ISSN 1561-9087 Прикладна гiдромеханiка. 2007. Том 9, N 2-3. С. 159 – 167

УДК 537.84

ВЫРОЖДЕННЫЕ ВОЛНОВЫЕ МОДЕЛИ МАГНИТНОЙ ГИДРОДИНАМИКИ И МАГНИТОУПРУГОСТИ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ В ТЕОРИИ ДИФРАКЦИИ ВОЛН И УПРАВЛЕНИЯ

И. Т. СЕЛЕЗОВ

Институт гидромеханики НАН Украины, Киев

Получено 10.04.2007

Представлены линеаризованные уравнения движения пространственно-неоднородной электропроводящей среды в магнитном поле. Построено улучшенное приближение слабой и идеальной электропроводности. Аналогичные приближения построены для неоднородной магнитоупругой среды и на их основе построены аналитические решения задачи дифракции цилиндрических волн на круговом цилиндрическом препятствии. Анализируется влияние МГД-эффектов на рассеяние волн. Построены также аналитические решения задачи управления с обратными связями флаттером упругой пластины в МГД-потоке. Показано существенное улучшение динамической устойчивости системы.

Наведено лiнеаризованi рiвняння руху просторово-неоднорiдного електропровiдного середовища в магнiтному полi. Побудовано покращене наближення слабкої i iдеальної електропровiдностi. Аналогiчнi наближення побудовано для неоднорiного магнiтопружного середовища i на пiдставi цих наближень побудовано аналiтичнi розв'язки задачi дифракцiї цилiндричних хвиль на круговiй цилiндричнiй перешкодi. Аналiзується вплив МГД-ефектiв на розсiяння хвиль. Побудовано також аналiтичнi розв'язки задачi керування з зворотнiми зв'язками флатером пружної пластини в МГД-потоцi. Показано суттєве покращення динамiчної стiйкостi системи.

Linearized equations of motion of space-inhomogenious electrically conducting medium in the presence of magnetic field are presented. The refined approximation of a weak electroconductivity and perfect electroconductivity are developed. The similar approximations are developed for an inhomogeneous magnetoelastic solid. On the basis of these approximations analytical solutions of the problem of cylindrical wave diffraction by a circular cylindrical obstacle are obtained. The effect of MHD-parameters on the wave scattering is analysed. Also, analytical solutions of the problem of feedback control for a flutter of elastic plate in MHD-flow are obtained. Essential improvement of dynamical stability of the system is shown.

ВВЕДЕНИЕ

Проблема рассеяния акустических и электромагнитных волн абсолютно жесткими рассеивателями канонической формы получила большое развитие как в плане математических подходов, так и в экспериментальных исследованиях. В случае прозрачных рассеивателей со свойствами, зависящими от координат, или рассеивателей неканонической формы, получено меньше результатов, что обусловлено, в первую очередь, сложностью математического анализа такого рода задач.

Исследование же рассеяния упругих волн осложняется необходимостью разделения уравнений теории упругости даже в случае канонических областей, а в случае более общих областей набор криволинейных систем координат, допускающих такое разделение, существенно ограничен [20]. Что касается неоднородных упругих сред, то здесь возможности разделения уравнений теории упругости еще более ограничены [19, 27]. Один из возможных популярных подходов для рассеивателей либо малого размера, либо малой неоднородности – это борновские аппроксимации [20]. Другой, более общий подход, свободный от указанных выше ограничений, был развит на основе метода обобщенных степенных рядов [8, 23].

Задачи теории рассеяния волн на локальных неоднородностях в электропроводящем упругом теле, помещенном в постоянное магнитное поле, представляют как самостоятельный интерес, так и прикладной, связанный с диагностикой включений, полостей, дефектов и других несовершенств, а также плазменных неоднородностей [1], взаимодействия волн с клеткой и локальными неоднородностями биологических объектов [3] и т. д.

В реальных материалах всегда имеется большое количество различного рода микровключений, дефектов, пустот и др., которые при внешних воздействиях, например, при действии магнитного поля, проявляются как сильные концентраторы магнитоупругих полей, таких как поле напряжений и индуцированное магнитное поле. Это может служить источником зарождения трещин [10, 13]. Кроме того, при действии механических возмущений на магнитоупругое тело, находящееся в постоянном внешнем магнитном поле, в силу взаимосвязанности упругого и электромагнитного полей неизбежно появление возмущений электромагнитного поля как в области, занятой телом, так и во внешней среде. Малые вариации электромагнитного поля, вызванные дифракцией магнитоупругих волн на жестких препятствиях, полостях или пространственных неоднородностях, могут быть легко измерены бесконтактными методами, отличающимися высокой чувствительностью и разрешающей способностью. По измеренным величинам можно приближенно диагностировать основные свойства рассеивателей, их размеры и форму, а в случае прозрачных рассеивателей – их среднюю плотность и ее градиент [1]. Вышеизложенное демонстрирует одно из возможных приложений теории магнитоупругости в неразрушающем контроле [10, 16]. В качестве второго приложения можно отметить сейсмологию.

Большие перспективы магнитной гидродинамики связаны с возможностью создания массовой силы Лоренца, которая может применяться в качестве управляющей в теории автоматического управления системами с распределенными параметрами. Поле массовых сил Лоренца может легко варьироваться в пространстве и времени в отличие, например, от силы гравитации, которая постоянна, что существенно расширяет возможности управления.

В большинстве случаев в теории автоматического управления применяется граничное управление. В последнее время указанная возможность получила развитие в управлении течениями аэро- и гидродинамических объектов для уменьшения сопротивления, и отмечалось, что распределенное управление массовыми силами соответствует нереальному случаю, когда объемные силы прикладываются всюду в жидкости. Для граничного управления управляющее воздействие – это скорость границы, что более практично в механике жидкости и может быть реализовано в реальных ситуациях.

Управление посредством силы Лоренца получило развитие для уменьшения сопротивления, подавления отрывных течений, неустойчивостей.

Отметим некоторые исследования в этой области. В [21] реализуется электромагнитное управление течением морской воды при обтекании кругового цилиндра. Магнитное поле создается вмонтированными в цилиндр секциями постоянных магнитов. В [18] отрывное от стенки течение управляется акустическим возбуждением через щели в профиле. Управление турбулентным течением в канале силой Лоренца при формировании постоянного магнитного поля в стенке рассматривается в [11, 12]. Показана возможность уменьшения сопротивления на 10%. В работе [28] реализуется управление посредством силы Лоренца отрывом течения в области разрежения при обтекании профиля, в котором создается пристеночное постоянное магнитное поле распределенным набором постоянных магнитов, вмонтированных в профиле в области разрежения.

В [24] исследуется влияние электрического поля на устойчивость течения слоя суспензии. В работе [17] реализуется управление посредством силы Лоренца слабопроводящей жидкостью, обтекающей цилиндр, при создании постоянного пристеночного магнитного поля набором постоянных магнитов в цилиндре. Это дает возможность подавлять вихревую дорожку Кармана или уменьшать сопротивление.

Управление с обратными связями турбулентным течением, а также явлениями, описываемыми уравнением Бюргерса, рассматривается в [14]. Исследуются два типа управлений – распределенное и граничное. В случае распределенного управления реализуется пространственно-распределенное управляющее воздействие, в случае граничного управления возбуждение реализуется посредством колебаний границы.

Из вышеизложенного видно, что во всех работах, кроме [14], реализуется пассивное управление, которое существенно уступает управлению с обратными связями.

В данной статье приведена задача управления флаттерными колебаниями упругой пластины в МГД-потоке. Здесь применяется управление с обратными связями, что существенно расширяет возможности управления. Показано, что это расширяет область устойчивости по числу Маха на 50%.

1. УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ НЕОДНОРОДНОЙ МГД-СРЕДЫ

Исходная система уравнений магнитной гидродинамики в криволинейной ортогональной системе координат $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$ записывается в виде балансовых и конститутивных уравнений [7, 15]: сохранения импульса

$$-\vec{\nabla} P = \hat{\rho}\left(\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V}\cdot\vec{\nabla})\vec{V}\right) - \vec{J}\times\vec{B}, \qquad (1)$$

сохранение массы

$$\frac{\partial \hat{\rho}}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot(\hat{\rho}\vec{V}) = 0,$$

законы Ампера и Фарадея

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J}, \qquad \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \qquad (2)$$

условие отсутствия магнитных и электрических зарядов

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = 0, \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0,$$

конститутивные уравнения

$$\frac{\partial P}{\partial \hat{\rho}} = c_0^2, \quad \vec{D} = \varepsilon \vec{E},$$

$$\vec{B} = \mu \vec{H}, \quad \vec{J} = \gamma(\vec{x})(\vec{E} + \vec{V} \times \vec{B}). \qquad (3)$$

Предполагается, что переменные P, $\hat{\rho}$, $\vec{V}$, $\vec{J}$, $\vec{B}$ зависят от $\vec{x}$ и t, диэлектрическая и магнитная проницаемости постоянны $\varepsilon = \mathrm{const}$, $\mu = \mathrm{const}$, невозмущенные величины плотности ρ_0, вектора скорости $\vec{V_0}$ и электропроводности γ зависят от пространственных координат: $\rho_0 = \rho_0(\vec{x})$, $\vec{V_0} = \vec{V_0}(\vec{x})$, $\gamma = \gamma(\vec{x})$.

На поверхности раздела двух сред *1* и *2* должны удовлетворяться условия сопряжения:

$$\vec{n} \cdot \left(\vec{V}^1 - \vec{V}^2\right) = 0, \qquad (4)$$

$$\left[\left(\sigma_{ik}^1 + T_{ik}^1\right) - \left(\sigma_{ik}^2 + T_{ik}^2\right)\right] n_i = 0, \qquad (5)$$
$$i,\, k = 1,\, 2,\, 3,$$

$$\vec{n} \cdot \left(\frac{\mu^1}{\mu^2}\vec{H}^1 - \vec{H}^2\right) = 0, \;\; \vec{n} \times \left(\vec{H}^1 - \vec{H}^2\right) = 0, \qquad (6)$$

$$\vec{n} \cdot \left(\frac{\mu^1}{\mu^2}\vec{E}^1 - \vec{E}^2\right) = 0, \;\; \vec{n} \times \left(\vec{E}^1 - \vec{E}^2\right) = 0, \qquad (7)$$

$$\sigma_{ik} = -p\delta_{ik}, \qquad (8)$$

$$T_{ik} = \varepsilon E_i E_k + P_H H_i H_k -$$
$$-\frac{1}{2}\delta_{ik}\left(\varepsilon E^2 + P_H H^2\right). \qquad (9)$$

В случае постановки начально-краевых задач система (1)–(9) должна быть дополнена начальными условиями. Кроме того, при рассмотрении конкретных задач может быть необходимым привлечение условий регулярности.

После некоторых преобразований система уравнений (1)–(3) приводится к следующему виду:

$$-c_0^2(\vec{x})\vec{\nabla}\hat{\rho} = \hat{\rho}\left(\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \vec{\nabla})\vec{V}\right) -$$

$$-\mu(\vec{\nabla} \times \vec{H}) \times \vec{H}, \qquad (10)$$

$$\frac{\partial \hat{\rho}}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \left(\hat{\rho}\vec{V}\right) = 0, \qquad (11)$$

$$\frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = -\vec{\nabla} \times \left[\frac{1}{\mu\gamma(\vec{x})}\vec{\nabla} \times \vec{H}\right] + \vec{\nabla} \times \left(\vec{V} \times \vec{H}\right), \qquad (12)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J}, \;\; \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\mu\frac{\partial \vec{H}}{\partial t},$$
$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0, \;\; \vec{\nabla} \cdot \vec{H} = 0, \qquad (13)$$

$$\vec{J} = \gamma(\vec{x})\left(\vec{E} + \mu\vec{V} \times \vec{H}\right),$$
$$\vec{D} = \varepsilon\,\vec{E}, \;\; \vec{B} = \mu\vec{H}. \qquad (14)$$

В дальнейшем, принимая в качестве характерных величин l, c_q, ρ_q, H_0, вводятся безразмерные величины (звездочки далее опускаются)

$$\vec{x}^* = \frac{\vec{x}}{l}, \; t^* = \frac{c_q t}{l}, \; \vec{V}^* = \frac{\vec{V}}{c_q}, \; \hat{\rho}^* = \frac{\hat{\rho}}{\rho_q}, \; p^* = \frac{p}{\rho_q c_q^2},$$

$$\vec{H}^* = \frac{\vec{H}}{H_0}, \; \vec{E}^* = \frac{1}{\mu H_0 c_q}\vec{E}, \; \vec{j}^* = \frac{l}{H_0}\vec{j}, \qquad (15)$$

$$(\sigma_{ik}^*,\, T_{ik}^*) = \frac{1}{\rho_q c_q^2}(\sigma_{ik},\, T_{ik})$$

и безразмерные комплексы: $P_H = \dfrac{\mu H_0^2}{\rho_q c_q^2}$ – магнитное давление; $R_m = c_q l \mu \sigma$ – магнитное число Рейнольдса.

После обезразмеривания в соответствии с соотношениями (15) нелинейная система уравнений (10)–(14) и условия сопряжения (4)–(9) линеаризуются на основе двух предположений: представления поля в виде суперпозиции невозмущенного и возмущенного полей и предположения малости возмущенных полей по сравнению с невозмущенными. В соответствии с первым предположением искомые функции представляются в виде

$$\hat{\rho}(\vec{x}, t) = \rho_0(\vec{x}) + \rho(\vec{x}, t),$$

$$\vec{V}(\vec{x}, t) = \vec{V_0}(\vec{x}) + \vec{v}(\vec{x}, t),$$

$$\vec{J}(\vec{x}, t) = \vec{J}^f(\vec{x}) + \vec{j}(\vec{x}, t), \qquad (16)$$

$$\vec{H}\,(\vec{x},t) = \vec{H}_0 + \vec{H}^f\,(\vec{x}) + \vec{h}\,(\vec{x},t)\,,$$

$$\vec{B}\,(\vec{x},t) = \vec{B}_0 + \vec{B}^f\,(\vec{x}) + \vec{b}\,(\vec{x},t)\,,$$

$$\vec{E}\,(\vec{x},t) = O + \vec{e}\,(\vec{x},t)\,,\quad \vec{D}\,(\vec{x},t) = O + \vec{d}\,(\vec{x},t)\,.$$

В соответствии со вторым предположением о малости возмущенных величин, обозначая символом z любую полевую функцию, имеем

$$\frac{|z\,(\vec{x},t)|_{max}}{|Z_0\,(\vec{x})|} << 1. \qquad (17)$$

Из системы (10)–(14) с учетом представлений (16) и предположения (17) получаем уравнения невозмущенного состояния

$$-\vec{\nabla}\rho_0\,(\vec{x}) = \rho_0\,(\vec{x})\left[\vec{V}_0\,(\vec{x})\cdot\vec{\nabla}\right]\vec{V}_0\,(\vec{x}) -$$

$$-P_H\left[\vec{\nabla}\times\vec{H}^f\,(\vec{x})\right]\times\left[\vec{H}_0 + \vec{H}^f\,(\vec{x})\right],$$

$$\vec{\nabla}\cdot[\rho_0(\vec{x})\vec{V}_0] = 0,$$

$$\vec{\nabla}\times\left[\frac{1}{R_m\,(\vec{x})}\vec{\nabla}\times\vec{H}^f\,(\vec{x})\right] - \vec{\nabla}\times$$

$$\times\left\{\vec{V}_0\,(\vec{x})\times\left[\vec{H}_0\times\vec{H}^f\,(\vec{x})\right]\right\} = 0, \qquad (18)$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{H}^f\,(\vec{x}) = \vec{J}^f\,(\vec{x})\,,\quad \vec{\nabla}\cdot\vec{H}^f\,(\vec{x}) = 0,$$

$$\vec{J}^f\,(\vec{x}) = R_m\,(\vec{x})\left\{\vec{V}_0\,(\vec{x})\times\left[\vec{H}_0\times\vec{H}^f\,(\vec{x})\right]\right\}\,,$$

$$\vec{B}_0 + \vec{B}^f\,(\vec{x}) = \mu\,\left[\vec{H}_0\times\vec{H}^f\,(\vec{x})\right]$$

и возмущенного состояния

$$\vec{\nabla}\rho = \rho_0(\vec{x})\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + [\vec{V}_0(\vec{x})\cdot\vec{\nabla}]\vec{v} + (\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\vec{V}_0(\vec{x}) -$$

$$-\{P_H[\vec{\nabla}\times\vec{H}^f(\vec{x})]\cdot\vec{h} + (\vec{\nabla}\cdot\vec{h})\cdot[\vec{H}_0\cdot\vec{H}_f(\vec{x})]\},$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot\left[\rho_0\,(\vec{x})\,\vec{v} + \rho\vec{V}_0\,(\vec{x})\right] = 0,$$

$$\frac{\partial\vec{h}}{\partial t} = -\vec{\nabla}\times\left[\frac{1}{R_m\,(\vec{x})}\vec{\nabla}\times\vec{h}\right] + \vec{\nabla}\times$$

$$\times\left\{\vec{V}_0\,(\vec{x})\times\vec{h} + \vec{v}\times\left[\vec{H}_0 + \vec{H}^f\,(\vec{x})\right]\right\}, \qquad (19)$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{h} = \vec{j},\;\; \vec{\nabla}\times\vec{e} = -\frac{\partial\vec{h}}{\partial t},\;\; \vec{\nabla}\cdot\vec{e} = 0,\;\; \vec{\nabla}\cdot\vec{h} = 0,$$

$$\vec{j} = R_m(\vec{x})\{\vec{e} + [\vec{V}_0(\vec{x})\times\vec{h} + \vec{v}\times[\vec{H}_0 + \vec{H}^f(\vec{x})]]\},$$

$$\vec{d} = \varepsilon\,\vec{e}\,,\quad \vec{b} = \mu\,\vec{h}.$$

В принципе, прежде, чем решать задачу возмущенного состояния, необходимо решить задачу невозмущенного состояния (т. е. задачу магнитостатики), что представляет принципиальные трудности. Поэтому обычно рассматривают самые простейшие ситуации (например, однородное магнитное поле), представляющие собой тривиальные решения системы (18), либо просто не учитывают неоднородность реального магнитного поля из-за невозможности построения решений (например, в случае ограниченных областей).

В случае покоящейся в невозмущенном состоянии жидкости имеем $\vec{V}_0\,(\vec{x}) = 0$, $\vec{H}^f\,(\vec{x}) = 0$, т. е. рассматриваются среды неоднородные только по плотности $\rho_0\,(\vec{x})$, и тогда система уравнений (19) сводится к магнитоакустическому приближению. В рамках этой модели рассмотрим два предельных приближения по магнитному числу Рейнольдса R_m.

В случае слабопроводящих сред ($R_m << 1$) искомые функции представляются в виде разложений по R_m:

$$\vec{v} = \vec{v}^0 + \vec{v}^1 R_m + \vec{v}^2 R_m^2 + \ldots,$$

$$\rho = \rho^0 + \rho^1 R_m + \rho^2 R_2^m + ..., \qquad (20)$$

$$\vec{h} = 0 + \vec{h}^1 R_m + \vec{h}^2 R_m^2 + \ldots,$$

$$\vec{e} = 0 + \vec{e}^1 R_m + \vec{e}^2 R_m^2 + \ldots,$$

$$\vec{j} = 0 + \vec{j}^1 R_m + \vec{j}^2 R_m^2 + \ldots.$$

Улучшенное приближение слабопроводящих сред основано на предположениях сильного магнитного поля и соотношении порядка величин

$$P_H >> 1,\;\; R_m \sim\; P_H^{-1} << 1. \qquad (21)$$

Как видно из структуры представлений (20), в соответствии с (21) гидродинамическое поле играет роль первичного порождающего.

После подстановки разложений (20) в уравнения (19) и сохранения членов первого порядка малости с учетом (21) уравнения первого приближения имеют вид

$$\rho_0 \frac{\partial v^0}{\partial t} + \vec{\nabla} p^0 = R_m P_H \left(\vec{v}^0 \times \vec{H}_0 \right) \times \vec{H}_0,$$

$$\frac{\partial \rho^0}{\partial t} + \vec{v}^0 \cdot \vec{\nabla} \rho_0 + \rho_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{v}^0 = 0,$$

$$\frac{\partial p^0}{\partial t} = c^2 \left[\frac{\partial \rho^0}{\partial t} + \left(\vec{v}^0 \cdot \vec{\nabla} \right) \rho_0 \right], \qquad (22)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{h}^1 = \vec{v}^0 \times \vec{H}_0, \;\; \vec{\nabla} \times \vec{e}^1 = -\frac{\partial \vec{h}^1}{\partial t},$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{h}^1 = 0, \;\; \vec{\nabla} \cdot \vec{e}^1 = 0.$$

Аналогичные преобразования на основе выражений (20) и (21) проводятся и в условиях сопряжения (4)–(9).

На основе модели (22) рассмотрено много конкретных задач и проведен анализ влияния МГД-эффектов на распространение и дифракцию волн [5–7].

Сильнопроводящие среды характеризуются неравенством $R_m >> 1$, так что искомые функции f представляются в виде асимптотических разложений по обратным степеням R_m:

$$f = f^0 + f^1 R_m^{-1} + f^2 R_m^{-2} + \ldots . \qquad (23)$$

С учетом разложения (23) уравнения первого приближения, соответствующего идеальнопроводящим средам, имеют вид

$$\rho_0 \frac{\partial \vec{v}^0}{\partial t} + \vec{\nabla} p^0 = P_H \left(\vec{\nabla} \times \vec{h}^0 \right) \times \vec{H}_0,$$

$$\frac{\partial \rho^0}{\partial t} + \vec{v}^0 \cdot \vec{\nabla} \rho_0 + \rho_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{v}^0 = 0,$$

$$\frac{\partial p^0}{\partial t} = c^2 \left[\frac{\partial \rho^0}{\partial t} + \vec{v}^0 \cdot \vec{\nabla} \rho_0 \right], \qquad (24)$$

$$\frac{\partial \vec{h}^0}{\partial t} = \vec{\nabla} \times \left(\vec{v}^0 \times \vec{H}_0 \right), \;\; \vec{\nabla} \times \vec{e}^0 = -\frac{\partial \vec{h}^0}{\partial t},$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{h}^0 = 0, \;\; \vec{e}^0 + \vec{v}^0 \times \vec{H}_0 = 0.$$

Система уравнений (24) – гиперболического типа. Эта вырожденная модель получила обширные приложения в решении задач в связи с тем, что имеется много реальных сильнопроводящих сред и МГД-эффекты в таких средах могут быть существенными.

2. УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ НЕОДНОРОДНОЙ МАГНИТОУПРУГОЙ СРЕДЫ

Рассмотрим магнитоупругую среду, поведение которой определяется связанной системой уравнений электромагнитного поля и теории упругости. При указанных в предыдущем изложении предположениях и условиях гладкости всех функций линеаризованные уравнения возмущенного движения неоднородной магнитоупругой среды представляются в виде [2, 26]

$$\left\{ \vec{\nabla} \left[\lambda(\vec{x}) + G(\vec{x}) \right] \vec{\nabla} \cdot \vec{u} \right\} - \vec{\nabla} \times$$

$$\times \left[G(\vec{x}) \vec{\nabla} \times \vec{u} \right] + 2 \left\{ \left[\vec{\nabla} G(\vec{x}) \right] \cdot \vec{\nabla} \right\} \vec{u} -$$

$$- \left[\vec{\nabla} G(\vec{x}) \right] \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{u} \right) + \left[\vec{\nabla} G(\vec{x}) \right] \times \left(\vec{\nabla} \times \vec{u} \right) =$$

$$= \rho_c(\vec{x}) \ddot{\vec{u}} - P_h \left(\vec{\nabla} \times \vec{h} \right) \times \vec{H}_0, \qquad (25)$$

$$\ddot{\vec{h}} = -\vec{\nabla} \times \left[R_m^{-1}(\vec{x}) \left(\vec{\nabla} \times \vec{h} \right) \right] +$$

$$+ \vec{\nabla} \times \left(\dot{\vec{u}} \times \vec{H}_0 \right), \qquad (26)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{h} = \vec{j}, \;\; \vec{\nabla} \times \vec{e} = -P_H \dot{\vec{h}}, \qquad (27)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{h} = 0, \;\; \vec{\nabla} \cdot \vec{e} = 0, \qquad (28)$$

$$\vec{j} = R_m(\vec{x}) \left(P_H^{-1} \vec{e} + \mu \dot{\vec{u}} \times \vec{H}_0 \right), \qquad (29)$$

$$\vec{b} = P_H \vec{h}, \;\; \vec{d} = \varepsilon \vec{e}. \qquad (30)$$

Условия сопряжения на упругой поверхности раздела двух магнитоупругих сред аналогичны (4)–(9).

Система (25)–(30) представлена в безразмерной форме, при этом при введении безразмерных величин в качестве характерных были приняты следующие: l – длина; v – скорость; ρ – массовая плотность; H – магнитное поле. Поведение магнитоупругой среды характеризуется двумя безразмерными комплексами: $P_H = \mu H^2 / \left(\rho v_0^2 \right)$ – магнитное давление и $R_m(\vec{x}) = R_0 f(\vec{x}) = l v_0 \mu \gamma(\vec{x})$ – коэффициент электропроводности ($R_0 = |R_m(\vec{x})|_{max}$), представляющий собой аналог магнитного числа Рейнольдса в магнитной гидродинамике.

Улучшенное приближение слабой проводимости, как и в случае МГД-сред, основывается на следующих допущениях: сильное магнитное поле $P_H >> 1$, соотношение порядков величин $R_0 \approx P_H^{-1} << 1$, и, как следствие, возмущенное электромагнитное поле генерируется упругими возмущениями. Как и в случае однородной среды исходим из разложений

$$\vec{u} = \vec{u}^0 + \vec{u}^1 R_0 + \ldots, \qquad \vec{h} = O + \vec{h}^1 R_0 + \ldots .$$

После подстановки этих разложений в систему (24)–(30) и приравнивания членов при одинаковых степенях R_m с учетом указанных выше допущений получаем первое приближение в виде

$$L(\vec{u}) = \rho_c(\vec{x})\ddot{\vec{u}}^0 - P_H R_m(\vec{x})(\vec{u}^0 \times \vec{H}_0) \times \vec{H}_0, \quad (31)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{h}_1 = f(\vec{x})(\dot{\vec{u}} \times \vec{H}_0), \quad (32)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{e}^1 = -\dot{\vec{h}}^1, \;\; \vec{\nabla} \times \vec{h}^1 = 0, \;\; \vec{\nabla} \cdot \vec{e}^1 = 0. \quad (33)$$

Систему (31)–(33) необходимо интегрировать таким образом: общее решение находится из уравнения (31), затем из уравнений (32), (33) достаточно находить только частные решения.

Приближение сильной электропроводности $R_0 >> 1$ выводится из разложений $\vec{u}$ и $\vec{h}$ по степеням R_0^{-1}. В первом приближении получаем уравнения, соответствующие идеальной проводимости:

$$L\left(\vec{u}^0\right) = \rho_c\left(\vec{x}\right)\ddot{\vec{u}}^0 - P_H\left[\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \left(\vec{u}^0 \times \vec{H}_0\right)\right] \times \vec{H}_0, \quad (34)$$

$$\vec{h}^0 = \vec{\nabla} \times \left(\vec{u}^0 \times \vec{H}_0\right), \;\; \vec{e}^0 = -P_H \dot{\vec{u}}^0 \times \vec{H}_0, \quad (35)$$

$$\vec{j}^0 = \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \left(\vec{u}^0 \times \vec{H}_0\right), \;\; \vec{\nabla} \cdot \vec{h}^0 = 0, \;\; \vec{\nabla} \cdot \vec{e}^0 = 0. \quad (36)$$

В данном случае достаточно найти только величину $\vec{u}^0$ из уравнения (34), а затем определить остальные полевые величины как частные решения уравнений (35) и (36).

Разделение векторных уравнений теории упругости в случае неоднородных сред представляет большие трудности и возможно только в некоторых частных случаях. В случае же магнитоупругих сред проблема усложняется, некоторые случаи разделения установлены в [2].

На основе приведенных выше моделей рассмотрено много задач дифракции магнитоупругих волн на локальных неоднородностях [6, 23]. Проведен анализ влияния электропроводности среды на рассеянное поле.

3. ДИФРАКЦИЯ МАГНИТОАКУСТИЧЕСКИХ ВОЛН НА ЦИЛИНДРИЧЕСКОМ ПРЕПЯТСТВИИ

Приведена постановка и построено решение новой задачи рассеяния цилиндрических волн давления на цилиндрическом препятствии в электропроводящей сжимаемой среде при действии магнитного поля H_{03}. В цилиндрической системе координат $(r, \theta, z) \Leftrightarrow (x_1, x_2, x_3)$ рассматривается идеальнопроводящий цилиндр $x_1 = a$, на который набегают цилиндрические волны давления, излучаемые сосредоточенным осевым источником, расположенном на расстоянии b от оси цилиндра. Внешняя среда описывается уравнениями магнитной гидродинамики в линейном акустическом приближении. Предполагается также, что среда имеет слабую электропроводность и на него действует достаточно сильное однородное постоянное магнитное поле H_{03}.

Уравнения (22) в цилиндрической системе координат, связанной с рассеивателем, записываются в виде [4]

$$\rho_0 \frac{\partial v_1}{\partial t} = -c_0^2 \frac{\partial g}{\partial x_1} - P_H R_m v_1,$$

$$\rho_0 \frac{\partial v_2}{\partial t} = -c_0^2 \frac{1}{x_1} \frac{\partial g}{\partial x_2} - P_H R_m v_2, \quad (37)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho_0 \frac{1}{x_1}\left[\frac{\partial}{\partial x_1}(v_1 x_1) + \frac{\partial}{\partial x_2} v_2\right] = 0,$$

$$\frac{1}{x_1}\left[\frac{\partial}{\partial x_1}(h_1 x_1) + \frac{\partial h_2}{\partial x_2}\right] = 0,$$

$$\frac{1}{x_1}\frac{\partial h_3}{\partial x_2} = v_2, \quad \frac{\partial h_3}{\partial x_1} = v_1, \quad (38)$$

$$\frac{1}{x_1}\left[\frac{\partial}{\partial x_1}(e_1 x_1) + \frac{\partial e_2}{\partial x_2}\right] = 0.$$

Условия сопряжения (4)–(9), отнесенные к невозмущенной поверхности $x_1 = 1$, с учетом идеальной проводимости цилиндра сводятся к таким (остальные условия выполняются тождественно):

$$v_1^p = 0, \quad R_m^p h_3^p = j^3, \quad e_2^p = 0. \tag{39}$$

Кроме того, искомые функции во внешней области должны удовлетворять условиям излучения и ограниченности при $x_1 \to \infty$.

Для определения вида излучаемой волны сначала решается задача излучения в системе координат $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3$, которая связана с излучателем. Искомые функции представляются в виде

$$f(x_1,\, x_2,\, x_3,\, t) = f^*(x_1,\, x_2,\, x_3) e^{-i\omega t}. \tag{40}$$

С учетом выражения (40) построены решения осесимметричной задачи излучения волн. Решения задачи дифракции волн (37)–(39) после применения теоремы сложения Неймана, представляющей общее поле в системе координат, связанной с рассеивателем, получены в виде бесконечных рядов, содержащих комбинации функций Бесселя и Ханкеля.

На основе общих решений построим приближенное решение для рассеянного поля плотности ρ в дальней зоне в длинноволновом приближении. В этом случае функции Ханкеля в решении заменяются их асимптотическими приближениями при больших значениях аргумента, а среди коэффициентов ряда C_v доминируют первые два C_0 и C_1. Кроме того, рассматриваются только малые значения $P_H R_m$. Тогда все функции, которые входят в решение, можно представить в виде асимптотических разложений по $P_H R_m$. Это дает возможность получить решение в виде аналитических формул и затем исследовать их. После громоздких преобразований получаем такие выражения для ρ:

$$\mathrm{Re}\,\rho = -2\mathrm{exp}\left[-\frac{1}{2}\frac{P_H R_m}{\rho_0 c_0}(b+x_1)\right] \times$$
$$\times\left[1+\frac{1}{16}\left(\frac{P_H R_m}{\omega\rho_0}\right)\right]^{-2} \times \tag{41}$$
$$\times\left(\cos kb - \frac{P_H R_m}{\omega\rho_0}\sin kb\right)(1+2\cos x_2),$$

$$\mathrm{Im}\,\rho = -2\mathrm{exp}\left[-\frac{1}{2}\frac{P_H R_m}{\rho_0 c_0}(b+x_1)\right] \times$$
$$\times\left[1+\frac{1}{16}\left(\frac{P_H R_m}{\omega\rho_0}\right)\right]^{-2} \times \tag{42}$$
$$\times\left(\sin kb - \frac{P_H R_m}{\omega\rho_0}\cos kb\right)(1+2\cos x_2).$$

В правых частях выражений (41) и (42) опущен множитель $\left(\dfrac{1}{kx_1}\right)^{1/2} e^{ikx_1}$, левые части нормированы множителем $4(kb)^{1/2}k^{-2}$. Критерий удаленности поля и максимальная относительная погрешность при заданной точности вычислений ϵ_e имеют вид $ipx_1 \geq \dfrac{4v^2-1}{8\epsilon_e}$, $\dfrac{1}{2}p^2\mathrm{ln} \leq \epsilon_e$. Если магнитное поле отсутствует ($R_m P_H = 0$), то из соотношений (41) и (42) следует известное решение соответствующей акустической задачи [9].

Из выражений (41) и (42) легко установить, что при фиксированных b и x_1 с увеличением напряженности невозмущенного магнитного поля H_0 или электропроводности σ амплитуда рассеянного поля уменьшается по экспоненциальному закону. Кроме того, изменение напряженности магнитного поля H_0 или электропроводности σ влияет на расположение нулей и экстремумов функций $\mathrm{Re}\,\rho$ и $\mathrm{Im}\,\rho$ по дуговой координате x_2, а это представляет собой значительный интерес при определении диаграмм напряженности рассеянного поля.

4. ФЛАТТЕР УПРУГОЙ ПЛАСТИНЫ В МГД-ПОТОКЕ

На основе приведенных выше уравнений для слабопроводящей МГД-среды рассматривается задача о подавлении аэроупругих колебаний пластины в потоке электропроводящей среды. Это достигается применением управления с обратными связями посредством воздействия электромагнитных (пондеромоторных) сил в отличие от широко распространенных подходов, основанных на граничном управлении [22].

Рассматривается упругая пластина толщины 2δ со срединной поверхностью $x_3 = 0$, обтекаемая сверху $x_3 \geq \delta$ элетропроводящим потоком с невозмущенной скоростью $\vec{V} = (V_{01},\, 0,\, 0)$ при действии однородного постоянного магнитного поля $\vec{H} = (0,\, 0,\, H_3)$. Снизу при $x_3 \leq -\delta$ пластина ограничена непроводящей покоящейся в начальном состоянии средой. Управление реализуется посредством магнитного поля $\vec{h}_c(x_1, x_2, t) = kw(x_1, t)\,\vec{h}^p(x_1, x_2, t)$, которое должно удовлетворять тем же уравнениям, что и объект управления ($\vec{h}^p$ – магнитное поле объекта, w – отклонение пластины, k – коэффициент управления с обратной связью). Наряду с $\vec{h}^c$ здесь учитываются и ее производные.

Математическая постановка, соответствующая уравнениям (22), включает уравнения (в безразмерном виде) для МГД-потока в верхней области $x_3 > 0$ [22, 25]

$$\hat{\rho}\left(\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \left(\vec{V}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{V}\right) = -\vec{\nabla}\hat{p} + P_H \vec{J}\times\vec{H},$$

$$\frac{\partial\hat{\rho}}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot\left(\hat{\rho}\vec{V}\right) = 0, \frac{dp}{d\hat{\rho}} = c_0^2,$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{H} = \vec{J}, \quad \vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{H}}{\partial t}, \vec{\nabla}\cdot\vec{D} = \rho_e, \quad \vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0,$$

$$\vec{D} = \varepsilon\vec{E}, \quad \vec{B} = \mu\vec{H}, \quad \vec{J} = R_m\left(\vec{E} + \vec{V}\times\vec{H}\right). \tag{43}$$

условия сопряжения на поверхности раздела $x_3 = 0$ (срединной поверхности) областей *1* ($x_3 > 0$) и *2* ($x_3 < 0$)

$$\vec{n}\cdot\left(\frac{\mu^1}{\mu^2}\vec{H}^1 - \vec{H}^2\right) = 0, \ \vec{n}\times\left(\vec{H}^1 - \vec{H}^2\right) = 0,$$

$$\vec{n}\cdot\left(\frac{\mu^1}{\mu^2}\vec{E}^1 - \vec{E}^2\right) = 0, \ \vec{n}\times\left(\vec{E}^1 - \vec{E}^2\right) = 0,$$

$$\vec{n}\cdot\left(\vec{V}^1 - \vec{V}^2\right) = 0,$$

$$\left[\left(\sigma_{ik}^1 + T_{ik}^1\right) - \left(\sigma_{ik}^2 + T_{ik}^2\right)\right] n_i = 0, \quad i,k = 1, 2, 3, \tag{44}$$

где $P_H = \mu H_0^2/\rho_q c_q^2$ – магнитное давление; $R_m = l c_q \mu\sigma << 1$ – магнитное число Рейнольдса; σ – электропроводность. Начальные условия в этой задаче не требуются. Аналогичная система представляется и для управляющего поля с индексом "c".

Вводятся предположения: $\rho_e = 0$, $\mu^1 = \mu^2$, искомые функции представляются как $\vec{H} = \vec{H}_0 + \vec{h}$, $\hat{p} = p_0 + p$, $\hat{\rho}_0 = \rho_0 + \rho$, $\vec{V} = V_0 + \vec{V}$, так что невозмущенные величины с индексом "0" не зависят от x и t, а возмущенные величины предполагаются малыми по сравнению с невозмущенными, что позволяет линеаризовать систему (43), (44). При этом применяется улучшенная аппроксимация слабой электропроводности (22).

В результате условия (44) сводятся к следующей системе:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + a_1\nabla^2\nabla^2 - a_2\frac{\partial^2}{\partial t^2}\nabla^2 + a_3\frac{\partial^4}{\partial t^4}\right) w =$$

$$= \left(1 - d_1\nabla^2 + d_2\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) q,$$

$$q = \sigma_{22}^p + T_{22}^p - T_{22}, \ v_2 = \left(\frac{\partial}{\partial t} + V_{01}\frac{\partial}{\partial x_1}\right) w,$$

$$T_{2i}^p = T_{2i}, (i = 1, 3), \ H_3^p = H_3. \tag{45}$$

Представляя решения для каждой полевой функции в виде $f(x_1, x_1, t) = F(x_2)\exp[i(\omega t + \alpha x_1)]$, приходим к задаче для определения функций, зависящих от x_2 в верхней и нижней областях. После подстановки этих решений в условия сопряжения (45) получаем условие устойчивости, которое после выделения действительной и мнимой частей приводит к связанной системе уравнений для определения критических частот и критических скоростей – чисел Маха M_{cr}.

С учетом указанных предположений из системы (43) и (45) выведено условие устойчивости, позволяющее определить критическое число Маха M_{cr} в зависимости от коэффициенты обратной связи k:

$$\frac{\Omega}{c_0^2\rho_0\eta}\frac{-\omega^2 + a_1\alpha^4 - a_2\omega^2\alpha^2 + a_3\omega^4}{1 - d_1\alpha^2 + d_2\omega^2} =$$

$$= (1 + i\alpha a_1)i\Omega + \frac{b_1}{\alpha}[(1 + i\alpha a_1)\eta^2 + \alpha^2 + \eta^2]k, \tag{46}$$

где α – волновое число; $\omega = \mathrm{Re}\,\omega + i\,\mathrm{Im}\,\omega$ – круговая частота. Сложные комплексные коэффициенты b_1, η^2 и a_p, d_q зависят от характерных параметров.

На основе соотношения (46) выведены условия устойчивости и управляемости, которые анализируются при конкретных безразмерных параметрах. Показано, что критическое число Маха M_{cr} возрастает с увеличением коэффициента обратной связи k (примерно на 50%).

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Представлены уравнения магнитной гидродинамики и магнитоупругости неоднородных сред. Построено улучшенное приближение слабой электропроводности (магнитное число Рейнольдса $R_m <<$ 1, а магнитное давление $P_H >> 1$, так что $R_m \sim P_H^{-1} << 1$), а также приближение идеальной электропроводности $R_m \to \infty$. Такие модели существенно расширяют возможности построения аналитических решений и последующего анализа.

Показано, что с увеличением напряженности невозмущенного магнитного поля H_0 или электропроводности σ амплитуда рассеянного поля уменьшается по экспоненциальному закону. Кроме того, изменение напряженности магнитного поля H_0 или электропроводности σ влияет на расположение нулей и экстремумов функций $\mathrm{Re}\rho$ и $\mathrm{Im}\rho$ по дуговой координате x_2, а это представляет значительный интерес при определении диаграмм направленности рассеянного поля.

Построены также аналитические решения задачи управления с обратными связями флаттерными колебаниями упругой пластины в МГД-потоке. Показано существенное улучшение динамической устойчивости системы, т.е. критическое число Маха M_{cr} может быть увеличено на 50%.

1. *Селезов И.Т.* К обратным задачам диагностики плазменных неоднородностей // Распределенное управление процессами в сплошных средах.– К.: Ин-т кибернетики АН УССР, 1972. С. 22–48.
2. *Селезов И. Т.* Некоторые приближенные формы уравнений движения магнитоупругих сред // Изв. АН СССР, Механика твердого тела.– 1975.– N 5.– С. 86-91.
3. *Селезов И.Т.* Дифракционное взаимодействие электромагнитных волн с клеткой // Нелинейные краевые задачи математической физики и их приложения.– К.: Ин-т математики АН УССР, 1993. – С. 119–121.
4. *Селезов I.Т., Кривонос Ю.Г.* Стацiонарна задача розсiяння цилiндричної магнiтоакустичної хвилi на iдеальнопровiдному цилiндрi // Доповiдi АН УРСР.– 1971.– N 2.– С. 169–173.
5. *Селезов И.Т., Корсунский С.В.* Нестационарные и нелинейные волны в электропроводящих средах.– Киев: Наукова думка, 1991.– 200 с.
6. *Селезов И.Т., Кривонос Ю.Г., Яковлев В.В.* Рассеяние волн локальными неоднородностями в сплошных средах.– Киев: Наукова думка, 1985.– 136 с.
7. *Селезов И.Т., Селезова Л.В.* Волны в магнитогидроупругих средах.– Киев: Наук. думка, 1975.– 164 с.
8. *Селезов И.Т., Яковлев В.В.* Дифракция волн на симметричных неоднородностях.– Киев: Наук. думка, 1978.– 146 с.
9. *Шендеров Е.П.* Дифракция цилиндрической звуковой волны на цилиндре // Акуст. журн.– 1961.– Т. 7, N 3.– С. 370–374.
10. *Baker G.A., Gammel J.L.* Elastic wave scattering by a flaw in an isotropic, homogeneous solid // J. Appl. Phys.– 1981.– V. 52, N 6.– P. 3729–3737.
11. *Berger T., Kim J., Lee C., Lim J.* Turbulent boundary layer control utilising the Lorentz force // Phys. Fluids.– 2000.– 12.– P. 631–649.
12. *Breuer K.S., Park J., Henoch C.* Actuation and control of a turbulent channel flow using Lorenz forces // Phys. Fluids.– 2004.– V. 16, N 4.– P. 897-907.
13. *Chattopadhyay A., Maugin G.A.* Magnetoelastic surface shear waves due to a momentary point source // J. Acoust. Soc. Amer.– 1993.– V. 94, N1.– P. 437–446.
14. *Choi H., Temam R., Moin P., Kim J.* Feedback control for unsteady flow and its application to the stochastic Burgers equation // J. Fluid Mech.– 1993.– 253.– P. 509–543.
15. *Eringen A.C., Maugin G.A.* Electrodynamics of continua. 1. Foundation of solid media. 2. Fluids and complex media. Springer-Verlag, 1990.
16. *Hasegawa H., Yoshiie K.* Tension of elastic solid with elastic circular-cylindrical inclusion // JSME Int. J.– 1996.– V. 39, N 2.– P. 186–191.
17. *Hinze M.* Control of weakly conductive fluids by near wall Lorentz force // GAMM Mitteilungen.– 2007.– V. 30, N 1.– P. 149–158.
18. *Hsiao F.-B., Liu C.-F., Shyu J.-Y.* Control of wall-separated flow by internal acoustic excitation // AIAA J.– 1990.– V. 28, N 8.– P. 1440–1446.
19. *Hook J.R.* Separation of the vector wave equation of elasticity for certain types of inhomogeneous isotopic media // J. Acoust. Soc. Amer.– 1961.– V. 33, N 3.– P. 302–313.
20. *Morse F.M., Feshbach H.* Methods of theoretical physics. Vol.1 and 2.: New York, McGraw-Hill Inc., – 1953.– 930 and 880 p.
21. *Posdziech O., Grundmann R.* Electromagnetic control of seawater flow around circular cylinders // Eur. J. Mech., **B**, Fluids.– 2001.– 20.– P. 255–274.
22. *Selezov I.T.* Stabilization of a magnetohydrodynamic flutter instability by distributed control // Magnetohydrodynamics.– 1973.– V. 6, N 3.– P. 326–330.
23. *Selezov I.T.* Diffraction of waves by radially inhomogeneous inclusions // Physical Express.– 1993.– V. 1, N 2.– P. 101–115.
24. *Selezov I.T.* Effect of the electric field on wave motion in a thin suspension layer flowing over an inclined plane // J. Intelligent Material Systems and Structures.– 1996.– V. 7, N 5.– P. 507–510.

    Selezov I. Wave instabilities of MHD-flow over elastic surface and their cancellation by feedback control./ Book of Abstracts. Annual Meeting GAMM 98, Bremen, Germany, April 6–9,– 1998,– P. 127.
25. *Selezov I.* Some models of coupled magnetoelastic fields and their application to the investigation of propagation and diffraction of waves // J. Math. Sciences.– 2001.– 104(5).– P. 1490–1500.
26. *Singh S.J., Ben-Menahem A.* Decoupling of the vector wave equation of elasticity for radially heterogeneous media // J. Acoust. Soc. Amer.– 1969.– V. 46, N 3, Pt. 2.– P. 655–660.
27. *Weier T., Gerbeth G.* Control of separated flows by time periodic Lorentz forces // Eur. J. Mechanics, **B**, Fluids.– 2004.– N 23.– P. 835–849.