

## **О связи критических состояний конических оболочек при простом и сложном вращениях с частотами собственных прецессионных колебаний**

**В. И. Гуляев, И. Л. Соловьев, М. А. Белова**

Национальный транспортный университет, Киев, Украина

*На основании анализа зависимостей частот собственных прецессионных колебаний вращающихся конических оболочек от их угловой скорости установлены критические состояния оболочек, сопровождаемые их выпучиванием при простом вращении и резонансными колебаниями при сложном вращении. Показано, что путем выбора соответствующих систем отсчета можно придать сходство формам их закритического поведения.*

**Ключевые слова:** вращающиеся оболочки, потеря устойчивости равновесия, собственные прецессионные колебания, сложное вращение, прецессионные резонансы.

**Введение.** Основными конструктивными элементами многих энергетических, электрических и транспортных машин являются вращающиеся валы и роторы. Выполняя важные функции, роторы часто служат главным источником возбуждения вредных вибраций. Интенсивность последних зависит от ряда факторов, наиболее существенный из которых – близость рабочих скоростей к так называемым критическим скоростям. Критические состояния ротора могут возникать в режимах как простого [1, 2], так и сложного [3, 4] вращений. Поскольку указанные виды критических состояний обусловлены действием неконсервативных сил, зависящих от характера движения ротора и его упругих смещений, формы их поведения при простом и сложном вращении являются разными.

Характерная особенность критического состояния установленных на упругих валах роторов при простом вращении – статическая потеря устойчивости, при которой ось вала прогибается в плоскости, вращающейся вместе с системой. Поскольку силы, выводящие вал из состояния неустойчивого равновесия, зависят от величины прогиба его оси, они являются позиционными. Поэтому включение этих сил в разрешающие уравнения упругих колебаний приводит к изменению их структуры. При теоретическом анализе явления статической потери устойчивости обычно рассматриваются упрощенные расчетные модели, в которых роторы заменяются абсолютно твердыми телами, и принимается, что критическое состояние системы может наступить из-за упругой податливости вала. Ранее [2, 5] показано, что эффекты возникновения критических состояний могут быть свойственны и самому ротору, если он тонкостенный и обладает достаточно упругой податливостью.

Другой тип критических состояний тонкостенного упругого ротора может возникать при сложном вращении [3–6], когда он установлен на подвижном теле и его ось вращения совершает дополнительный принуди-

тельный поворот вследствие изменения пространственной ориентации несущего тела. В этом случае в результате суперпозиции и гироскопического взаимодействия различных видов вращений генерируются упругие прецессионные колебания, которые при определенных значениях угловой скорости собственного вращения могут приобрести резонансный характер. В системе координат, связанной с носителем, указанные колебания представляются в форме некоторого стационарного деформированного состояния, симметричного относительно плоскости, содержащей векторы угловых скоростей вращения оболочки и поворота носителя.

Явлениям бифуркационного выпучивания тонких оболочек при простом вращении и их прецессионных колебаний при сложном вращении можно придать схожие формы посредством выбора соответствующих систем отсчета. Такой подход позволяет добиться определенного сходства также в постановках задач о критическом состоянии оболочек при простом и сложном вращении. В первом случае ставится задача о собственных значениях однородной системы линеаризованных обыкновенных дифференциальных уравнений статики, во втором – краевая задача для неоднородной системы линеаризованных обыкновенных дифференциальных уравнений динамики. Как в первом, так и во втором случае критерием наступления бифуркационного состояния является вырождение левой части линеаризованных уравнений [7].

На основании предложенного подхода в [5, 6] путем непосредственного решения поставленных задач установлены критические значения угловых скоростей простого и сложного вращений и найдены формы их бифуркаций. Для второго случая изучен также характер прецессионных колебаний в пред- и закритических состояниях. Однако представляется весьма важным исследование указанных явлений с позиции анализа частот собственных колебаний вращающихся оболочек. Известно [8–11], что простое вращение оболочки приводит не только к количественной эволюции спектра ее собственных частот, связанной с преднапряжением, но и к качественным изменениям, которые заключаются в расщеплении кратных частот колебаний и в переходе от колебаний по стоячим формам к формам, бегущим в окружном направлении. При этом для одной из расщепленных частот волна бежит в направлении вращения (прямая прецессия), для другой – в противоположном направлении (обратная прецессия). Ниже показано, что состояния, в которых значения пары расщепленных частот опять становятся равными и обращаются в нуль, соответствуют статической бифуркации оболочки при простом вращении, и в случаях, когда частота обратной прецессии равна угловой скорости простого вращения оболочки, ее сложное вращение сопровождается прецессионными резонансами.

**Уравнения движения элемента оболочки при сложном вращении.** Возникающие при простом и сложном вращении критические состояния равновесия и движения тонкостенного упругого ротора, моделируемого тонкой оболочкой, характеризуются тем, что в обоих случаях бифуркационные эффекты возникают в окрестности некоторого ее преднапряженного состояния, вызванного простым вращением со скоростью  $\omega$ . Подобными оказываются также формы потери устойчивости, реализуемые во

вращающейся и неподвижной системах координат в обоих случаях деформированием оболочки по первой (наименее энергоемкой) гармонике в окружном направлении. Этими сходствами обусловлена универсальность методик нахождения критических состояний в обеих постановках, отличающихся в основном тем, что для задачи статического выпучивания оболочки разрешающие уравнения формулируются во вращающейся системе координат, в то время как уравнения ее прецессионных колебаний составляются в системе координат, связанной с носителем. Как известно [8–11], собственные колебания вращающихся оболочек также оказываются прецессионными. Для анализа связи этих колебаний с критическими состояниями при их простом и сложном вращении выделим из спектра их собственных форм такие, в которых прецессия по окружной координате также происходит по первой гармонике. Поскольку при таких подходах разрешающие уравнения задач статической потери устойчивости и собственных прецессионных колебаний представляют собой частный случай уравнений прецессионных колебаний оболочки при сложном вращении, сформулируем вначале задачу об определении прецессионных резонансов тонких осесимметричных оболочек при сложном вращении, рассматривая задачи собственных колебаний и о статическом выпучивании как ее более простые варианты.

Примем, что тонкая коническая оболочка своим меньшим основанием жестко связана с абсолютно твердым носителем, вращающимся вместе с системой координат  $Oxuz$  с постоянной по модулю угловой скоростью  $\omega$  относительно оси симметрии  $Oz$ , которая, в свою очередь, совершает плоский принудительный поворот с постоянной скоростью  $\omega_0$ . На контуре большого основания оболочка свободна от внешних сил и связей.

Введем правые системы координат:  $O X^* Y^* Z^*$  – инерциальная система координат с началом в центре опорного контура оболочки, ось  $OY^*$  которой коллинеарна вектору  $\omega_0$ ;  $OXYZ$  – поворачивающаяся система координат, неподвижная ось  $OY$  которой совпадает с осью  $OY^*$ , ось  $OZ$  совпадает с осью  $Oz$  и поворачивается вместе с ней. На срединной поверхности оболочки введем ортогональную криволинейную систему координат  $Ox^1 x^2 x^3$ , в которой координатная линия  $x^1$  лежит в образующем сечении,  $x^2$  направлена в окружном направлении,  $x^3$  – по внутренней нормали к поверхности оболочки.

Полагая, что  $\omega \gg \omega_0$ , можно принять, что вызванные сложным вращением колебания оболочки являются установившимися, и для их исследования будем рассматривать оболочку в двух состояниях. В первом состоянии оболочка совершает простое вращение с угловой скоростью  $\omega$ . Она напряжена стационарными осесимметричными центробежными силами инерции и колебаний не совершает. Во втором состоянии, которое связано с поворотом системы, на элементы оболочки действуют дополнительные силы инерции, бегущие в окружном направлении и периодически изменяющиеся во времени. Последние возбуждают малые колебания оболочки в форме

гармонической волны, прецессирующей с частотой  $\omega$  относительно исходного напряженного состояния. Условие  $\omega \gg \omega_0$  позволяет рассматривать эти состояния по очереди, используя решение уравнений для первого состояния при вычислении коэффициентов уравнений колебаний оболочки во втором состоянии.

С учетом наличия в оболочке при сложном вращении предварительных напряжений простого вращения воспользуемся геометрически нелинейными уравнениями динамического равновесия ее элемента в общем виде [12], которые в системе  $Oxuz$  имеют следующую форму:

$$\nabla_\alpha \mathbf{T}^\alpha + \mathbf{p} = 0; \quad \nabla_\alpha \mathbf{M}^\alpha + (\mathbf{e}_\alpha \times \mathbf{T}^\alpha) \sqrt{a} = 0 \quad (\alpha = 1, 2), \quad (1)$$

где  $\mathbf{T}^\alpha$  – вектор внутренних сил;  $\mathbf{M}^\alpha$  – вектор внутренних моментов;  $\nabla_\alpha$  – символ ковариантной производной;  $\mathbf{p}$  – вектор интенсивности внешних сил.

Используя соотношения связи между контравариантными компонентами функций внутренних сил  $T^{ij}$  и моментов  $M^{ij}$  и ковариантными составляющими функций деформации  $\varepsilon_{ij}$  и изменения кривизн  $\mu_{ij}$

$$\begin{aligned} T^{ij} &= E h \varepsilon_{\alpha\beta} (a^{ij} a^{\alpha\beta} + (1-\nu) a^{i\alpha} a^{j\beta}) / (1-\nu^2); \\ M^{ij} &= E h^3 \mu_{\alpha\beta} (a^{ij} a^{\alpha\beta} + (1-\nu) a^{i\alpha} a^{j\beta}) / 12(1-\nu^2) \end{aligned} \quad (2)$$

и выражая эти функции через ковариантные компоненты  $u_1, u_2, u_3$  вектора перемещений  $\mathbf{u}$  и углы поворота  $\vartheta_i$  сечений

$$\begin{aligned} \bar{\varepsilon}_{ij} &= (\mathbf{e}_i \cdot \partial \mathbf{u} / \partial x^j + \mathbf{e}_j \cdot \partial \mathbf{u} / \partial x^i + \vartheta_i \cdot \vartheta_j) / 2; \\ \vartheta_i &= (\partial \mathbf{u} / \partial x^i) \mathbf{e}_3; \\ \mu_{ij} &= (\mathbf{e}^k / c^{ik} \cdot \partial \bar{\Omega} / \partial x^j + \mathbf{e}^k / c^{jk} \cdot \partial \bar{\Omega} / \partial x^i) / 2; \\ \bar{\Omega} &= c^{ij} \vartheta_i \mathbf{e}_j \quad (i, j, k = 1, 2) \end{aligned} \quad (3)$$

с учетом при раскрытии векторных операций в (1) изменения параметров  $b_i^j$  второй квадратичной формы в процессе деформации оболочки, получаем нелинейные уравнения ее динамического равновесия.

В рассматриваемом случае роль активных сил, действующих на оболочку, играют только силы инерции. Для их определения используем равенство  $\mathbf{p} = -\gamma h \mathbf{a}$ , где  $\gamma$  – плотность материала оболочки;  $h$  – ее толщина;  $\mathbf{a}$  – вектор абсолютного ускорения, рассчитываемый по формуле  $\mathbf{a} = \mathbf{a}_e + \mathbf{a}_r + \mathbf{a}_c$ . Векторы переносного ( $\mathbf{a}_e$ ), относительного ( $\mathbf{a}_r$ ) и кориолисова ( $\mathbf{a}_c$ ) ускорений вычисляются по соотношениям [13]

$$\mathbf{a}_e = \bar{\varepsilon} \times \bar{\rho} + \bar{\Omega} \times (\bar{\Omega} \times \bar{\rho}); \quad \mathbf{a}_r = d^2 \bar{\rho} / dt^2; \quad \mathbf{a}_c = 2\bar{\Omega} \times (d\bar{\rho}/dt), \quad (4)$$

где  $\bar{\Omega} = \omega_0 + \omega$ ,  $\bar{\varepsilon} = \omega_0 \times \omega$  – соответственно векторы абсолютной угловой скорости и углового ускорения подвижной системы координат  $Oxyz$ ;  $\bar{\rho}$  – радиус-вектор элемента оболочки в этой системе.

В результате выполнения векторных операций (4) и пренебрежения величиной  $\omega_0^2$  найдем контравариантные компоненты векторов ускорений:

$$\begin{cases} a_e^1 = -\omega^2 r \sin \varphi / \sqrt{a_{11}} + 2\omega_0 \omega r \sin(\omega t + x^2) \cos \varphi / \sqrt{a_{11}} - \\ \quad - \omega^2 u_1 \sin^2 \varphi / a_{11} + \omega^2 u_3 \sin \varphi \cos \varphi / \sqrt{a_{11}}; \\ a_e^2 = -\omega^2 u_2 / a_{22}; \\ a_e^3 = \omega^2 r \cos \varphi + 2\omega_0 \omega r \sin(\omega t + x^2) \sin \varphi + \\ \quad + \omega^2 (u_1 \sin \varphi / \sqrt{a_{11}} - u_3 \cos \varphi) \cos \varphi; \\ a_c^1 = -2\omega \dot{u}_2 \sin \varphi / \sqrt{a_{11} a_{22}}; \\ a_c^2 = 2\omega \dot{u}_1 \sin \varphi / \sqrt{a_{11} a_{22}} - 2\omega \dot{u}_3 \cos \varphi / \sqrt{a_{22}}; \\ a_c^3 = 2\omega \dot{u}_2 \cos \varphi / \sqrt{a_{22}}; \\ a_r^1 = \ddot{u}_1 / a_{11}; \quad a_r^2 = \ddot{u}_2 / a_{22}; \quad a_r^3 = \ddot{u}_3. \end{cases} \quad (5)$$

Эти ускорения кроме слагаемых, зависящих только от независимой переменной  $t$ , включают также слагаемые с зависимыми переменными  $u_1, u_2, u_3, \dot{u}_1, \dot{u}_2, \dot{u}_3$ , которые вводятся в левые части разрешающих уравнений, что приводит к перестройке структуры уравнений и возможности их вырождения, связанной с возникновением критических состояний.

Уравнения динамики оболочки при сложном вращении следуют из соотношений (1)–(3), преобразованных с учетом (4), (5). Однако в равенствах, содержащих большую величину  $\omega^2$ , учитываются изменения геометрии оболочки при ее нагружении и вместо  $r$  и  $\varphi$ , определяющих соответственно расстояние от оси вращения до рассматриваемого сечения и угол наклона касательной к образующей, используются величины  $r + \Delta r$ ,  $\varphi + \Delta \varphi_1^*$ .

Отметим, что наличие множителей  $\sin(\omega t + x^2)$  в правых частях уравнений (5) связано с видом инерционной нагрузки на оболочку, которая является гармонической по  $x^2, t$  и с частотой  $\omega$  обегает ее по окружности, инициируя прецессионные колебания с частотой  $\omega$ . При моделировании возбуждаемых этими силами прецессионных колебаний в силу условий  $\omega \gg \omega_0$  принимаем, что они малы. Поэтому вначале выделяем напряженно-деформированное состояние простого вращения со скоростью  $\omega$  и затем исследуем прецессионные колебания с помощью уравнений движения, линеаризованных в окрестности первого состояния [3]:

$$\left\{ \begin{aligned}
 & \partial \Delta T^{11} / \partial x^1 + \partial \Delta T^{12} / \partial x^2 + (2\Gamma_{11}^1 + \Gamma_{21}^2) \Delta T^{11} + \Gamma_{22}^1 \Delta T^{22} - b_1^1 \Delta T^{13} - \\
 & - \gamma h [-\omega^2 \sin \varphi \Delta r / \sqrt{a_{11}} - \omega^2 r \cos \varphi \Delta \vartheta_1^* / \sqrt{a_{11}} - \\
 & - 2\omega \sin \varphi \Delta \dot{u}_2 / \sqrt{a_{11} a_{22}} + \Delta \ddot{u}_1 / a_{11}] = 2\gamma h \omega_0 \omega r \sin(\omega t + x^2) \cos \varphi / \sqrt{a_{11}}; \\
 & \partial \Delta T^{12} / \partial x^1 + \partial \Delta T^{22} / \partial x^2 + (3\Gamma_{12}^2 + \Gamma_{11}^1) \Delta T^{12} - b_2^2 \Delta T^{23} - \\
 & - \gamma h [-\omega^2 r \cos \varphi \Delta \vartheta_2^* / \sqrt{a_{22}} + 2\omega \sin \varphi \Delta \dot{u}_1 / \sqrt{a_{11} a_{22}} - \\
 & - 2\omega \cos \varphi \Delta \dot{u}_3 / \sqrt{a_{22}} + \Delta \ddot{u}_2 / a_{22} - \omega^2 \Delta u_2 / a_{22}] = 0; \\
 & \partial \Delta T^{13} / \partial x^1 + \partial \Delta T^{23} / \partial x^2 + (\Gamma_{12}^2 + \Gamma_{11}^1) \Delta T^{13} + b_{11} \Delta T^{11} + \\
 & + \Delta b_{11} T^{11} + b_{22} \Delta T^{22} + \Delta b_{22} T^{22} - \\
 & - \gamma h [\omega^2 \cos \varphi \Delta r - \omega^2 r \sin \varphi \Delta \vartheta_1^* + 2\omega \cos \varphi \Delta \dot{u}_2 / \sqrt{a_{22}} + \Delta \dot{u}_3] = \\
 & = 2\gamma h \omega_0 \omega r \sin \varphi \sin(\omega t + x^2).
 \end{aligned} \right. \quad (6)$$

Слагаемые с множителями  $\Delta r$ ,  $\Delta \vartheta_1^*$ ,  $\Delta \vartheta_2^*$  в левых частях этих уравнений определяют так называемые позиционные силы, слагаемые с множителями  $\Delta \dot{u}_1$ ,  $\Delta \dot{u}_2$ ,  $\Delta \dot{u}_3$  характеризуют гироскопические силы, выражения в правых частях играют роль активных сил. Из-за их явной зависимости от функции  $\sin(\omega t + x^2)$  они генерируют гармонические волны, распространяющиеся в окружном направлении против направления вращения (обратная прецессия). Поскольку угловая скорость их прецессирования по модулю равна угловой скорости собственного вращения, для наблюдателя в неподвижной системе координат они представляются в форме стоячей волны, описываемой равенствами

$$\left\{ \begin{aligned}
 & \Delta u_1 = u_{(1)}(x^1) \sin(\omega t + x^2); \\
 & \Delta u_2 = u_{(2)}(x^1) \cos(\omega t + x^2); \\
 & \Delta u_3 = u_{(3)}(x^1) \sin(\omega t + x^2); \\
 & \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\
 & \Delta T^{11} = T^{(11)}(x^1) \sin(\omega t + x^2); \\
 & \Delta T^{22} = T^{(22)}(x^1) \sin(\omega t + x^2); \\
 & \Delta T^{23} = T^{(23)}(x^1) \cos(\omega t + x^2).
 \end{aligned} \right. \quad (7)$$

Подставив (7) в (6), получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений, которая решается методом начальных параметров [3]. Частные решения этих уравнений строятся с помощью метода Рунге-Кутты.

**Уравнения собственных колебаний вращающихся оболочек.** Путем исключения из (6) слагаемых, содержащих множитель  $\omega_0$ , получаем уравнения малых свободных колебаний оболочки при простом вращении. Поскольку левая часть преобразованных уравнений содержит искомые функции



перемещений  $\Delta u_1, \Delta u_2, \Delta u_3$ , а также их первые и вторые производные по времени, они не могут описывать собственные колебания в форме стоячих волн и могут иметь решения только в форме волн, бегущих в окружном направлении и аппроксимируемых первой гармоникой по фазовой координате  $ct + x^2$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta u_1 = u_{(1)}(x^1) \sin(ct + x^2); \\ \Delta u_2 = u_{(2)}(x^1) \cos(ct + x^2); \\ \Delta u_3 = u_{(3)}(x^1) \sin(ct + x^2); \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ \Delta T^{11} = T^{(11)}(x^1) \sin(ct + x^2); \\ \Delta T^{22} = T^{(22)}(x^1) \sin(ct + x^2); \\ \Delta T^{23} = T^{(23)}(x^1) \cos(ct + x^2), \end{array} \right. \quad (8)$$

где  $c$  – частота свободных колебаний. Очевидно, что положительное значение  $c$  соответствует обратной прецессии, отрицательное – прямой прецессии.

На основании (6) и (8) строится однородная система обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\left\{ \begin{array}{l} dT^{(11)}/dx^1 - T^{(12)} + (2\Gamma_{11}^1 + \Gamma_{21}^2)T^{(11)} + \Gamma_{22}^1 T^{(22)} - b_1^1 T^{(13)} - \\ - \gamma h(-\omega^2 r \cos \varphi \vartheta_{(1)}/a_{11} - \omega^2 u_{(1)} \sin^2 \varphi/a_{11} + \omega^2 u_{(3)} \sin \varphi \cos \varphi/\sqrt{a_{11}} - \\ - 2\omega c u_{(2)} \sin \varphi/\sqrt{a_{11} a_{22}} - c^2 u_{(1)}/a_{11}) = 0; \\ dT^{(12)}/dx^1 + T^{(22)} + (3\Gamma_{12}^2 + \Gamma_{11}^1)T^{(12)} - b_2^2 T^{(23)} - \\ - \gamma h(-\omega^2 u_{(2)}/a_{22} - 2\omega c u_{(1)} \sin \varphi/\sqrt{a_{11} a_{22}} + 2\omega c u_{(3)} \cos \varphi/\sqrt{a_{22}} - \\ - c^2 u_{(2)}/a_{22} - \omega^2 r \cos \varphi \vartheta_{(2)}/a_{22}) = 0; \\ dT^{(13)}/dx^1 - T^{(23)} + (\Gamma_{12}^2 + \Gamma_{11}^1)T^{(13)} + b_{11} T^{(11)} - \mu_{(11)} T_0^{11} + b_{22} T^{(22)} - \\ - \mu_{(22)} T_0^{22} - \gamma h(-\omega^2 r \sin \varphi \vartheta_{(1)}/\sqrt{a_{11}} + \omega^2 u_{(1)} \sin \varphi \cos \varphi/\sqrt{a_{11}} - \\ - \omega^2 u_{(3)} \cos^2 \varphi + 2\omega c u_{(2)} \cos \varphi/\sqrt{a_{22}} - c^2 u_{(3)}) = 0. \end{array} \right. \quad (9)$$

Значения  $c$ , при которых она имеет нетривиальное решение для заданной скорости  $\omega$ , равны частотам собственных прецессионных колебаний, а сами решения определяют формы бегущих волн.

**Уравнения критических состояний тонкостенного упругого ротора при простом вращении.** Моделирование потери устойчивости оболочечного ротора при простом вращении проводится на основании приведенных выше соотношений, упрощенных с учетом того, что  $\omega_0 = 0$ , и оболочка не

совершает колебаний. В таком случае нет необходимости в использовании поворачивающейся системы координат  $OXYZ$  и можно рассматривать статическое деформирование оболочки во вращающейся системе координат  $Oxyz$ . При этом вместо (5) имеем

$$\begin{aligned} a_e^1 &= -\omega^2 r \sin \varphi / \sqrt{a_{11}}; & a_e^2 &= 0; & a_e^3 &= \omega^2 r \cos \varphi; \\ a_c^1 &= 0; & a_c^2 &= 0; & a_c^3 &= 0; & a_r^1 &= 0; & a_r^2 &= 0; & a_r^3 &= 0. \end{aligned} \quad (10)$$

Подставляя равенства (10) в уравнения (1) и линеаризуя их в окрестности состояния простого вращения, получаем однородную систему уравнений равновесия оболочек в некотором возмущенном, в общем случае неосесимметричном, состоянии:

$$\begin{cases} \partial \Delta T^{11} / \partial x^1 + \partial \Delta T^{12} / \partial x^2 + (2\Gamma_{11}^1 + \Gamma_{21}^2) \Delta T^{11} + \Gamma_{22}^1 \Delta T^{22} - b_1^1 \Delta T^{13} - \\ - \gamma h [-\omega^2 r \cos \varphi \Delta \vartheta_1^* / \sqrt{a_{11}} - \omega^2 \Delta u_1 \sin^2 \varphi / a_{11} + \\ + \omega^2 \Delta u_3 \sin \varphi \cos \varphi / \sqrt{a_{11}}] = 0; \\ \partial \Delta T^{12} / \partial x^1 + \partial \Delta T^{22} / \partial x^2 + (3\Gamma_{12}^2 + \Gamma_{11}^1) \Delta T^{12} - \\ - b_2^2 \Delta T^{23} + \gamma h \omega^2 r \cos \varphi \Delta \vartheta_2^* = 0; \\ \partial \Delta T^{13} / \partial x^1 + \partial \Delta T^{23} / \partial x^2 + (\Gamma_{12}^2 + \Gamma_{11}^1) \Delta T^{13} + b_{11} \Delta T^{11} + \\ + \Delta b_1^1 T^{11} + b_{22} \Delta T^{22} + \Delta b_{22} T^{22} - \\ - \gamma h [-\omega^2 r \sin \varphi \Delta \vartheta_1^* + \omega^2 \Delta u_1 \sin \varphi \cos \varphi / \sqrt{a_{11}} - \omega^2 \Delta u_3 \cos^2 \varphi] = 0. \end{cases} \quad (11)$$

Данная система дополняется соответствующими линеаризованными соотношениями связи между функциями внутренних сил и моментов, деформаций и изменения кривизн, а также равенствами, определяющими функции  $\Delta \vartheta_1^*$ ,  $\Delta \vartheta_2^*$ . Как и выше, полагаем, что выпучивание оболочки может происходить по наименее энергоемкой форме, в которой искомые переменные в зависимости от их четности или нечетности по координате  $x^2$  представляются в виде

$$\begin{cases} \Delta u_1 = u_{(1)}(x^1) \sin x^2; \\ \Delta u_2 = u_{(2)}(x^1) \cos x^2; \\ \Delta u_3 = u_{(3)}(x^1) \sin x^2; \\ \dots \dots \dots \dots \dots \\ \Delta T^{(11)} = T^{(11)}(x^1) \sin x^2; \\ \Delta T^{22} = T^{(22)}(x^1) \sin x^2; \\ \Delta T^{23} = T^{(23)}(x^1) \cos x^2. \end{cases} \quad (12)$$



Значения  $\omega$ , при которых однородная система (11) имеет нетривиальные решения, являются критическими, а сами решения определяют формы потери устойчивости.

**Результаты исследований.** С помощью предложенного подхода проанализирована зависимость критических состояний конических оболочек при простом и сложном вращениях от частоты их собственных колебаний. По уравнениям срединной поверхности оболочки, задаваемым в виде

$$x = f \cos x^2; \quad y = f \sin x^2; \quad z = x^1,$$

где  $f = kx^1 + r$ ;  $k = \operatorname{tg} \alpha$ , вычислялись параметры первой и второй квадратичных форм  $a_{11}, a_{22}, b_1^1, b_2^2, b_{11}, b_{22}$ .

Были выбраны три оболочки с углами конусности  $2\alpha = 150, 120$  и  $90^\circ$ . Во всех случаях длина образующей  $l = 0,6$  м, толщина  $h = 0,001$  м. Своим меньшим основанием (диаметр  $2r = 0,1$  м) оболочки были жестко защемлены, на контуре большого основания задавались условия свободного края.

Значения критических скоростей при простом вращении  $\omega_i^{\text{кр}}$  и резонансных скоростей при сложном вращении  $\omega_i^{\text{рез}}$  для рассмотренных оболочек приведены в таблице. Как видно, значения первых резонансных частот ( $\omega_1^{\text{рез}}$ ) находятся ниже значений первых критических скоростей ( $\omega_1^{\text{кр}}$ ), поэтому бифуркационные состояния сложного вращения наступают раньше.

**Критические и резонансные значения угловой скорости вращения конической оболочки**

$\omega_i$	$2\alpha$ (град), равное		
	150	120	90
$\omega_1^{\text{кр}}$	1661	–	1040
$\omega_2^{\text{кр}}$	1844	–	–
$\omega_3^{\text{кр}}$	2192	–	–
$\omega_4^{\text{кр}}$	2389	–	–
$\omega_1^{\text{рез}}$	1011	1196	1624
$\omega_2^{\text{рез}}$	1332	–	–
$\omega_3^{\text{рез}}$	1583	–	–
$\omega_4^{\text{рез}}$	1829	–	–

Для установления зависимости между этими скоростями построены частотные кривые вращающейся конической оболочки при  $i = 1-5$  для случая  $2\alpha = 150^\circ$  (рис. 1). Кривые, расположенные в правом квадранте ( $c_i^+ > 0$ ), соответствуют обратной прецессии, кривые в левом квадранте ( $c_i^- < 0$ ) – прямой прецессии. Следует отметить, что зависимость  $c_i$  от  $\omega$  является

существенной, поэтому встречающаяся иногда в практике проектировщиков методика определения резонансных частот оболочечных элементов роторов по значениям частот колебаний соответствующих невращающихся оболочек может привести к большим погрешностям.

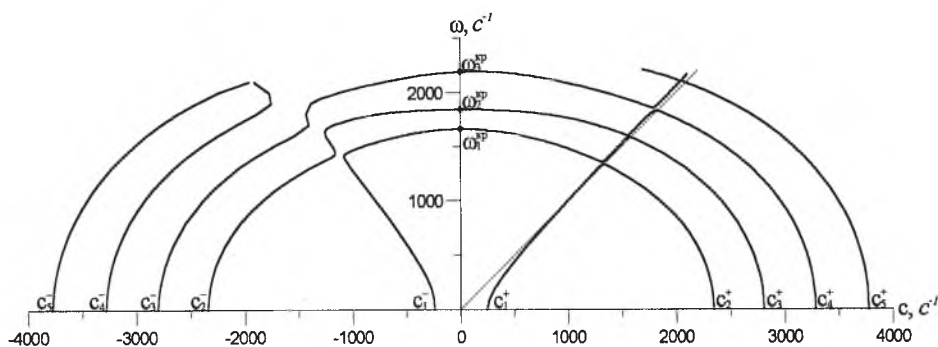


Рис. 1. Частотные кривые вращающейся конической оболочки.

При  $\omega = 0$  имеет место равенство  $|c_i^-| = c_i^+$ , свидетельствующее о том, что собственные частоты невращающейся оболочки кратные. Им соответствуют стоячие формы волн, меридиональные сечения которых показаны на рис. 2, а, б.

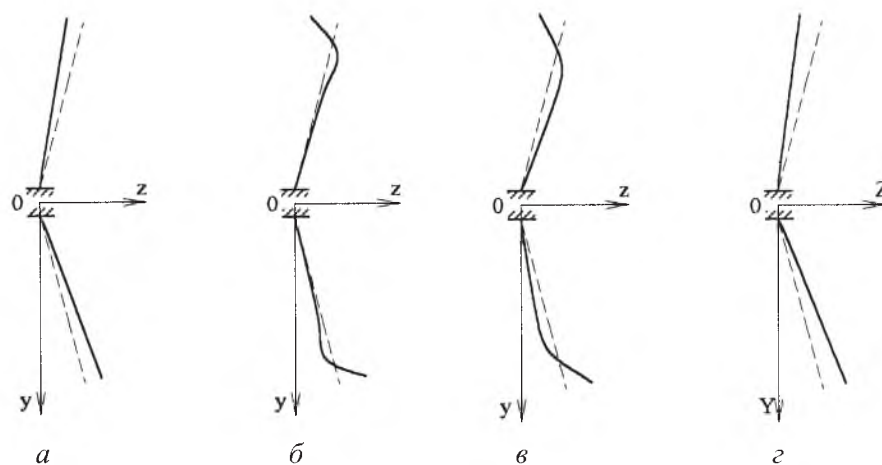


Рис. 2. Формы деформирования оболочки: а, б – соответственно первая ( $i = 1$ ) и вторая ( $i = 2$ ) формы собственных колебаний; в – форма потери устойчивости; г – форма предрезонансных колебаний.

С изменением  $\omega$  характеристические кривые  $c_i^-(\omega)$  и  $c_i^+(\omega)$  теряют симметричность относительно оси ординат, т.е. кратные частоты расщепляются. Поэтому собственные прямая и обратная прецессии при одном и том же значении  $\omega$  реализуются с разными скоростями  $c_i$ . Из рис. 1 следует, что характеристические кривые имеют довольно сложный вид с наличием большого числа точек близкого прохождения, в окрестности которых про-

исходит обмен формами колебаний. Так, кривая, исходящая из точки  $c_1^-$  на оси абсцисс, сближается с кривой, исходящей из точки  $c_2^-$ , но они не пересекаются и после сближения являются как бы продолжением друг друга. При этом происходит также обмен формами колебаний. В то же время их антиподы (кривые  $c_1^+$  и  $c_2^+$ ) при сближении соединяются и замыкают друг друга. Кривая  $c_1^-$  после отдаления от кривой  $c_2^-$  пересекает ось координат в точке  $\omega_1^{кр}$  и сближается с точкой соединения кривых  $c_1^+$  и  $c_2^+$ , однако не касается их, а резко изменяет направление и отдалается, являясь как бы продолжением кривой  $c_1^+$ . При этом в окрестности точки сближения также происходит обмен формами колебаний. Затем кривая  $c_1^-$  сближается и соединяется с кривой  $c_3^+$ .

Аналогично ведет себя кривая  $c_2^-$  после отдаления от зоны сближения ее с кривой  $c_1^-$ . Затем она пересекает ось ординат в точке  $\omega_2^{кр}$  и близко подходит к точке соединения кривых  $c_1^-$  и  $c_3^+$ , после чего отдалается от этой зоны, как бы являясь продолжением кривой  $c_1^+$  и части кривой  $c_1^-$ . Далее кривая  $c_2^-$  соединяется с кривой  $c_4^+$ .

Однако кривая  $c_3^-$  после сближения с кривой  $c_2^-$ , пересечения оси ординат в точке  $\omega_3^{кр}$  и сближения с точкой соединения кривых  $c_2^-$  и  $c_4^+$  не соединяется с кривой  $c_5^+$ , а только сближается с ней и вновь отходит к оси ординат, как бы являясь ее продолжением.

Построенные на рис. 1 частотные кривые являются портретом колебательного движения оболочки. С их помощью можно установить значения критических угловых скоростей оболочки при простом и сложном вращении. Так, в соответствии с динамическим критерием потери устойчивости равновесия упругой системы [14] в ее первом критическом состоянии первая частота свободных колебаний обращается в нуль и т.д. В рассмотренном случае все критические значения  $\omega_i^{кр}$  статического выпучивания оболочки с углом раскрытия  $2\alpha = 150^\circ$ , полученные по описанной выше методике (таблица), оказались равными значениям угловой скорости  $\omega$ , при которых кривые  $c_1^-(\omega)$ ,  $c_2^-(\omega)$  и  $c_3^-(\omega)$  пересекают ось ординат и обращаются в нуль. При этом первая форма статической потери устойчивости (рис. 2,в) была идентична второй форме свободных колебаний (рис. 2,б), что связано с обменом формами колебаний в точках сближения частотных кривых.

Резонансные режимы колебаний оболочки при сложном вращении устанавливаются путем выделения значений скорости  $\omega_i^{рез}$ , равных значениям частоты собственных колебаний. Поскольку в этом случае динамическая нагрузка в правой части уравнения (6) является функцией фазовой координаты  $\omega t + x^2$  обратной прецессии, происходящей со скоростью  $\omega$ , прецессионные резонансы могут быть реализованы только при совпадении частоты

обратной свободной прецессии и скорости  $\omega$ , т.е. при выполнении равенства  $\omega^{\text{рез}} = c^+(\omega^{\text{рез}})$ . Последнее имеет место при пересечении кривой  $c_i(\omega)$  луча, исходящего под углом  $45^\circ$  из начала координат в правом квадранте рис. 1. В нашем случае эти пересечения наблюдались при приведенных в таблице значениях  $\omega_i^{\text{рез}}$ , которые совпали с резонансными значениями  $\omega^{\text{рез}}$ , найденными путем решения уравнений вынужденных колебаний при сложном вращении (6).

Важно отметить, что после первого пересечения луча характеристические кривые, пересекая его неоднократно, продолжают располагаться в близости от него. Это значит, что во всем диапазоне этих частот оболочка остается в почти резонансном режиме.

Для случая  $2\alpha = 150^\circ$  были рассчитаны как функции угловой скорости  $\omega$  результирующий упругий момент  $M_{\text{упр}}$  [5, 6] в заделке оболочки и общий гироскопический момент  $M_{\text{гир}} = I_z \omega \omega_0$ , действующий при сложном вращении на эквивалентную твердотельную оболочку с моментом инерции  $I_z$  (рис. 3). Из рис. 3 видно, что функция  $M_{\text{гир}}$  изменяется линейно. До первой резонансной частоты  $\omega_1^{\text{рез}}$  величина  $M_{\text{упр}}$  практически совпадает с  $M_{\text{гир}}$ , однако в окрестности прецессионных резонансов учет упругой податливости приводит к существенному уточнению момента, действующего на оболочку.

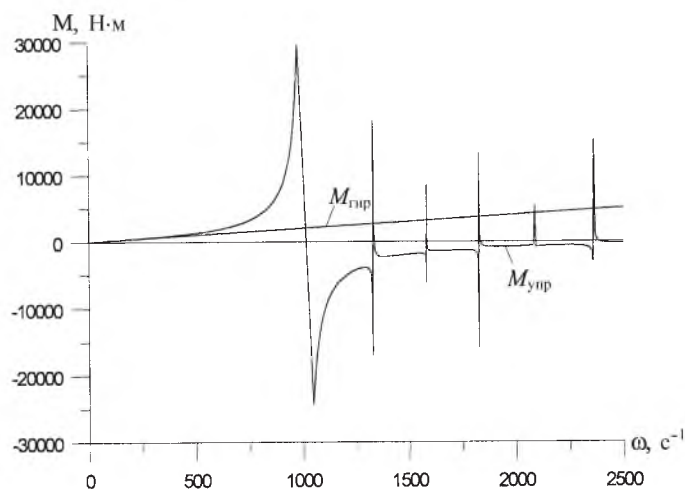


Рис. 3. Изменение результирующих упругого  $M_{\text{упр}}$  и гироскопического  $M_{\text{гир}}$  моментов.

Форма прецессионных колебаний оболочки в предрезонансной зоне (рис. 2,з) близка первой форме свободных колебаний (рис. 2,а).

На рис. 4 показаны типичные формы движения свободного кругового контура оболочки при статической потере устойчивости во вращающейся и неподвижной системах координат. В системе координат  $Oxuz$  выпученный контур представляется как неподвижная смещенная окружность (на рис. 4,а жирная линия), в то время как в инерциальной системе координат  $Ox^*Y^*Z^*$  – как смещенная относительно центра вращающаяся окружность (рис. 4,б).

На рис. 4 нанесена метка  $A$ , которая позволяет отслеживать ориентацию сечения по отношению к выбранной системе отсчета. Отметим, что в данном случае метка  $A$  направлена радиально.

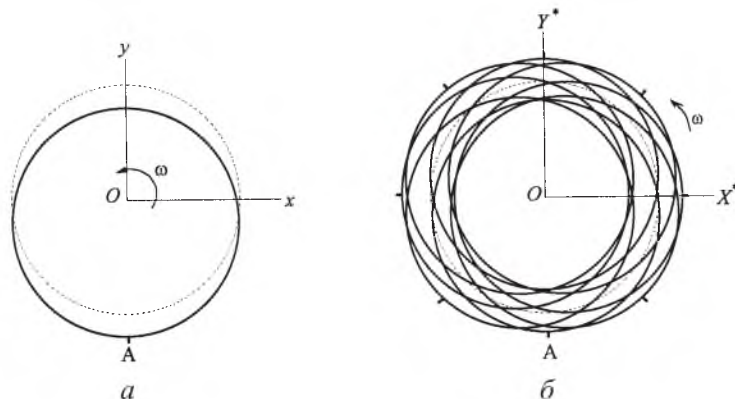


Рис. 4. Форма движения свободного края оболочки при потере устойчивости во вращающейся ( $a$ ) и неподвижной ( $b$ ) системах координат. (Здесь и на рис. 5 пунктиром показаны контурные линии оболочки в недеформированном состоянии.)

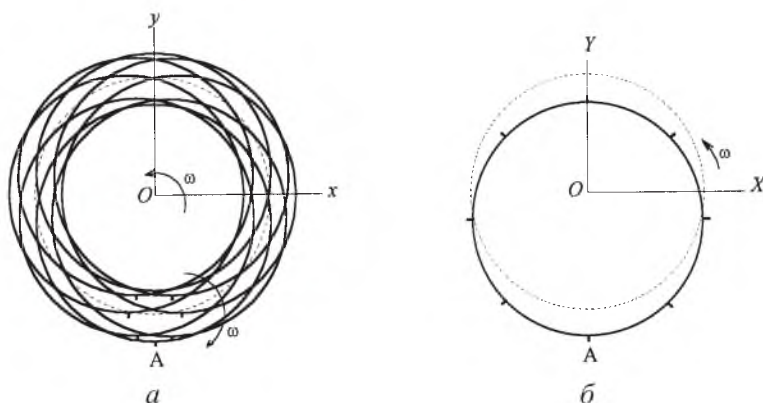


Рис. 5. Формы прецессионных колебаний края оболочки при сложном вращении:  $a$  – вращающаяся система координат;  $b$  – поворачивающаяся система координат.

Иначе обстоит дело с формой предрезонансных колебаний оболочки при сложном вращении, так как она по-разному проявляется во вращающейся ( $Oxyz$ ) и поворачивающейся ( $OXYZ$ ) системах координат. Рис. 5, $a$  иллюстрирует поступательное движение края оболочки вокруг центра  $O$  в системе координат  $Oxyz$ . При этом каждая точка контурной линии движется по круговой траектории в направлении хода часовой стрелки с угловой скоростью  $\omega$ , подобно замкнутой кривой, описываемой меткой  $A$  в этом же направлении, причем ориентация метки остается неизменной (так называемая обратная регулярная прецессия). В то же время система координат  $Oxyz$  вращается в направлении против хода часовой стрелки в системе координат  $OXYZ$ . Поэтому результирующее движение контурной линии в системе  $OXYZ$  представляется в виде круга, смещенного на расстояние  $u_{(3)}(l)$  вдоль оси  $OY$  и вращающегося вдоль своего контура против хода часовой стрелки с угловой скоростью  $\omega$  (рис. 5, $b$ ). При этом метка  $A$  направлена радиально.

Авторы выражают благодарность чл.-кор. НАН Украины В. В. Матвееву и д-ру техн. наук А. П. Зиньковскому за обсуждение результатов работы и полезные советы.

## Резюме

На основі аналізу залежностей частот власних прецесійних коливань обертових конічних оболонок від їх кутової швидкості встановлено критичні стани оболонок, що супроводжуються їх випинанням при простому обертанні і резонансними коливаннями при складному обертанні. Показано, що шляхом вибору відповідних систем відрахування можна надати подібність формам їх закритичної поведінки.

1. Циглер Г. Основы теории устойчивости конструкций. – М.: Мир, 1971. – 192 с.
2. Гуляев В. И., Киричук А. А., Ясинский В. А. Устойчивость кинематически возбуждаемых колебаний вращающейся сферической оболочки // Прикл. механика. – 1991. – 27, № 9. – С. 39 – 47.
3. Гуляев В. И., Гром А. А., Снежко Н. А. Прецессионные колебания конических оболочек при сложном вращении // Механика твердого тела. – 1999. – № 2. – С. 156 – 163.
4. Гуляев В. И., Луговой П. З., Соловьев И. Л. Теоретические и экспериментальные исследования динамики упругого сферического сегмента при сложном вращении // Прикл. механика. – 2001. – 37, № 6. – С. 111 – 117.
5. Гуляев В. И., Луговой П. З., Соловьев И. Л., Белова М. А. О бифуркационных состояниях вращающихся сферических оболочек // Там же. – 2002. – 38, № 9. – С. 116 – 123.
6. Gulyaev V. I., Solovjov I. L., Lugovyy P. Z. Analysis of precession vibrations of thin-wall elastic shells in compound rotation // J. Sound Vibration. – 2001. – 246, No. 3. – P. 491 – 504.
7. Арнольд В. И., Варченко А. Н., Гусейн-Заде С. М. Особенности дифференцируемых отображений. – М.: Физматгиз, 1982. – 304 с.
8. Егармин Н. Е. О прецессии стоячих волн колебаний вращающейся осесимметричной оболочки // Механика твердого тела. – 1986. – 21, № 1. – С. 142 – 148.
9. Смирнов А. Л., Товстик П. Е. Качественное исследование динамики вращающихся оболочек вращения // Современные проблемы механики и авиации. – М.: Машиностроение, 1982. – С. 280 – 290.
10. Padovan Y. Natural frequencies in rotating prestressed cylinders // J. Sound Vibration. – 1973. – 31. – No. 4. – P. 469 – 482.
11. Sivadas K. R. Vibration analysis of prestressed rotating thick circular conical shell // Ibid. – 1995. – 186, No. 1. – P. 99 – 109.



12. Григоренко Я. М., Гуляев В. И. Нелинейные задачи теории оболочек и методы их решения (обзор) // Прикл. механика. – 1991. – 27, № 10. – С. 3 – 23.
13. Лурье А. И. Аналитическая механика. – М.: Физматгиз, 1961. – 824 с.
14. Вольмир А. С. Устойчивость деформируемых систем. – М.: Физматгиз, 1967. – 984 с.

Поступила 17. 01. 2003