ISSN 1561-9087 *Прикладна гідромеханіка. 2007. Том 9, N 2-3. С. 86 – 92*

УДК 532.542.4

ДО ПИТАННЯ ПРО ТЕПЛОПРОВІДНІСТЬ ДВОФАЗНОГО СЕРЕДОВИЩА

С. І. КРІЛЬ, В. П. БЕРМАН

Інститут гідромеханіки НАН України, Київ

Одержано 23.04.2007

Розглядаються питання побудови осереднених диференціальних рівнянь переносу тепла і визначення ефективного коефіцієнта теплопровідності для двофазного середовища. Для точного виводу осереднених рівнянь теплопровідності використовуються апарат теорії узагальнених функцій і імовірнісний метод осереднення полів термодинамічних величин. Показано, зокрема, що осереднені рівняння теплопровідності, виведені окремо для кожної фази, враховують один і той самий вектор осередненого потоку тепла для двофазного середовища в цілому. Розроблено новий метод обчислення ефективного коефіцієнта теплопровідності, який характеризує стаціонарний макроперенос тепла, і показана достовірність цього методу на досить простому прикладі теплопровідності двофазного середовища з регулярною структурою.

Рассматриваются вопросы построения осредненных дифференциальных уравнений переноса тепла и определения эффективного коэффициента теплопроводности для двухфазной среды. Для строгого вывода осредненных уравнений теплопроводности используются аппарат теории обобщенных функций и вероятностный метод осреднения полей термодинамических величин. Показано, в частности, что осредненные уравнения теплопроводности, составленные для каждой фазы в отдельности, учитывают один и тот же вектор осредненного потока тепла для двухфазной среды в целом. Разработан новый метод вычисления эффективного коэффициента теплопроводности, характеризующего стационарный макроперенос тепла, и показана достоверность этого метода на простейшем примере теплопроводности двухфазной среды с регулярной структурой.

The problems of construction of the average differential equation for the heat transport, and a derivation of the effective heat conduction coefficient for a two-phase medium are discussed. The Generalized-Function theory and the probabilistic method of averaging of the thermodynamic fields are used for rigorous derivation of average equation for the heat conduction. In particular, it is demonstrated that the average equation for the heat conduction for each separate phase includes the same vector of averaged flow as the vector of averaged flow corresponding to the two-phase medium. A novel method for calculation of the effective heat conduction coefficient for the stationary macrotransfer of heat is developed. A reliability of the proposed method is demonstrated in terms of an elementary heat conduction of the two-phase medium with a regular structure.

ВВЕДЕНИЕ

Теоретичному дослідженню теплопровідності двофазного (або двокомпонентного) середовища, складові якого характеризуються своїми тепловими властивостями, присвячено багато робіт, огляд яких зроблено, зокрема, в [1]. В них розглядаються зазвичай два основні питання: побудова осереднених балансових рівнянь тепла і обчислення ефективного коефіцієнта теплопровідності для двофазного середовища.

В теорії теплопровідності двофазного середовища широко використовуються два методи побудови осереднених диференціальних рівнянь теплопровідності: феноменологічний і метод просторового осереднення. У феноменологічній моделі кожна фаза середовища уподібнюється з відповідним суцільним середовищем, фізичні характеристики стану і руху якого є неперервними в усій області, заповненій двофазним середовищем. Для цього роблять припущення, що лінійний масштаб l внутрішньої структури середовища набагато менший так званого зовнішнього лінійного масштабу L, на якому суттєво змінюються глобальні "макроскопічні" характеристики переносу тепла. Уявлення про суцільність фаз дозволяє формально записати диференціальні рівняння теплопровідності для кожної фази з урахуванням міжфазного теплообміну.

Метод просторового осереднення дозволяє здійснити перехід від дискретності фаз до континууму шляхом осереднення характеристик фаз по елементарному фізичному об'єму, до центра мас якого відносяться осереднені величини. Характерний розмір об'єму осереднення l' вважається малим порівняно з лінійним зовнішнім масштабом L і великим порівняно з масштабом внутрішньої структури l [2, 3]. З метою надійного просторового осереднення припускається, що в елементарному об'ємі міститься досить велика кількість частинок даної фази, аби в сукупності їх можна було б вважати суцільним середовищем.

Таким чином, феноменологічна модель і метод просторового осереднення накладають певні обмеження на співвідношення внутрішнього і зовнішнього лінійних масштабів для двофазного середовища, а отже, і на область застосування осереднених балансових рівнянь тепла.

Слід відмітити роботу [4], в якій використовується для виводу рівнянь збереження тепла апарат осереднення по ансамблю логічно можливих станів двофазного середовища. При цьому спочатку формально записуються "мікроскопічні" диференціальні рівняння теплопровідності, справедливі всередині кожної із фаз, а потім ці рівняння осереднюються по ансамблю. Тут зауважимо, що мікроскопічні рівняння теплопровідності для кожної фази треба віднести до всієї області двофазного середовища і вважати, що всередині даної фази температура приймає певні ненульові значення, які задовольняють диференціальним рівнянням теплопровідності, тоді як за межами фази температура дорівнює нулю. В такому разі при розгляді кожної фази окремо температура зазнає розриви неперервності на поверхнях розділу фаз і її частинні похідні по просторових координатах і часі є узагальненими функціями. Ця обставина не враховується в [4].

Ефективна теплопровідність двофазного середовища (суспензії) теоретично вивчена, зокрема, в роботах [1, 5, 6], в яких одержано вирази для ефективних коефіцієнтів стаціонарного макропереносу тепла на випадок сферичних і еліпсовидних частинок твердої фази. При цьому в [1] реальні збурення температури, які утворюються будь-якою однією твердою частинкою, замінюються збуренням від точкового диполю, який розташований в центрі цієї частинки, а в [5] додатково розв'язується задача про температуру усередині пробної твердої частинки. В кінцевому результаті одержано квадратне алгебраїчне рівняння, розв'язок якого дає досить складний вираз для безрозмірного ефективного коефіцієнта теплопровідності.

Для розробки узагальнених і точних методів побудови осереднених рівнянь балансу тепла і обчислення ефективного коефіцієнта теплопровідності двофазного середовища нижче використовуються імовірнісний метод осереднення полів термодинамічних величин і апарат теорії узагальнених функцій. Імовірнісний метод осереднення, як відомо, володіє більш простими властивостями і більш універсальний за своєю природою ніж просторовий і часовий методи осереднення. Перевага його, зокрема, над методом просторового осереднення полягає в тому, що він не пов'язаний з внутрішнім і зовнішнім лінійними масштабами двофазного середовища і тому не накладає будь-яких обмежень на область використання осереднених по імовірності рівнянь збереження.

Основні принципи імовірнісного осереднення в гідродинаміці двофазного середовища описані в [7], тому при побудові осереднених балансових рівнянь тепла детальна процедура імовірнісного осереднення нижче пропускається.

1. ОСЕРЕДНЕНІ РІВНЯННЯ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ

Позначимо через φ_1^*, φ_2^* і φ – будь-які одноїменні характеристики рідинної, твердої фаз і двофазного середовища. Припускається, що функції φ_1^* і φ_2^* визначені лише в області своєї фази, де вони однозначні і неперервні разом зі своїми частинними похідними за просторовими координатами і часом. Ці функції будемо називати власними характеристиками відповідних фаз. Функція φ визначена в усій області потоку, дорівнює φ_1^* усередині рідинної і φ_2^* – усередині твердої фази.

Розглянемо функцію

$$\varphi_m = C_m \varphi, \tag{1}$$

де індекс $m = 1$ відноситься до рідинної, а $m = 2$ – до твердої фази; C_m – індикатор m-ої фази, тобто функція, яка визначена в усій області двофазного середовища, приймає значення одиниці усередині m-ої фази і значення нуль поза нею. Очевидно, що

$$\sum_m C_m = 1, \tag{2}$$

отож,

$$\sum_m \varphi_m = \varphi. \tag{3}$$

Функція φ_m, як зріз характеристики φ по області m-ої фази, визначена в усій області двофазного середовища, дорівнює φ_m^* в точках m-ої фази і нулю в точках, які не належать m-ій фазі. Оскільки функція φ_m зазнає розриву неперервності на поверхнях розділу фаз, які в сукупності позначимо символом S, частинні похідні цієї функції по просторових координатах і часі є узагальненими функціями в смислі функціоналів і визначаються інакше, ніж частинні похідні в класичному математичному аналізі. Так, частинні похідні функції φ_m по координаті x_k $(k = 1, 2, 3)$ і часі t в даному випадку визначаються за відповідними формулами [8]

$$\nabla_k \varphi_m = \{\nabla_k \varphi_m\} + [\varphi_m]_s n_{m,k} \delta_s, \tag{4}$$

$$\frac{\partial \varphi_m}{\partial t} = \left\{ \frac{\partial \varphi_m}{\partial t} \right\} + \sum_i [\varphi_m]_{ti} \delta(t - t_i), \tag{5}$$

де ∇_k – оператор $\dfrac{\partial}{\partial x_k}$; $\{\nabla_k \varphi_m\}$ і $\left\{ \dfrac{\partial \varphi_m}{\partial t} \right\}$ – частинні похідні як звичайні функції, які дорівнюють відповідно $\nabla_k \varphi_m^*$ і $\partial \varphi_m^* / \partial t$ в області m-ої фази і нулю поза нею; $[\varphi_m]_s$ – стрибок функції φ_m

при переході в даний момент часу через поверхню розділу фаз ззовні у середину області своєї фази; $[\varphi_m]_{ti}$ – стрибок функції φ_m в момент часу t_i ($i = 1, 2...$), в якому вона зазнає розриву неперервності, $[\varphi_m]_{ti} = \varphi_m(t_{i+0}) - \varphi_m(t_{i-0})$; $n_{m,k}$ – проекція зовнішнього по відношенню до m-ої фази орта нормалі до поверхні S на вісь Ox_k; δ_s – сингулярний функціонал, зосереджений на поверхні S; $\delta(t-t_i)$ – функція Дірака.

Оскільки будь-яка характеристика m-ої фази φ_m визначена в усій області потоку суспензії, дану фазу будемо розглядати як псевдосуцільне середовище, тобто як деяке суцільне середовище з розривними характеристиками. Окрім цього, характеристики типу φ_m повинні задовольняти диференційним рівнянням збереження, зокрема диференційному рівнянню притоку тепла, та належним початково-крайовим умовам. Тому вихідне неосереднене диференціальне рівняння притоку тепла для m-фази можна записати аналогічно, як і для звичайного однофазного середовища, але за умови, що усі частинні похідні від розривних характеристик в цих рівняннях – узагальнені функції.

Для найпростішого випадку неізотермічного руху нестисливого суцільного середовища, коли інтенсивність роботи внутрішніх сил несуттєва і масообмін відсутній, вихідні диференціальні рівняння притоку тепла для m-ої фази можна записати у вигляді, аналогічно записаному для однофазного суцільного середовища [9]:

$$\frac{\partial \rho_m U_m}{\partial t} + \nabla_k \rho_m U_m V_{m,k} = -\nabla_k q_{m,k}, \qquad (6)$$

де ρ_m і U_m – густина і внутрішня енергія одиниці маси m-ої фази; $V_{m,k}$ і $q_{m,k}$ – компоненти векторів швидкості руху m-ої фази і потоку тепла через одиницю поверхні, зумовленого молекулярною теплопровідністю відповідної фази.

В рівнянні (6), як і в наступних, по індексу k, який двічі повторюється в одночленному виразі, проводиться підсумовування від одиниці до трьох.

Зауважимо, що у лівій частині рівняння (6) частинні похідні як узагальнені функції можна замінити на відповідні частинні похідні як звичайні функції, оскільки ця частина рівняння є інваріантною при переході від звичайних до узагальнених функцій [10]. Що стосується виразу у правій частині рівняння (6), то можна написати, згідно з (4),

$$-\nabla_k q_{m,k} = -\{\nabla_k q_{m,k}\} + (q^*_{m,k})_s n_{m,k} \delta_s, \qquad (7)$$

при цьому враховано, що $[q_{m,k}]_s = -(q^*_{m,k})_s$, де $(q^*_{m,k})_s$ – значення функції $q_{m,k}$ на поверхні розділу фаз.

Отже рівняння (6) можна переписати у вигляді

$$\left\{\frac{\partial \rho_m U_m}{\partial t}\right\} + \{\nabla_k \rho_m U_m V_{m,k}\} = \qquad (8)$$

$$= -\{\nabla_k q_{m,k}\} + (q^*_{m,k})_s n_{m,k} \delta_s.$$

Осереднимо рівняння (8) по імовірності за правилами осереднення, викладеними в [7], враховуючи при цьому комутативність операцій осереднення і диференціювання. В результаті будемо мати

$$\frac{\partial \bar{\rho}_m < U_m >}{\partial t} + \nabla_k \bar{\rho}_m < U_m V_{m,k} >= \qquad (9)$$

$$= -\bar{C}_m \nabla_k < q_{m,k} > + \overline{(q^*_{m,k})_s n_{m,k} \delta_s},$$

де прямою рискою зверху позначені безумовні середньостатистичні величини, а кутовою дужкою – умовні середньостатистичні величини за умови, що дана точка двофазного середовища в даний момент часу знаходиться в області m-ої фази. Величина $\bar{C}_m$ – локальна концентрація m-ої фази в смислі імовірності того, що дана точка буде належати області m-ої фази; $\bar{\rho}_m$ – середньостатистична густина m-ої фази,

$$\bar{\rho}_m = \bar{C}_m \rho^*_m,$$

де ρ^*_m є власна густина m-ої фази.

Витлумачимо фізичний смисл величини $\overline{(q^*_{m,k})_s n_{m,k} \delta_s}$, яку позначимо через $\bar{Q}_m$:

$$\overline{(q^*_{m,k})_s n_{m,k} \delta_s} = \bar{Q}_m. \qquad (10)$$

Оскільки на поверхні розділу фаз виконується умова $\bar{Q}_1 + \bar{Q}_2 = 0$, маємо $\bar{Q}_1 = -\bar{Q}_2$. Отже, величина $\bar{Q}_m$ є не що інше, як інтенсивність міжфазного теплообміну в одиниці об'єму двофазного середовища.

В [10] відзначено, що у випадку неперервного потоку тепла виконуються рівності

$$< q_{1,k} >= \bar{q}_k, < q_{2,k} >=< q_{1,k} >, \qquad (11)$$

тому осереднені рівняння притоку тепла для рідинної і твердої фаз повинні враховувати лише один вектор осередненого потоку тепла $< q_{1,k} >$, який, згідно с (11), по смислу є вектором осередненого потоку тепла двофазного середовища. В даному разі закон теплопровідності Фур'є для рідинної фази має вигляд

$$< q_{1,k} >= -\lambda \nabla_k < T^*_1 >, \qquad (12)$$

де λ – ефективний коефіцієнт теплопровідності рідинної фази.

Перетворимо балансове рiвняння (9) до рiвняння теплопровiдностi. Для цього використаємо, окрiм позначення (10) i виразу (12), вираз $< U_m >= \epsilon_m < T_m >$, де ϵ_m i $< T_m >$ – теплоємнiсть i середньостатистична температура m-ої фази. З урахуванням вищезазначених виразiв рiвняння (9) набуває вигляду

$$\frac{\partial \bar{\rho}_m \epsilon_m < T_m >}{\partial t} + \nabla_k \bar{\rho}_m \epsilon_m < T_m V_{m,k} >=$$
$$= \bar{C}_m \nabla_k (\lambda \nabla_k < T_1^* >) + \bar{Q}_m, \qquad (13)$$
$$(m = 1, 2).$$

Осередненi рiвняння (13) описують молекулярну теплопровiднiсть кожної фази як деякого континууму у статистичному смислi.

Тепер задача полягає у тому, щоб визначити ефективний коефiцiєнт теплопровiдностi λ, який залежить не лише вiд власних коефiцiєнтiв теплопровiдностi вiдповiдних фаз λ_1 i λ_2, а й вiд структури двофазного середовища: концентрацiї, форми i орiєнтацiї твердих частинок тощо.

2. ЕФЕКТИВНИЙ КОЕФIЦIЄНТ ТЕПЛОПРОВIДНОСТI

Пропонується метод визначення коефiцiєнта λ з використанням рiвнянь (11).

Будемо вважати, заради простоти, що двофазне середовище нерухоме, температурне поле його стацiонарне, мiжфазний теплообмiн вiдсутнiй. На поверхнi роздiлу фаз виконуються умови

$$T_1^* = T_2^*, \qquad (14)$$

$$q_{1,k}^* = q_{2,k}^*. \qquad (15)$$

Окрiм цього, будемо вважати також, що частинки твердої фази розподiленi практично рiвномiрно у всiй областi двофазного середовища, що дозволяє замiнити, згiдно з гiпотезою про ергодичнiсть, iмовiрностнi середнi величини на вiдповiднi їм просторовi середнi величини.

У випадку, що розглядається, осереднене диференцiйне рiвняння теплопровiдностi двофазного середовища має вигляд

$$-\lambda \nabla_k \bar{T} = \bar{q}_k = \text{const}, \qquad (16)$$

де $\bar{T}$ i $\bar{q}_k$ – осередненi температура i потiк тепла двофазного середовища.

Оскiльки осередненi потоки тепла в обидвох фазах однаковi i виконуються рiвностi (11), константу у правiй частинi рiвняння (16) замiнимо на $-\lambda_1 \nabla_k < T_1^* >$, тобто

$$\text{const} = -\lambda_1 \nabla_k < T_1^* > . \qquad (17)$$

Далi, ураховуючи, що ефективний коефiцiєнт теплопровiдностi λ пов'язаний з градiєнтом температури рiдинної фази, вираз у лiвiй частинi рiвняння (16) треба переписати у виглядi

$$-\lambda \nabla_k \bar{T} = -\lambda \overline{\nabla_k T_1}, \qquad (18)$$

де $T_1 = C_1 T$ – температура рiдинної фази як псевдосуцiльного середовища. Величина T_1 дорiвнює власнiй температурi рiдинної фази T_1^* в областi цiєї фази, i нулю за її межами, тому осереднений градiєнт $\overline{\nabla_k T_1}$ – узагальнена функцiя

$$\overline{\nabla_k T_1} = (1 - \bar{C}_2) \nabla_k < T_1^* > - \overline{(T_1^*)_s n_{1,k} \delta_s}, \qquad (19)$$

де $\bar{C}_2$ – концентрацiя твердої фази. Пiдставивши (17) i (18) в (16), будемо мати, з урахуванням (19),

$$\lambda [(1 - \bar{C}_2) \nabla_k < T_1^* > - \overline{(T_1^*)_s n_{1,k} \delta_s}] = \qquad (20)$$
$$= \lambda_1 \nabla_k < T_1^* > .$$

Оскiльки у випадку рiвномiрного розподiлу частинок твердої фази в усiй областi двофазного середовища iмовiрнiсне середнє можна замiнити на середнє по деякому об'єму V, функцiонал $\overline{(T_1^*)_s n_{1,k} \delta_s}$, який входить в (20), дорiвнює

$$\overline{(T_1^*)_s n_{1,k} \delta_s} = \frac{1}{V} \int_{S_V} (T_1^*)_s n_{1,k} dS_V, \qquad (21)$$

де S_V – мiжфазна поверхня всерединi об'єму V.

Отже, для визначення коефiцiєнта λ на пiдставi рiвностi (20), потрiбно додатково розв'язати задачу щодо закону розподiлу температури T_1^* на мiжфазнiй поверхнi i обчислити функцiонал (21). Тодi рiвняння (20) набуває вигляду

$$\lambda F(\lambda_1, \lambda_2, \bar{C}_2) \nabla_k < T_1^* >= \lambda_1 \nabla_k < T_1^* >, \qquad (22)$$

де F – функцiя параметрiв λ_1, λ_2 i $\bar{C}_2$, вигляд якої залежить вiд структури двофазного середовища.

На пiдставi рiвняння (22) одержуємо вираз для λ:

$$\lambda = \frac{\lambda_1}{F(\lambda_1, \lambda_2, \bar{C}_2)}. \qquad (23)$$

Для наочностi визначимо ефективний коефiцiєнт теплопровiдностi λ для досить простого випадку двофазного середовища з регулярною структурою, яке складається iз перiодично розмiщених необмежених плоских вертикальних твердих стiнок, простiр мiж якими заповнений рiдиною (рис. 1). Припускається, що твердi стiнки розмiщенi на вiдстанi l_1 одна вiд одної, їх товщина дорiвнює l_2. Власнi коефiцiєнти теплопровiдностi рiдинної i твердої фаз дорiвнюють λ_1 i λ_2 вiдповiдно. Потiк тепла q спрямований перпендикулярно до пластин.

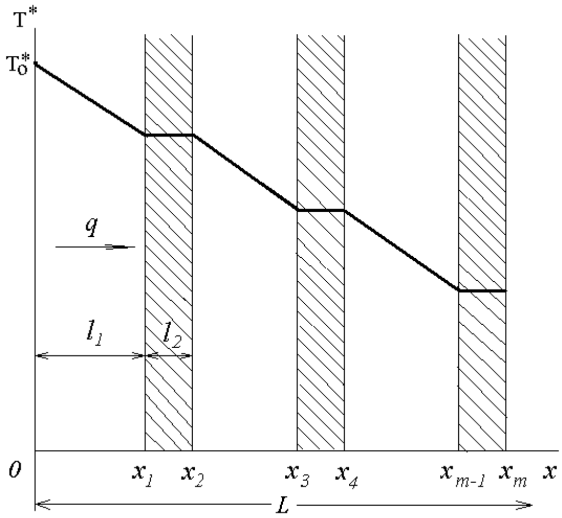

Рис. 1. Схема двофазного середовища з регулярною структурою

У даному випадку маємо справу з одномірною задачею, так що

$$\nabla_k T_1 = \frac{dT_1}{dx} = \frac{dT_1^*}{dx} + \sum_{i=1}^{n} [T_1]_i \delta(x - x_i), \quad (24)$$

де x_i – координати точок, в яких функція T_1 терпить розрив неперервності; $[T_1]_i$ – стрибок функції T_1 в точці x_i при переході через цю точку справа наліво, тобто

$$[T_1]_i = T_1(x_i + 0) - T_1(x_i - 0).$$

Осереднивши рівняння (24) по довжині $L >> l_2$, будемо мати

$$\overline{\nabla_k T_1} = \overline{\frac{dT_1}{dx}} = (1 - \bar{C}) \frac{d < T_1^* >}{dx} + \frac{1}{L} \sum_{i=1}^{n} [T_1]_i, \ (25)$$

де n – кількість точок розриву неперервності функції T_1 на довжині осереднення L; $\bar{C} = nl_2/(2L)$ – лінійна концентрація твердої фази; риска зверху означає середнє значення по усій довжині L, а кутова функція – середнє значення в межах l_1.

Для даної одномірної задачі рівняння (20) можна переписати з урахуванням (25) у вигляді

$$\lambda \left[(1 - \bar{C}) \frac{d < T_1^* >}{dx} + \frac{1}{L} \sum_{i=1}^{n} [T_1]_i \right] = \quad (26)$$

$$= \lambda_1 \frac{d < T_1^* >}{dx}.$$

Тепер потрібно визначити стрибки $[T_1]_i$ у відповідних точках x_i і суму цих стрибків. Для цього використаємо розв'язки неосереднених диференціальних рівнянь

$$-\lambda_1 \frac{dT_1^*}{dx} = q_1 = \text{const}, \quad (27)$$

$$-\lambda_2 \frac{dT_2^*}{dx} = q_2 = \text{const}, \quad (28)$$

$$q_1 = q_2;$$

в областях рідинної і твердої фаз відповідно. Загальні розв'язки цих рівнянь мають вигляд

$$T_1^* = -\frac{q_1}{\lambda_1} x + B_0 \text{ при } 0 \le x \le x_1;$$
$$T_2^* = -\frac{q_2}{\lambda_2} x + B_1 \text{ при } x_1 \le x \le x_2;$$
$$T_1^* = -\frac{q_1}{\lambda_1} x + B_2 \text{ при } x_2 \le x \le x_3;$$
$$T_2^* = -\frac{q_2}{\lambda_2} x + B_3 \text{ при } x_3 \le x \le x_4;$$
$$\ldots\ldots..$$
$$T_1^* = -\frac{q_1}{\lambda_1} x + B_m \text{ при } x_m \le x \le x_{m+1}.$$

Константа інтегрування визначається за умови, що $T_1^* = T_0^*$ при $x = 0$, а константи B_2, B_3,..., B_m – на підставі умов $T_1^* = T_2^*$ і $q_1 = q_2$ у точках x_1, x_2,..., x_m.

У результаті знаходження часткових розв'язків диференційних рівнянь (27) і (28) одержані наступні вирази для стрибків $[T_1]_1$, $[T_1]_2$, ..., $[T_1]_m$:

$$[T_1]_1 = \frac{q_1}{\lambda_1} x_1 + T_0,$$
$$[T_1]_2 = -\frac{q_1}{\lambda_2} x_1 + \left(\frac{\lambda_1 - \lambda_2}{\lambda_1 \lambda_2} \right) q_1 l_1 + T_0,$$
$$[T_1]_3 = -\frac{q_1}{\lambda_1} x_1 - \left(\frac{\lambda_1 - \lambda_2}{\lambda_1 \lambda_2} \right) q_1 l_2 - T_0,$$
$$\ldots\ldots..$$
$$[T_1]_m = \left[-\frac{q_1}{\lambda_2} x_m + \left(\frac{\lambda_1 - \lambda_2}{\lambda_1 \lambda_2} \right) q_1 \frac{m l_2}{2} + T_0 \right] (-1)^m.$$

Легко переконатися у тому, що сума усіх цих стрибків дорівнює:

$$\sum_{i=1}^{m} [T_1]_i = \frac{m l_2}{2 \lambda_2} q_1 = \frac{m l_2}{2} \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \frac{dT_1^*}{dx}. \quad (29)$$

Підставивши вираз (29) в (26) і потім виконавши елементарні перетворення, будемо мати:

$$\lambda \left[1 + \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2} - 1 \right) \bar{C} \right] \frac{d < T_1^* >}{dx} = \lambda_1 \frac{d < T_1^* >}{dx}. \quad (30)$$

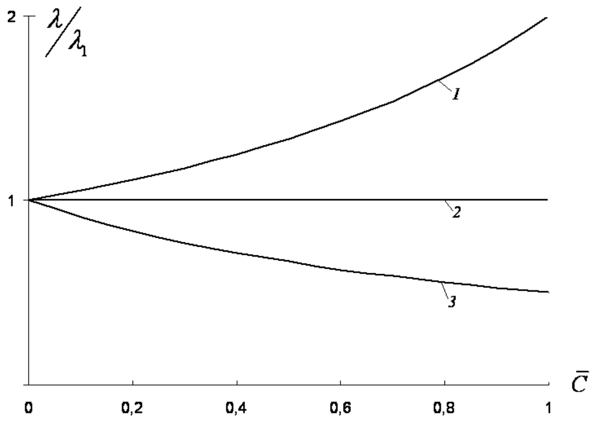

Рис. 2. Графіки залежності величини λ/λ_1 від концентрації $\bar{C}$:
1 – $\frac{\lambda_1}{\lambda_2}$=0.5; *2* – $\frac{\lambda_1}{\lambda_2}$=1; *3* – $\frac{\lambda_1}{\lambda_2}$=2

Звідси одержуємо:

$$\lambda = \frac{\lambda_1}{1 + \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2} - 1\right)\bar{C}},$$

або, у безрозмірному вигляді,

$$\frac{\lambda}{\lambda_1} = \frac{1}{1 + \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2} - 1\right)\bar{C}}. \qquad (31)$$

Із формули (31) випливає, що, по-перше, $\lambda = \lambda_1$ при виконанні однієї із умов $\bar{C} = 0$ або $\lambda_2 = \lambda_1$, і, по-друге, $\lambda = \lambda_2$ при $\bar{C} = 1$. У випадку, коли $\lambda_1 = 0$ або $\lambda_2 = 0$, величина $\lambda = 0$, тобто у цьому випадку теплопровідність даного двофазного середовища відсутня. Усе це свідчить про достовірність формули (31).

На рис. 2 наведені, для прикладу, розрахункові криві залежності величини λ/λ_1 від концентрації $\bar{C}$ для різних значень параметра λ_1/λ_2: 0.5, 1 і 2.

Слід відзначити, що оскільки ефективна теплопровідність відноситься до градієнта середньої температури рідинної фази $d < T_1^* > /dx$, температура $< T_1^* >$ відіграє роль осередненої температури двофазного середовища і визначається за формулою

$$< T_1^* > = \frac{q}{\lambda}x + T_0^*, \qquad (32)$$

де q і T_0^* – задані сталі величини.

На рис. 3 схематично зображені графіки розподілу температури для різних часткових випадків.

Прямі *1* і *2* відносяться до крайніх випадків, коли концентрація $\bar{C} = 0$ і $\bar{C} = 1$ відповідно. Штрихова пряма *3* відповідає формулі (32) при $\lambda_1 < \lambda_2$

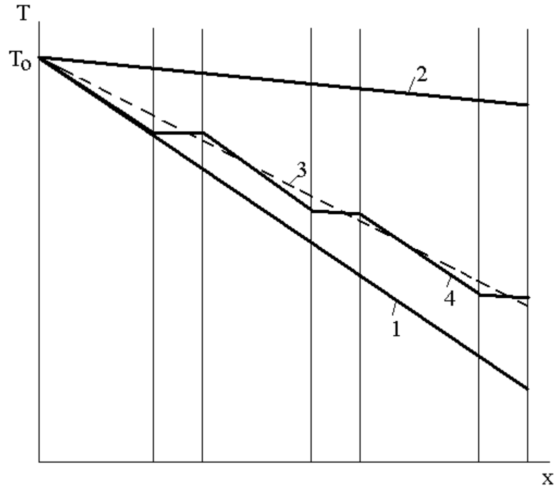

Рис. 3. Графіки розподілу температури:
1 – $\bar{C} = 0$; *2* – $\bar{C} = 1$; *3* – $\lambda_1 < \lambda_2$, $0 < \bar{C} < 1$;
4 – істинний розподіл при $\lambda_1 < \lambda_2$

і $0 < \bar{C} < 1$, а ламана лінія *4* – істинний розподіл температури, який відповідає точним розв'язкам неосереднених диференціальних рівнянь (27) і (28) в областях рідинної і твердої фаз відповідно. Видно, що пряма лінія *3* є не що інше, як осереднена ламана лінія.

ВИСНОВКИ

Використання апарату теорії узагальнених функцій і імовірнісного методу осереднення термодинамічних величин двофазного середовища дозволяє коректно побудувати осереднені диференціальні рівняння гідротермодинаміки для цього середовища.

Основні переваги такого методу побудови осереднених диференціальних рівнянь теплопровідності над методом просторово-часового осереднення полягають у тому, що він дозволяє: безпосередньо записати вихідні диференціальні рівняння притоку тепла для кожної із фаз, незважаючи на те, що термодинамічні характеристики фаз є розривними функціями просторових координат і часу; не робити будь-яких обмежень щодо співвідношення розмірів частинок твердої фази та характерного розміру області, заповненої двофазним середовищем.

Розроблено новий метод визначення ефективного коефіцієнта теплопровідності двофазної суміші, який проілюстровано на простому прикладі двофазного середовища з регулярною структурою.

1. *Буевич Ю.А.* Об эффективной теплопроводности зернистых материалов // ПМТФ.– 1973.– N4.– С. 57–66.
2. *Буевич Ю.А., Корнеев Ю.А.* О переносе тепла и массы в дисперсной среде // ПМТФ.– 1974.– N4.– С. 79–87.
3. *Нигматулин Р.И.* Основы механики гетерогенних серед.– М.: Наука, 1978.– 336 с.
4. *Буевич Ю.А., Корнеев Ю.А., Щелчкова И.Н.* О переносе тепла или массы в дисперсной потоке // Инж.-физ. журнал.– 1976.– N6.– С. 979–985.
5. *Буевич Ю.А., Корнеев Ю.А.* Эффективная теплопроводность дисперсной среды при малых числах Пекле // Инж.-физ. журнал.– 1976.– N4.– С. 607–612.
6. *Щелчкова И.Н.* Эффективная теплопроводность гетерогенной среды с эллипсоидальными частицами // ПМТФ.– 1974.– N1.– С. 107–111.
7. *Криль С.И.* Напорные взвесенесущие потоки.– К.: Наукова думка, 1990.– 160 с.
8. *Владимиров В.С.* Уравнения математической физики.– М.: Наука, 1967.– 436 с.
9. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теоретическая физика, VI. Гидромеханика.– М.: Наука, 1986.– 730 с.
10. *Криль С.И., Берман В.П.* Уравнения турбулентного течения газовзвесей // Прикладна гідромеханіка.– 1999.– 1(73), N1.– С. 26–34.