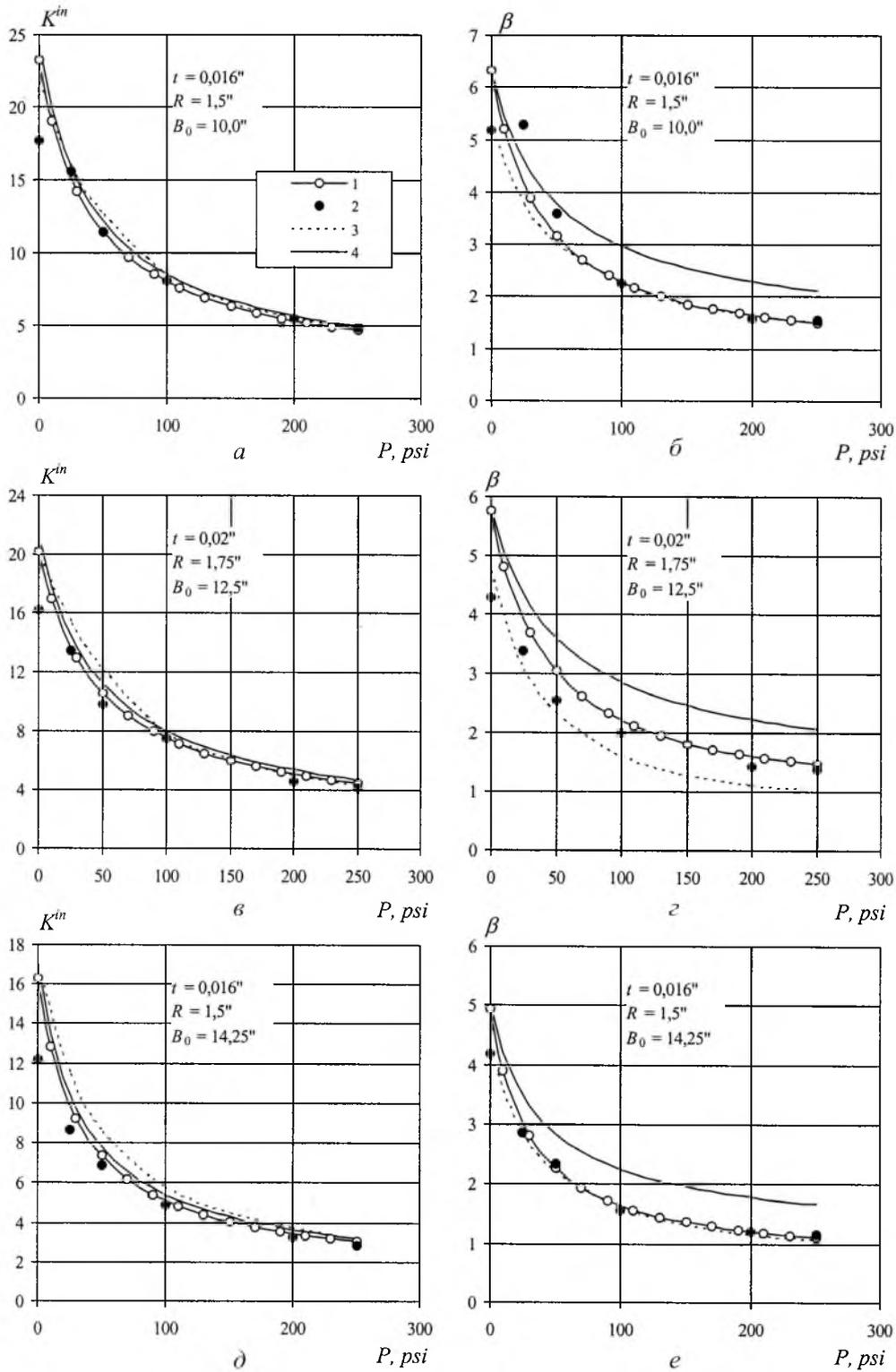


Рис. 3. Изменение  $K^{in}$  (а, в, д) и  $\beta$  (б, г, е) в зависимости от  $P$  и геометрических характеристикгиба: 1 – наши данные; 2 – эксперимент [1]; 3, 4 – соответственно данные [1, 6].

где  $\Omega^{out} = \frac{k_y(\theta)\bar{\sigma}B_0}{ER}$ ;  $T = \frac{k_x(\theta)\bar{\sigma}}{G}$ ;  $B_i^{out}$ ,  $C_i^{out}$ ,  $A_i^{out}$ ,  $L_i^{out}$  – функции от безразмерных параметров  $\alpha$  и  $\lambda$ .

В результате решения записываем три уравнения для перемещения гнба как балки, аналогичные полученным ранее [8], и четыре группы уравнений для определения неизвестных коэффициентов  $A_i^{out}$ ,  $B_i^{out}$ ,  $C_i^{out}$  и  $L_i^{out}$  в (18):

$$\frac{i+2}{2}L_i^{out} - \frac{i}{2}L_{i+2}^{out} + (-1)^i \frac{i+1}{\alpha}L_{i+1}^{out} = 2A_{i+1}^{out}; \quad (19a)$$

$$6A \left\{ (i+2)A_i^{out} - iA_{i+2}^{out} - L_{i+1}^{out} + P_k \left[ (-1)^{i+1} i(i+1)((i+1)^2 - 1) \frac{\alpha}{2} C_i^{out} - \right. \right. \\ \left. \left. - 2(i+1)^2((i+1)^2 - 1)C_{i+1}^{out} + (-1)^i (i+1)(i+2)((i+2)^2 - 1) \frac{\alpha}{2} C_{i+2}^{out} \right] \right\} = \\ = (-1)^i \frac{(i^2 - 1) \cdot [(i+1)^2 - 1]}{2} [\lambda(i+1) + \mu] \alpha C_i^{out} + (i+1)^2 \cdot [(i+1)^2 - 1]^2 C_{i+1}^{out} + \\ + (-1)^{i+1} \frac{[(i+2)^2 - 1] \cdot [(i+1)^2 - 1]}{2} [(i+2)(i+1) + \mu] \alpha C_{i+2}^{out}; \quad (19б)$$

$$A_{i+1}^{out} + (-1)^{i+1} \frac{\alpha}{2} (1 + \mu) (A_i^{out} - A_{i+2}^{out}) = C_i^{out} \left( \frac{i}{2} - \frac{1}{2} \right) - C_{i+2}^{out} \left( \frac{i}{2} + \frac{3}{2} \right) + \\ + (-1)^{i+1} \frac{(i+1)^3 [(i+1)^2 - 1]}{12A} \mu \alpha C_{i+1}^{out} - \frac{(i^2 - 1)(i+1)}{24A} [\lambda(i+1) + \mu] \mu \alpha^2 C_i^{out} + \\ + \frac{[(i+2)^2 - 1](i+1)}{24A} [(i+2)(i+1) + \mu] \mu \alpha^2 C_{i+2}^{out} - \alpha(1 + \mu) B_{i+1}^{out}; \quad (19в)$$

$$(-1)^i (i+1) B_{i+1}^{out} - \frac{\alpha}{2} [(i-1) B_i^{out} - (i+3) B_{i+2}^{out}] + \frac{C_{i+1}^{out}}{1 + \mu} = \\ = L_{i+1}^{out} + (-1)^i \frac{\alpha}{2} (L_i^{out} - L_{i+2}^{out}), \quad (19г)$$

где  $i \in (1, 2, \dots, 2k)$ .

Количество уравнений в каждой группе определяется порядком приближения  $k$  и составляет  $2k$ . Максимальный индекс коэффициентов  $A_i^{out}$ ,  $B_i^{out}$ ,  $C_i^{out}$  и  $L_i^{out}$ , используемых в  $k$ -м приближении, равен  $j = 2k + 1$ . Всего для  $k$ -го приближения используются  $8k$  уравнений. По сравнению с анало-

гичными уравнениями (49) [8] в уравнении (19б) добавился член от внутреннего давления. Уравнения (19а), (19в), (19г) остались без изменений. В первом приближении уравнения (19) записываются так:

$$\begin{cases}
 -\frac{1}{2}L_3^{out} - \frac{2}{\alpha}L_2^{out} = 2A_2^{out}; \\
 2L_2^{out} + \frac{3}{\alpha}L_3^{out} = 2A_3^{out}; \\
 6A(3 - A_3^{out} - L_2^{out} - P_n(12C_2^{in} + 12\alpha C_3^{in})) = \\
 = 36C_2^{out} + 12\alpha C_3^{out}(6 + \mu); \\
 6A(4A_2^{out} - L_3^{out} - P_n(144C_3^{in} - 9\alpha C_2^{in})) = \\
 = 9 \cdot 64C_3^{out} + \frac{3 \cdot 8\alpha}{2}C_2^{out}(6 + \mu); \\
 A_2^{out} + \frac{\alpha}{2}(1 + \mu)(1 - A_3^{out}) = \frac{2\mu\alpha}{A}C_2^{out} + \frac{4\mu\alpha^2}{A}C_3^{out} + \frac{2\mu^2\alpha^2}{3A}C_3^{out} - \\
 - 2C_3^{out} - \alpha(1 + \mu)B_2^{out}; \\
 A_3^{in} - (1 + \mu)A_2^{out} = -\frac{3^3 \cdot 8\mu\alpha}{12A}C_3^{out} - \frac{3 \cdot 3\mu\alpha^2}{24A}C_2^{out}(6 + \mu) + \\
 + \frac{1}{2}C_2^{out} - \alpha(1 + \mu)B_3^{out}; \\
 L_2^{out} + \frac{\alpha}{2}L_3^{out} = -2B_2^{out} + 2\alpha B_3^{out} + \frac{1}{1 + \mu}C_2^{out}; \\
 L_3^{out} + \frac{\alpha}{2}L_2^{out} = 3B_3^{out} - \frac{\alpha}{2}B_2^{out} + \frac{1}{1 + \mu}C_3^{out}.
 \end{cases} \quad (20)$$

Коэффициент увеличения податливости гйба  $K^{out}$  формально имеет тот же вид, что и в случае без давления:

$$K^{out} = 1 + \frac{\alpha}{2}A_2^{in}(1 + \mu) + \frac{3}{2}C_2^{in} - \frac{\mu\alpha^2}{4A}C_2^{in}\left(1 + \frac{\mu}{2}\right). \quad (21)$$

Следовательно, аналогично выражениям для  $K^{in}$  и  $K^{out}$ , полученным без учета внутреннего давления [8], выражения (14) и (21) совпадают с точностью до  $\alpha^2$ .

**Заключение.** Задача учета внутреннего давления при пространственном изгибе относится к геометрически нелинейным. Для ее решения предлагается очень простой способ, основанный на том, что окружное усилие, вызванное давлением, значительно превышает окружное усилие, обусловленное овализацией, и может рассматриваться как постоянное по координате  $x$  дополнительное внешнее нагружение. Такая исходная предпосылка позволяет, не изменяя общего хода решения задачи, полученного авторами ранее, учесть

внутреннее давление путем ввода в первое уравнение равновесия дополнительного члена, пропорционального  $N_{\varphi}^P$  и умноженного на связанную с деформированием контура кривизну.

## Резюме

Розглянуто задачу про визначення напруженого стану і піддатливості згину труби, що знаходиться під одночасною дією внутрішнього тиску і згинальних моментів, котрі прикладені як у площині, так і з площини його кривини. Задача відноситься до геометрично нелінійних, де збільшення внутрішнього тиску призводить до зменшення напружень овалізації від згинальних моментів. Запропоновано оригінальний метод урахування тиску, що базується на значному перевищенні коловими напруженнями від тиску напружень від згинального моменту. Виведено загальну систему рівнянь для всіх компонент переміщень і напружень. Отримані результати зіставляються з наведеними в літературних джерелах.

1. *Kafka P. C. and Dunn M. B.* Stiffness of curved tubes with internal pressure // *J. Appl. Mech.* – 1956. – **23**, No. 2. – P. 247 – 254.
2. *Rodabaugh E. and George H.* Effect of internal pressure on flexibility and stress-intensification factors of curved pipe or welding-elbows // *Trans. ASME.* – 1957. – **79**. – P. 939 – 948.
3. *Костовецкий Д. Л.* Прочность трубопроводных систем энергетических установок. – Л.: Энергия, 1973. – 264 с.
4. *Аксельрад Э. Л.* Гибкие оболочки. – М.: Наука, 1976. – 376 с.
5. *Аксельрад Э. Л., Ильин В. П.* Расчет трубопроводов. – Л.: Машиностроение, 1972. – 240 с.
6. *ПНАЭ Г-7-002-86.* Нормы расчета на прочность оборудования и трубопроводов атомных энергетических установок. – М.: Энергоатомиздат, 1989. – 525 с.
7. *СНиП 2.04.12-86.* Расчет на прочность стальных трубопроводов. Строительные нормы и правила. – М.: ЦИТП Госстроя СССР, 1986. – 16 с.
8. *Орыняк И. В., Радченко С. А.* Анализ деформацийгиба трубы на основе смешанного подхода. Сообщ. 1. Пространственный изгиб по Сен-Венану // *Пробл. прочности.* – 2004. – № 3. – С. 23 – 51.
9. *Code for Pressure Piping.* – ASME B31. – New York, 2000.
10. *Mackenzie D. and Bell R.* A simple pipe bend element for piping flexibility analysis // *Int. J. Press. Vessel & Piping.* – 1992. – **51**, No. 1. – P. 85 – 106.
11. *Ohtsubo H. and Watanabe O.* Flexibility and stress factors of pipe bends – an analysis by finite ring method // *J. Press. Vessel Techn.* – 1977. – **99**. – P. 281 – 290.

Поступила 27. 02. 2003