

Анализ напряженно-деформированного состояния винтового стержня при растяжении с учетом пластических свойств материала

В. Г. Хромов, В. В. Поляков

Севастопольский национальный технический университет, Севастополь, Украина

Получены расчетные зависимости для геометрических параметров винтового стержня при упругом растяжении. Предложена методика учета пластических свойств материала стержня и показано, что они оказывают существенное влияние на результаты расчетов.

Ключевые слова: относительное удлинение, нормальное напряжение, касательное напряжение, относительный сдвиг.

Известно, что упругие элементы, представляющие собой винтовые стержни – цилиндрические пружины, элементы (проволоки или пряди) стальных канатов, кабелей и др., получили широкое распространение в технике. Физически линейные задачи статики винтовых стержней детально исследованы, например, в работах [1–3]. Вместе с тем остаются актуальными нелинейные задачи, возникающие при проектировании технологических процессов изготовления винтовых изделий [2, 4].

Рассмотрим задачу о растяжении винтового упругопластического стержня круглого постоянного сечения (рис. 1) в предположении, что при нагружении торцы образующего цилиндра могут перемещаться только поступательно вдоль его осевой линии. Геометрия продольной оси стержня определяется радиусом образующего цилиндра r , а также углом α между образующей цилиндра и касательной к оси стержня (угол свивки каната). Необходимо найти значения указанных параметров после нагружения.

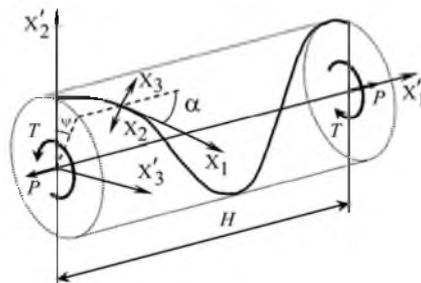


Рис. 1. Расчетная схема стержня.

Задача решается при следующих допущениях: на любом этапе нагружения стержень остается винтовым бруском с постоянными по длине геометрическими характеристиками α , r ; нормальные сечения стержня, плоские до деформации, остаются плоскими и после деформации; рассматривается стержень малой кривизны, т.е. $d/R < 1/5$ (d – диаметр поперечного сечения стержня; R – радиус кривизны стержня); влиянием внутренних

поперечных усилий пренебрегаем; материал несжимаем (коэффициент Пуассона $\mu = 0,5$), не упрочняется, а его поведение при чистом растяжении и чистом сдвиге описывается линейными диаграммами (рис. 2); переход материала стержня из упругого состояния в состояние текучести описывается условием Мизеса, которое для совместного растяжения и сдвига имеет вид: $\sigma^2 + 3\tau^2 = \sigma_T^2$.

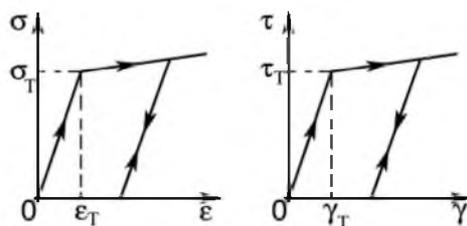


Рис. 2. Диаграммы деформации упругопластического материала без деформационного упрочнения.

В расчетах используются две декартовы системы координат (рис. 1): неподвижная $X'_1 X'_2 X'_3$ и подвижная $X_1 X_2 X_3$, жестко связанная с рассматриваемым поперечным сечением стержня. Дуга продольной оси стержня s отсчитывается от левого торца образующего цилиндра по направлению к правому. Начало подвижной системы координат совпадает с центром тяжести поперечного сечения стержня, ось X_1 направлена по касательной к осевой линии стержня в сторону увеличения координаты s ; оси X_2 и X_3 соответственно совпадают с нормалью к оси стержня и бинормалью.

Проекции произвольного вектора на оси подвижной системы координат связаны с его проекциями на оси неподвижной системы соотношениями [5]

$$\mathbf{a}_i = \mathbf{A}_{ij} \mathbf{a}'_j, \tag{1}$$

где $\mathbf{A}_{ij} = \begin{vmatrix} \cos \alpha & -\sin \psi \sin \alpha & \cos \psi \sin \alpha \\ 0 & -\cos \psi & -\sin \psi \\ \sin \alpha & \sin \psi \cos \alpha & -\cos \psi \cos \alpha \end{vmatrix}$ – матрица перехода; ψ – угловая

координата поперечного сечения стержня (рис. 1).

Подставляя в (1) проекции главного вектора $N(P, 0, 0)$ и главного момента внутренних сил $M(T, Pr \sin \psi, -Pr \cos \psi)$ на оси неподвижной системы координат, получаем их проекции на оси подвижной системы координат:

$$N(P \cos \alpha, 0, P \sin \alpha); \quad M(T \cos \alpha + Pr \sin \alpha, 0, T \sin \alpha - Pr \cos \alpha). \tag{2}$$

Обозначим параметры, характеризующие состояние стержня до нагружения, индексом i , после нагружения – индексом $i+1$. Запишем систему уравнений для нахождения искомых параметров $\alpha_{i+1}, r_{i+1}, T_{i+1}$.

Геометрическая часть задачи. Приращения относительного удлинения, кручения и кривизны продольной оси стержня рассчитываются по формулам [1]

$$\begin{cases} \Delta\varepsilon_1 = \varepsilon_{i+1} - \varepsilon_i = \frac{\sin \alpha_0}{r_0} \left(\frac{r_{i+1}}{\sin \alpha_{i+1}} - \frac{r_i}{\sin \alpha_i} \right); \\ \Delta\theta = \theta_{i+1} - \theta_i = \frac{\sin \alpha_{i+1} \cos \alpha_{i+1}}{r_{i+1}} - \frac{\sin \alpha_i \cos \alpha_i}{r_i}; \\ \Delta k = k_{i+1} - k_i = \frac{\sin^2 \alpha_{i+1}}{r_{i+1}} - \frac{\sin^2 \alpha_i}{r_i}, \end{cases} \quad (3)$$

где α_0 – угол свивки; $r_0 = d_k/2$ – радиус ненагруженного стержня.

Физическая часть задачи. Состояние стержня описывается уравнениями упругопластической деформации [4], которые для данной задачи имеют вид

$$\begin{cases} \Delta N = G_{11} \Delta\varepsilon_1 + G_{12} \Delta\theta + G_{13} \Delta k; \\ \Delta M_1 = G_{21} \Delta\varepsilon_1 + G_{22} \Delta\theta + G_{23} \Delta k; \\ \Delta M_3 = G_{31} \Delta\varepsilon_1 + G_{32} \Delta\theta + G_{33} \Delta k. \end{cases} \quad (4)$$

Здесь G_{11}, \dots, G_{33} – обобщенные коэффициенты жесткости стержня, определяемые по формулам

$$\begin{cases} G_{11} = EF - E \int_{F_p} \frac{\sigma^2}{\sigma_T^2} dF; & G_{22} = \frac{EJ_1}{3} - \frac{E}{3} \int_{F_p} \frac{3\tau^2}{\sigma_T^2} \rho^2 dF; \\ G_{33} = EJ_3 - E \int_{F_p} \frac{\sigma^2}{\sigma_T^2} x_2^2 dF; \\ G_{12} = G_{21} = E \int_{F_p} \frac{\sigma\tau}{\sigma_T^2} \rho dF; & G_{13} = G_{31} = E \int_{F_p} \frac{\sigma^2}{\sigma_T^2} x_2 dF; \\ G_{23} = G_{32} = E \int_{F_p} \frac{\sigma\tau}{\sigma_T^2} x_2 \rho dF, \end{cases} \quad (5)$$

где F – площадь поперечного сечения стержня; E – модуль упругости материала стержня; σ_T – предел текучести материала стержня; J_1, J_3 – полярный и осевой моменты инерции поперечного сечения стержня.

Решая (4) относительно приращений относительного удлинения, кручения и кривизны, получаем

$$\begin{cases} \Delta\varepsilon_1 = c_{11} \Delta N + c_{21} \Delta M_1 + c_{13} \Delta M_3; \\ \Delta\theta = c_{21} \Delta N + c_{22} \Delta M_1 + c_{23} \Delta M_3; \\ \Delta k = c_{31} \Delta N + c_{32} \Delta M_1 + c_{33} \Delta M_3, \end{cases} \quad (6)$$

где c_{11}, \dots, c_{33} – коэффициенты,

$$\begin{cases} c_{11} = \frac{G_{22}G_{33} - G_{23}^2}{c_0}; & c_{22} = \frac{G_{11}G_{33} - G_{13}^2}{c_0}; & c_{33} = \frac{G_{11}G_{22} - G_{12}^2}{c_0}; \\ c_{12} = c_{21} = \frac{G_{13}G_{23} - G_{12}G_{33}}{c_0}; & c_{13} = c_{31} = \frac{G_{12}G_{23} - G_{13}G_{22}}{c_0}; \\ c_{23} = c_{32} = \frac{G_{12}G_{13} - G_{11}G_{23}}{c_0}; \\ c_0 = G_{11}G_{22}G_{33} - G_{11}G_{23}^2 - G_{22}G_{13}^2 + 2G_{13}G_{12}G_{23}. \end{cases} \quad (7)$$

Приращения внутренних продольного усилия, крутящего и изгибающего моментов определяются в соответствии с (2):

$$\begin{cases} \Delta N = N_{i+1} - N_i = P_{i+1} \cos \alpha_{i+1} - P_i \cos \alpha_i; \\ \Delta M_1 = M_{1_{i+1}} - M_{1_i} = P_{i+1}r_{i+1} \sin \alpha_{i+1} + T_{i+1} \cos \alpha_{i+1} - \\ - P_i r_i \sin \alpha_i - T_i \cos \alpha_i; \\ \Delta M_3 = M_{3_{i+1}} - M_{3_i} = -P_{i+1}r_{i+1} \cos \alpha_{i+1} + T_{i+1} \sin \alpha_{i+1} + \\ + P_i r_i \cos \alpha_i - T_i \sin \alpha_i. \end{cases} \quad (8)$$

Подставляя (8) в (6) с учетом (3), получаем искомые уравнения:

$$\begin{aligned} \frac{\sin \alpha_0}{r_0} \left(\frac{r_{i+1}}{\sin \alpha_{i+1}} - \frac{r_i}{\sin \alpha_i} \right) &= c_{11}(P_{i+1} \cos \alpha_{i+1} - P_i \cos \alpha_i) + \\ &+ c_{12}(P_{i+1}r_{i+1} \sin \alpha_{i+1} + T_{i+1} \cos \alpha_{i+1} - P_i r_i \sin \alpha_i - T_i \cos \alpha_i) + \\ &+ c_{13}(-P_{i+1}r_{i+1} \cos \alpha_{i+1} + T_{i+1} \sin \alpha_{i+1} + P_i r_i \cos \alpha_i - T_i \sin \alpha_i); \end{aligned} \quad (9a)$$

$$\begin{aligned} \frac{\sin \alpha_{i+1} \cos \alpha_{i+1}}{r_{i+1}} - \frac{\sin \alpha_i \cos \alpha_i}{r_i} &= c_{21}(P_{i+1} \cos \alpha_{i+1} - P_i \cos \alpha_i) + \\ &+ c_{22}(P_{i+1}r_{i+1} \sin \alpha_{i+1} + T_{i+1} \cos \alpha_{i+1} - P_i r_i \sin \alpha_i - T_i \cos \alpha_i) + \\ &+ c_{23}(-P_{i+1}r_{i+1} \cos \alpha_{i+1} + T_{i+1} \sin \alpha_{i+1} + P_i r_i \cos \alpha_i - T_i \sin \alpha_i); \end{aligned} \quad (9б)$$

$$\begin{aligned} \frac{\sin^2 \alpha_{i+1}}{r_{i+1}} - \frac{\sin^2 \alpha_i}{r_i} &= c_{31}(P_{i+1} \cos \alpha_{i+1} - P_i \cos \alpha_i) + \\ &+ c_{32}(P_{i+1}r_{i+1} \sin \alpha_{i+1} + T_{i+1} \cos \alpha_{i+1} - P_i r_i \sin \alpha_i - T_i \cos \alpha_i) + \\ &+ c_{33}(-P_{i+1}r_{i+1} \cos \alpha_{i+1} + T_{i+1} \sin \alpha_{i+1} + P_i r_i \cos \alpha_i - T_i \sin \alpha_i). \end{aligned} \quad (9в)$$

Для упругой стадии деформации стержня, когда выполняются соотношения $c_{11} = \frac{1}{G_{11}}$, $c_{22} = \frac{1}{G_{22}}$, $c_{33} = \frac{1}{G_{33}}$, $c_{12} = c_{21} = c_{13} = c_{31} = c_{23} = c_{32} = 0$, система (9) имеет аналитическое решение:

$$\begin{cases} \alpha_{i+1} = \arg\left(Z - i \frac{Zk_{11}k_{32}(Zk_{13} - k_{11})}{k_4}\right); \\ r_{i+1} = -\frac{Zk_{32}(Zk_{13} - k_{11})^2}{k_4}; \\ T_{i+1} = \frac{Z^4 k_{13}^2 k_{23} - 2Z^3 k_{11} k_{13} k_{23} + Z^2 (k_{11}^2 k_{23} - k_{13}^2 k_{23}) - k_{11}^2 k_{23} - k_{11} k_{12} k_{22}}{r_i k_{12} Z (Zk_{13} - k_{11})}, \end{cases} \quad (10)$$

где

$$k_{11} = P_i r_0 \cos \alpha_i \sin \alpha_i - G_{11} r_i \sin a_0; \quad k_{12} = G_{11} \sin a_0 \sin \alpha_i;$$

$$k_{13} = P_{i+1} r_0 \sin \alpha; \quad k_{21} = r_i G_{22};$$

$$k_{22} = r_i^2 P_i \sin \alpha_i + r_i T_i \cos \alpha_i - \sin \alpha_i \cos \alpha_i C_{22}; \quad k_{23} = P_{i+1} r_i;$$

$$k_{31} = r_i G_{33}; \quad k_{32} = r_i T_i \sin \alpha_i - \sin^2 \alpha_i G_{33} - r_i^2 P_i \cos \alpha_i;$$

$$k_4 = -k_{23} k_{13}^2 Z^2 + (k_{13} k_{12} k_{22} + k_{21} k_{12}^2 - k_{31} k_{12}^2) Z - k_{11} k_{12} k_{22} - k_{11}^2 k_{23};$$

Z – действительный корень алгебраического уравнения шестой степени, которое ввиду громоздкости не приводится. Выражения (10) справедливы как для малых, так и для больших деформаций.

Для пластической стадии решение задачи усложняется тем, что коэффициенты c_{11}, \dots, c_{33} являются неявными функциями α_i, r_i , и система (9) справедлива только для малых деформаций. В связи с этим аналитически решить указанную систему относительно неизвестных параметров $\alpha_{i+1}, r_{i+1}, T_{i+1}$ не представляется возможным. Численное решение задачи выполняется методом конечных приращений. Для расчета напряженного состояния используется кинематическая модель Прагера, согласно которой изменение напряженного состояния стержня в произвольной точке описывается неинтегрируемыми аналитически дифференциальными уравнениями [6]. Для первого шага принимается $P_i = 0, \alpha_i = 0, i = r_0, T_i = 0, P_{i+1} = \Delta P$, где ΔP – некоторое приращение растягивающего усилия. На каждом следующем шаге задается $P_{i+1} = P_i + \Delta P$, а затем согласно (9) вычисляются $\alpha_{i+1}, r_{i+1}, T_{i+1}$. Коэффициенты c_{11}, \dots, c_{33} определяются согласно (5) и (7) с использованием численных методов.

Для реализации описанного алгоритма разработана программа расчета на ЭВМ. На рис. 3 изображены расчетные зависимости угла свивки α и радиуса r стержня (длина $H = 150$ мм, $r_0 = 6$ мм, $d = 2$ мм, $E = 2 \cdot 10^5$ МПа,

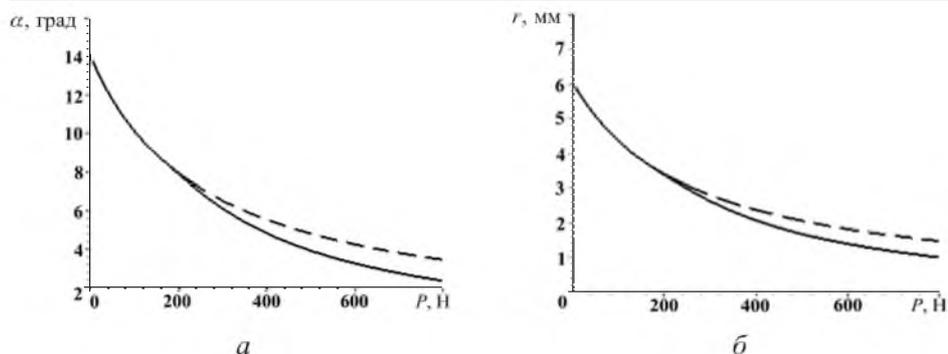


Рис. 3. Расчетные зависимости угла свивки (а) и радиуса (б) стержня от растягивающего усилия с учетом (сплошные линии) и без учета (штриховые линии) пластических свойств материала.

$\sigma_T = 750$ МПа) от растягивающего усилия с учетом и без учета пластических свойств материала.

Заключение. При решении технологических задач необходимо учитывать, что использование формул, соответствующих чисто упругой стадии нагружения стержня, может приводить к существенной (100% и более) погрешности в определении геометрических параметров винтового стержня. Предложенная методика учета пластических свойств материала может использоваться для повышения эффективности решения прикладных задач.

Резюме

Отримано розрахункові залежності для геометричних параметрів гвинтового стрижня при пружному розтязі. Запропоновано методику урахування пластичних властивостей матеріалу стрижня і показано, що вони мають значний вплив на результати розрахунків.

1. Светлицкий В. А. Механика стержней: В 2 ч. Ч. 1. Статика. – М.: Высш. шк., 1987. – 320 с.
2. Пономарев С. Д., Андреева Л. Е. Расчет упругих элементов машин и приборов. – М.: Машиностроение, 1980. – 326 с.
3. Глушко М. Ф. Стальные подъемные канаты. – Киев: Техніка, 1966. – 328 с.
4. Хромов В. Г. Механика процесса холодной упругопластической деформации стержня. – Киев: УМК ВО, 1990. – 48 с.
5. Светлицкий В. А. Механика гибких стержней и нитей. – М.: Машиностроение, 1978. – 222 с.
6. Ильющин А. А. Пластичность. – М.: Гостехиздат, 1948. – 376 с.

Поступила 29. 12. 2002