

Построение интегральных соотношений теории упругости и их приложение к задачам линейной механики разрушения

П. П. Ворошко

Институт проблем прочности им. Г. С. Писаренко НАН Украины, Киев, Украина

Предложены новые представления перемещений, относительного изменения объема и углов поворота точек линейно-упругого тела по заданным на его поверхности перемещениям и напряжениям. Получены интегральные соотношения краевых условий для полупространства и плоских математических разрезов произвольной конфигурации. Построены интегральные уравнения для перемещений поверхностей разрезов и анализируются результаты их решения при определении коэффициентов интенсивности напряжений для пространственных трещин. Предложенные соотношения сравниваются с известными аналитическими и численными решениями задач механики разрушения.

Ключевые слова: интегральные уравнения, пространственные трещины, упругость.

Обозначения*

V	– открытая область, занятая телом
S	– кусочно-гладкая поверхность, части которой являются поверхностями Ляпунова
\mathbf{n}	– всегда единичный вектор внешней нормали к S
$\mathbf{u}, \theta, \omega$	– соответственно вектор перемещений, его дивергенция и вихрь
λ	– безразмерный параметр Ламе, $\lambda = \lambda/2\mu$
$\mathbf{1}$	– единичный тензор
\mathbf{p}	– безразмерный вектор поверхностных напряжений, $\mathbf{p} = (2\mu)^{-1} \mathbf{n} \cdot \mathbf{T}$
$\mathbf{r}(y), \mathbf{r}$	– соответственно вектор точки y и вектор расстояния между точками y и x
ψ	– фундаментальное решение уравнения Лапласа, $\psi = 1/(4\pi r)$

Цель работы состоит в построении для пространственных задач теории упругости системы интегральных тождеств, которые следуют из предложенного представления вектора перемещений. Полученные результаты используются для решения краевых пространственных задач полупространства и плоских трещин в неограниченном пространстве.

Построение системы интегральных тождеств основывается на использовании теоремы Бетти. В работе [2] были предложены вспомогательные состояния, учитывающие специальную форму записи вектора поверхностных напряжений:

$$\mathbf{p} = (\lambda + 1)\theta\mathbf{n} - \mathbf{n} \times \omega + \mathbf{s}(\mathbf{u}, \mathbf{n}), \quad \mathbf{s}(\mathbf{u}, \mathbf{n}) = (\nabla\mathbf{u}) \cdot \mathbf{n} - \theta\mathbf{n}. \quad (1)$$

* Используются обозначения, приведенные в [1].

Здесь оператор \mathbf{s} выражается через внешнюю нормаль и перемещения только на поверхности тела,

$$\mathbf{s} = u_{k;a}^3 \rho^a - \mathbf{n}(\operatorname{div} \mathbf{u} + 2hu^3), \quad (2)$$

где дифференциальные операции отнесены к гауссовым координатам q_1, q_2 на поверхности тела; h – средняя кривизна поверхности. При $h = 0$ оператор \mathbf{s} выражается удобной для приложений формулой

$$\mathbf{s} = \frac{1}{\sqrt{a}} u_{k;a} \mathbf{i}_k \times (\delta_2^a \rho_1 - \delta_1^a \rho_2), \quad (3)$$

где a – первая квадратичная форма поверхности $dS = \sqrt{a} dq_1 dq_2$.

Приведем основные зависимости для оператора \mathbf{s} .

1. Интеграл по поверхности S , опирающейся на замкнутый контур L , который непрерывным преобразованием сводится в точку, согласно преобразованию Стокса, равен [3]

$$\int_S \mathbf{s} dS = \int_S (\nabla \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} - \mathbf{n} \theta) dS = \oint_L \mathbf{dr} \times \mathbf{u} dL, \quad (4)$$

где \mathbf{dr} – векторный элемент на L , обход контура предполагается против часовой стрелки и $\rho_1 \times \rho_2 = \mathbf{n}$.

Из соотношения (4) следует равенство нулю интеграла от вектора \mathbf{s} по любой замкнутой поверхности односвязной области тела, а также отдельных поверхностей многосвязной области, если выполнены упомянутые выше условия о существовании контура L для каждой из них, и вектор \mathbf{u} непрерывен на контуре.

2. Скалярное произведение вектора \mathbf{s} на непрерывный вектор \mathbf{v} может быть представлено в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{s}(\mathbf{u}, \mathbf{n}) \cdot \mathbf{v} &= \mathbf{s}(\mathbf{v}, \mathbf{n}) \cdot \mathbf{u} + \mathbf{n} \cdot \operatorname{rot}(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = (\nabla \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{u} - \\ &- \operatorname{div} \mathbf{v}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{u}) + \mathbf{n} \cdot (\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{u} - \mathbf{v} \operatorname{div} \mathbf{u} - \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{v} + \mathbf{u} \operatorname{div} \mathbf{v}). \end{aligned} \quad (5)$$

3. Если в выражении (1) для оператора \mathbf{s} принять $\mathbf{u} = \psi \mathbf{u}$, где ψ – скалярная функция, то

$$\mathbf{s}(\psi \mathbf{u}, \mathbf{n}) = \psi \mathbf{s}(\mathbf{u}, \mathbf{n}) - \mathbf{u} \cdot (\nabla \psi \otimes \mathbf{n} - \mathbf{n} \otimes \nabla \psi); \quad (6)$$

$$\int_S \mathbf{u} \cdot (\nabla \psi \otimes \mathbf{n} - \mathbf{n} \otimes \nabla \psi) dS = \int_S \psi \mathbf{s}(\mathbf{u}, \mathbf{n}) dS. \quad (7)$$

Применяя процедуру вывода представления перемещений на основе фундаментального решения для неограниченной упругой среды и учитывая

(7), выражения для вектора перемещений в точке x записываем следующим образом:

$$\delta(x)\mathbf{u} = \int_S (\mathbf{a} \cdot \mathbf{U} - \mathbf{u} \cdot \mathbf{W}) dS; \quad (8)$$

$$\delta(x)\mathbf{u} = \int_S [\mathbf{a} \cdot \mathbf{U} + \psi \mathbf{s} - \mathbf{u}(\mathbf{n} \cdot \nabla \psi)] dS; \quad (9)$$

$$\delta(x)\mathbf{u} = \int_S \mathbf{a} \cdot \mathbf{U} dS + \nabla_x \int_S \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \psi dS - \text{rot}_x \int_S \mathbf{n} \times \mathbf{u} \psi dS, \quad (10)$$

где \mathbf{U} , \mathbf{W} – соответственно тензор Кельвина–Соммильяна и “силовой тензор”,

$$\mathbf{U} = \frac{1+2\lambda}{2(1+\lambda)} \left(\frac{3+2\lambda}{1+2\lambda} \psi \mathbf{1} - \nabla \psi \otimes \mathbf{r} \right); \quad (11)$$

$$\mathbf{W} = \mathbf{n} \otimes \nabla \psi - \nabla \psi \otimes \mathbf{n} + (\mathbf{n} \cdot \nabla \psi) \mathbf{1};$$

$$\delta(x) = \begin{cases} 1, & x \in V, \\ 0,5, & x \in S; \end{cases}$$

$$\mathbf{a} = (\lambda + 1)\theta \mathbf{n} - \mathbf{n} \times \mathbf{w} = \mathbf{p} - \mathbf{s}. \quad (12)$$

В представлении (8) тензор \mathbf{W} существенно упрощен. Условия статики для тензора \mathbf{W} удовлетворяются, что проверяется для шара с центром в точке приложения единичной силы. Прямое дифференцирование выражения (10) приводит к интегральным представлениям дивергенции и вихря:

$$\begin{aligned} \delta(x)\theta(x) &= -(\lambda + 1)^{-1} \int_S \mathbf{a} \nabla \psi dS; \\ \delta(x)\omega(x) &= \int_S [\mathbf{a} \times \nabla \psi - (\mathbf{n} \cdot \omega) \nabla \psi] dS, \end{aligned} \quad (13)$$

где интегралы являются прямыми значениями на поверхности.

Приведем вытекающие из выражений (8)–(13) следствия:

1) решение первой основной краевой задачи теории упругости представляется в форме потенциала $\mathbf{u} = \int_S \mathbf{b} \cdot \mathbf{W} dS$, где плотность определяется

проекциями b_i в точке x поверхности S на орты $\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2$ и \mathbf{q}_3 в касательной плоскости к поверхности. Тогда аналогично известным построениям [4, 5 и др.] можно показать, что получаемая система сингулярных интегральных уравнений имеет отличный от нуля символический определитель и единственное решение;

2) векторное поле \mathbf{u} представляется в виде суммы безвихревого и соленоидального полей:

$$\mathbf{u} = -\nabla \left(\int_V \theta \psi dV + \int_S \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \psi dS \right) + \text{rot} \left(\int_V 2\omega \psi dV - \int_S \mathbf{n} \times \mathbf{u} \psi dS \right), \quad (14)$$

где скалярный и векторный потенциалы выражаются через объемные потенциалы и потенциалы простого слоя. Выражение (14) может быть использовано для представления гармонических функций различных форм записи вектора перемещений;

3) представление перемещений (9) для полупространства приводит к удобным формулировкам основных краевых задач для полупространства. Определим на границе S нормальную компоненту вектора \mathbf{s} и дивергенцию θ :

$$\begin{aligned} s_3 = \mathbf{s} \cdot \mathbf{i}_3 &= \int_S \frac{3+2\lambda}{\lambda+1} \mathbf{p} \cdot \nabla \psi - (\lambda+1)^{-1} \mathbf{s} \cdot \nabla \psi dS; \\ \theta &= -2(\lambda+1)^{-1} \int_S (\mathbf{p} \cdot \Delta \psi - \mathbf{s} \cdot \nabla \psi) dS. \end{aligned} \quad (15)$$

Комбинируя эти выражения, получаем

$$\theta = 2(2\lambda+1)^{-1} (p_3 - 2 \int_S \mathbf{p} \cdot \nabla \psi dS) = -2(2\lambda+3)^{-1} (s_3 - 2 \int_S \mathbf{s} \cdot \nabla \psi dS); \quad (16)$$

$$s_3 = -(2\lambda+1)^{-1} p_3 + 4(\lambda+1)(2\lambda+1)^{-1} \int_S \mathbf{p} \cdot \nabla \psi dS. \quad (17)$$

Так, подставляя в (9) выраженные через перемещения функции (16), (17), получаем для первой краевой задачи решение в перемещениях, а, используя представления решения в форме комбинаций компонент перемещений и напряжений как гармонических функций [6], – также решения других краевых задач для полупространства и бесконечного пространства с разрезами.

Для пространственных плоских трещин в бесконечно упругой среде построим интегральные уравнения для перемещений на поверхности трещины. Предполагается, что на поверхности трещины заданы поверхностные напряжения. При этом используются условия симметрии относительно границы полупространства $X_3 = 0$, где расположена трещина.

Трещины нормального отрыва. Пусть на поверхностях плоского разреза с контуром L внешняя нормаль $\mathbf{n} = \mathbf{i}_3$ и $\mathbf{p} = p(x)\mathbf{i}_3$ (рисунок). Касательные в плоскости трещины перемещения \mathbf{u} и нормальные перемещения w определяются следующим образом:

$$\mathbf{u}(x) = -(\lambda+1)^{-1} \int_{S_\infty} [\mathbf{s}\psi - (2\lambda+3)(\mathbf{s} \cdot \mathbf{r})\nabla\psi] dS; \quad (18)$$

$$w(x) = \int_{S_\infty} [(2\lambda+3)\theta + 2\mathbf{s} \cdot \mathbf{i}_3] \psi dS. \quad (19)$$

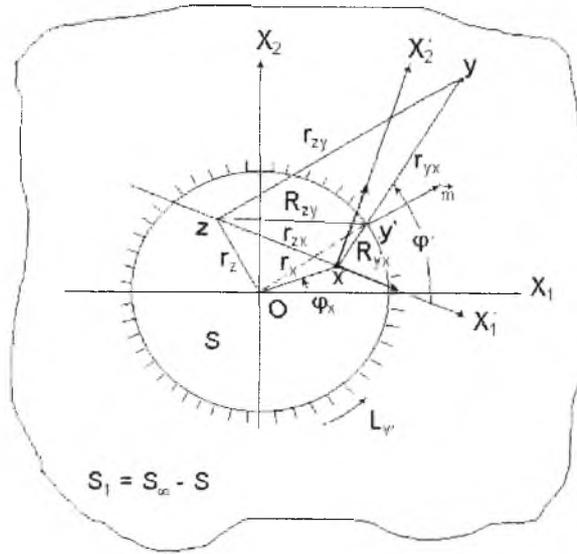


Схема расположения точек истока x и наблюдения y и z на границе полупространства с плоской трещиной.

Путем непосредственных преобразований покажем, что второе слагаемое в (18) равно нулю. Тогда компонента s_3 равна

$$s_3 = -\operatorname{div} \mathbf{u} = -(\lambda + 1)^{-1} \int_S \mathbf{s} \cdot \nabla \psi dS. \quad (20)$$

Комбинируя (20) с представлением (13), находим

$$\theta(x) = -2(2\lambda + 1)^{-1} p(x); \quad (21a)$$

$$s_3 = (2\lambda + 1)^{-1} p(x). \quad (21b)$$

Таким образом, граничное значение для гармонической функции θ на поверхности трещины выражено через поверхностное напряжение на поверхности трещины. Вне поверхности трещины из условий симметрии следует граничное значение для нормальной производной $\theta_{,x_3} = 0$. Задача свелась к решению краевой задачи для полупространства со смешанными краевыми условиями для гармонической функции. Этот результат согласуется с известной постановкой задачи в виде одной гармонической функции [7].

Как видно из (13) и (21a), нормальные перемещения w являются решением интегрального уравнения первого рода:

$$-(\lambda + 1)(2\lambda + 1)^{-1} p(x) = \int_S \nabla w \cdot \nabla \psi dS, \quad x \in S. \quad (22)$$

Это уравнение, а также представления для нормального перемещения и дивергенции в виде

$$\begin{aligned} w(x) &= 2(\lambda + 1) \int_{S_\infty} \theta \psi dS; \\ \theta(x) &= 2(\lambda + 1)^{-1} \int_{S_\infty} \nabla w \cdot \nabla \psi dS, \quad x \in S_\infty \end{aligned} \quad (23)$$

позволяют получить для w интегральное уравнение второго рода:

$$\begin{cases} w(x) = 4 \int_S \mathbf{k}(z, x) \cdot \nabla w(z) dS_z + f(x); \\ \mathbf{k}(z, x) = \int_{S_1} \nabla \psi(z, y) \psi(y, x) dS_y; \\ f(x) = -4(\lambda + 1)(2\lambda + 1)^{-1} \int_S p \psi dS, \end{cases} \quad (24)$$

где ядро $\mathbf{k}(z, y)$ определяется с учетом перестановки интегрирования по внешней и внутренней областям полупространства.

Трещины сдвига. В этом случае полагаем $\mathbf{p} \cdot \mathbf{i}_3 = 0$, и касательные компоненты вектора \mathbf{p} кососимметричны относительно плоскости трещины. Представления для вектора \mathbf{s} и компонент вихря $\mathbf{i}_3 \times \omega$ записываются в виде

$$\mathbf{s} = \nabla w, \quad \mathbf{i}_3 \times \omega = 0,5(\nabla w - \mathbf{u}_{,3}) = 0,5(\mathbf{s} - \mathbf{u}_{,3}), \quad (25)$$

что позволяет получить выражение для градиента нормальных перемещений

$$\mathbf{p}(x) = -(2\lambda + 1)^{-1} \nabla w, \quad x \in S. \quad (26)$$

Интегрирование этого выражения возможно, если $\text{rot } \mathbf{p} = 0$:

$$w(x) = -(2\lambda + 1)^{-1} \int_L \mathbf{p} \cdot d\mathbf{l} + c, \quad (27)$$

где константа c определяется из условия

$$\int_S w dS = 0, \quad x \in S.$$

Если $\text{rot } \mathbf{p} \neq 0$, то, применив оператор дивергенции к равенству (26), получим интегральное уравнение для определения нормальных перемещений на контуре трещины:

$$w = 2 \left\{ \oint_L [(\mathbf{m} \cdot \nabla \psi_1)w - (2\lambda + 1)^{-1}(\mathbf{p} \cdot \mathbf{m})\psi_1] dl - \oint_S \operatorname{div} \mathbf{p} \psi_1 dS \right\}, \quad (28)$$

где $\psi_1 = -(2\pi)^{-1} \ln r$ – фундаментальное решение уравнения Лапласа для двухмерного случая.

Касательные перемещения определяются как решение системы интегральных уравнений первого рода:

$$\mathbf{p}(x) = -(2\lambda + 1)(\lambda + 1)^{-1} \int_S s_3 \nabla \psi dS. \quad (29)$$

Обоснованием разрешимости системы (29), как и для трещин нормального отрыва, является возможность построения для перемещений \mathbf{u} системы интегральных уравнений второго рода:

$$\mathbf{u}(x) = \int_S \mathbf{k}(y, x) s_3 dS + \mathbf{f}(x); \quad (30)$$

$$\mathbf{k}(y, x) = \int_{S_1} \frac{2(2\lambda + 1)}{\lambda + 1} (\nabla \psi(y, z) \cdot \mathbf{r}_{yz}) \nabla \psi(z, x) - 4\psi(z, x) \nabla \psi(y, z) dS_z; \quad (31)$$

$$\mathbf{f}(x) = 2(2\lambda + 1)^{-1} \int_S \mathbf{p} \cdot [2(\lambda + 1)\psi(y, x)\mathbf{1} - \mathbf{r} \otimes \nabla \psi(y, x)] dS_y. \quad (32)$$

Сравнение формул для перемещений, дивергенции и вихря с известным аналитическим решением Буссинэка [4] для выделенных подобластей полупространства (шар, тор) в различных точках показало удовлетворительную точность при определении интегралов кубатурными формулами точности $O(h)$.

Для трещин нормального отрыва при плоской деформации уравнение (21б) интегрируется для произвольной нагрузки $p(x)$ и при постоянной нагрузке p приводит к результату, совпадающему с полученным в работе [8].

Сравнительный анализ распределения касательных перемещений при плоской деформации и различных функциях нормальной нагрузки $p(x)$ проводился при решении задач методом конечных элементов (МКЭ) для ограниченной области бесконечной среды так, чтобы длина трещины была меньше 1/10 диаметра выделенной области. Полученные результаты показали практическое совпадение аналитического и численного решений, за исключением зоны устья трещины, где использование МКЭ из-за трудностей учета разрыва в нормальных напряжениях приводит к неточным результатам.

Тестирование решения уравнения первого рода (22) проводилось численно МКЭ для круговой трещины единичного радиуса в цилиндре радиуса 11 м при $\nu = 1/3$, $p = 1$, $\lambda = 1$. Дискретизация области трещины треугольными

элементами осуществлялась так, что вблизи контура трещины выделялся поясok шириной $\delta = 0,01$ м. По значениям нормальных перемещений на внутренней границе пояса определялись коэффициенты интенсивности напряжений K_1 , которые сравнивались с известным аналитическим решением [9]. Сравнение результатов приближенного определения перемещений и значений K_1 с точным показывает, что максимальная относительная погрешность не превышает 0,104. Это обусловлено неравномерностью дискретизации поверхности трещины в окружном и радиальном направлении. Численное исследование определения K_1 , K_2 и K_3 для трещин различной конфигурации является предметом отдельного рассмотрения.

Резюме

Запропоновано нові вирази переміщень, відносної зміни об'єму і кутів повороту точок пружно-лінійного тіла за заданими на його поверхнях переміщеннями і напруженнями. Отримано інтегральні співвідношення крайових умов для півпростору і плоских математичних розрізів довільної конфігурації. Побудовано інтегральні рівняння для переміщень поверхонь розрізів і аналізуються результати їх розв'язків при визначенні коефіцієнтів інтенсивності напружень для просторових тріщин. Наведені співвідношення порівнюються з відомими аналітичними і числовими розв'язками задач механіки руйнування.

1. *Трусделл К.* Первоначальный курс рациональной механики сплошных сред. – М.: Мир, 1975. – 592 с.
2. *Ворошко П. П.* Эффективное построение интегральных уравнений теории потенциала основных краевых задач теории упругости // Пробл. прочности. – 1996. – № 5. – С. 83 – 90.
3. *Лурье А. И.* Теория упругости. – М.: Наука, 1970. – 939 с.
4. *Партон В. З., Перлин П. И.* Методы математической теории упругости. – М.: Наука, 1981. – 688 с.
5. *Михлин С. Г.* Линейные уравнения в частных производных. – М.: Высш. шк., 1977. – 431 с.
6. *Купрадзе В. Д., Гагелиа Т. Г., Башелейшвили М. О.* Трехмерные задачи математической теории упругости. – М.: Наука, 1976. – 663 с.
7. *Sih G. C.* Mathematical theories of brittle fracture // Fracture. – New York; London: Academic Press, 1969. – Vol. 2.
8. *Liebowitz H., Eftis J., and Jones D. L.* Some recent theoretical and experimental developments // Fracture. – 1977. – ICF4. – P. 212 – 230.
9. *Черепанов Г. П.* Механика хрупкого разрушения. – М.: Наука, 1974. – 640 с.

Поступила 18. 02. 2002