УДК 539.37

# Строгое решение задач теории течения с изотропно-кинематическим упрочнением. Сообщение 3. Параметрическая форма решений

**К. Б. Иващенко, В. А. Ромащенко**

Институт проблем прочности им. Г. С. Писаренко НАН Украины, Киев, Украина

*Точные аналитические решения уравнений теории течения для начально-изотропных материалов с изотропно-кинематическим упрочнением в случае произвольных многозвенных ломаных кусочно-линейных траекторий нагружения, полученные ранее авторами в явном виде с помощью трехкратных обращений некоторых функций, связанных с упрочнением, записываются в параметрической форме в виде квадратур, которые не требуют обращения никаких функций.*

***Ключевые слова***: изотропный упругопластический материал, изотропно-кинематическое упрочнение, решения в квадратурах в параметрической форме.

Одним из практически важных и теоретически интересных частных случаев упругопластического поведения материалов является первоначально изотропный упругопластический материал, описываемый теорией течения, которая включает условие текучести Мизеса, ассоциированный к нему закон течения и деформационное комбинированное (изотропно-кинематическое) упрочнение. Ранее [1, 2] были приведены обзор литературы по данной теме, а также разработанная авторами методика получения в явном виде аналитических решений, описывающих поведение такого материала, в частности, в случаях, когда нагружение представляет собой составленную из прямолинейных отрезков ломаную линию в девиаторном пространстве напряжений или полных деформаций. С использованием этой методики получены решения ряда статически определимых задач [1, 2] в виде зависимости искомых функций от длины траектории нагружения для различных частных случаев зависимости радиуса круга текучести от истории пластического деформирования.

В рамках предложенного подхода для получения окончательного решения требовалось неоднократно (три раза) проводить обращения некоторых монотонных функций, определяемых для каждой конкретной модели поведения материала его пластическими характеристиками. Записать эти обращения в явном виде (через элементарные-специальные функции или в виде квадратур) удается лишь для достаточно ограниченного круга моделей поведения материала.

В настоящей работе приведены результаты применения другого подхода к решению сформулированной ранее [1, 2] системы уравнений. При этом искомые решения отыскиваются в виде функций не от длины траектории нагружения, а от параметра Одквиста. Форма решений – параметрическая, для их получения не нужны обращения ни одной функции – решения записываются в квадратурах. Такая форма записи решений может быть полезна, в частности, при численном моделировании поведения упругопластических материалов с комбинированным упрочнением. Значение параметра Одквиста, соответствующее точке, находящейся в требуемом месте на заданном отрезке траектории нагружения, может быть найдено с нужной степенью точности приближенно, а все остальные необходимые для расчета величины явно вычисляться из этого приближенного значения.

1. **Математическая модель**. Математическая модель для моделирования поведения упругопластического материала с комбинированным упрочнением подробно рассмотрена в [1]. Ниже приведены только уравнения модели без их подробного описания:

$$\begin{cases} e_{kj} = e_{kj}^p + e_{kj}^e; \\ S_{kj} = 2Ge_{kj}^e; \\ de_{kj}^p = \dfrac{d\lambda}{2G}(s_{kj} - \rho_{kj}); \\ \rho_{kj} = 2G\eta e_{kj}^p; \\ \sigma_{\rho i} = \Phi(q), \end{cases} \tag{1}$$

где $\sigma_{\rho i}$ – эквивалентное активное напряжение,

$$\sigma_{\rho i} = \sqrt{\frac{3}{2}(s_{kj} - \rho_{kj})^2}; \tag{2}$$

$e_{kj}$ – компоненты девиатора полных деформаций, которые могут быть представлены в виде суммы упругой $e_{kj}^e$ и пластических $e_{kj}^p$ частей; для компонент девиаторов упругих деформаций $e_{kj}^e$ и напряжений $s_{kj}$ справедлив закон Гука (второе из уравнений (1)); $G$ – модуль сдвига материала; $\lambda$ – безразмерный множитель Лагранжа; $de_{kj}^p$ – компоненты тензора приращений пластической деформации; $\rho_{kj}$ – текущие координаты перемещающегося в процессе пластического деформирования центра поверхности нагружения Мизеса. Через $\Phi(q) > 0$ обозначена некоторая заданная функция изотропного деформационного упрочнения, которая зависит от параметра Одквиста $q$:

$$q(x) = \int_0^x \overline{\dot{e}^p} dx'; \qquad dq = \overline{de^p} = \sqrt{\frac{2}{3} de_{kj}^p de_{kj}^p}; \qquad \overline{\dot{e}^p} = \sqrt{\frac{2}{3} \dot{e}_{kj}^p \dot{e}_{kj}^p}, \tag{3}$$

где $x$ – длина траектории нагружения; точка над параметром обозначает дифференцирование по $x$. Линейное кинематическое деформационное упрочнение характеризуется заданным безразмерным коэффициентом $\eta \geq 0$.

Здесь и далее нижними индексами $kj$ обозначены компоненты тензоров в некоторой системе координат, заданной тройкой ортогональных координатных осей ($k, j = \{1,\ 2,\ 3\}$), принято также стандартное соглашение о суммировании по повторяющимся индексам.

Уравнения (1), (2) справедливы при активном нагружении. Как получить решение на неактивных участках (разгрузочных или упругих), подробно объяснялось в предыдущих сообщениях [1, 2]. Далее будут рассматриваться только активные процессы.

Отыскиваем решение задачи для ломаной траектории нагружения в виде последовательности решений данной задачи для отдельных прямолинейных отрезков, составляющих эту ломаную. Полагаем, что в начальной точке отрезка все величины известны (далее будем их обозначать верхним или нижним индексом “0”: $s_{kj}^0$, $\rho_{kj}^0$, $q_0$ и т.д.), а в конечной точке отрезка они находятся в результате решения задачи и используются как начальные данные при получении решения для следующего отрезка ломаной.

Из (1)–(3) следует связь между $d\lambda$ и $q$:

$$d\lambda = 3Gdq/\Phi(q). \tag{4}$$

2. **Задание прямолинейной траектории нагружения в девиаторном пространстве напряжений**. Зададим в девиаторном пространстве напряжений произвольный прямолинейный отрезок многозвенной ломаной, вдоль которого происходит нагружение:

$$s_{kj} = s_{kj}^0 + S_{kj}(x - x_0), \tag{5}$$

причем примем, что

$$S_{kj} S_{kj} = 1. \tag{6}$$

Тогда $x$ – длина траектории нагружения в пятимерном девиаторном пространстве напряжений, которое рассматривается как подпространство девятимерного тензорного пространства тензоров второго ранга с метрикой:

$$dl^2 = dl_{kj} dl_{kj} \qquad (k, j = 1, 2, 3).$$

Из (1)–(4) следует

$$\frac{d\rho_{kj}}{dq} + \frac{3G\eta}{\Phi(q)} \rho_{kj} = \frac{3G\eta}{\Phi(q)} s_{kj}. \tag{7}$$

Решение обыкновенного линейного дифференциального уравнения первого порядка (7) с учетом (5) можно записать так [3]:

$$\rho_{kj} = s_{kj} + \frac{\rho_{kj}^0 - s_{kj}^0 - S_{kj} y}{dy/dx}, \tag{8}$$

где

$$\begin{cases} y = \int\limits_{x_0}^{x} \exp\left[3G\eta \int\limits_{q_0}^{q} \frac{dq'}{\Phi(q')}\right] dx; \\ y(x_0) = 0, \quad y > 0 \quad \text{при} \quad x > x_0; \\ \frac{dy}{dx} = \exp\left[3G\eta \int\limits_{q_0}^{q} \frac{dq'}{\Phi(q')}\right]. \end{cases} \tag{9}$$

Подставляя (8) в уравнение (2), с учетом последнего уравнения системы (1) получаем

$$\sqrt{y^2 + 2By + C^2} = P(q, q_0), \tag{10}$$

где

$$P(q, q_0) = \sqrt{\frac{2}{3}} \Phi(q) \exp\left[3G\eta \int\limits_{q_0}^{q} \frac{dq'}{\Phi(q')}\right]; \tag{11}$$

$$\begin{aligned} B &= S_{kj}(s_{kj}^0 - \rho_{kj}^0); \\ C^2 &= (s_{kj}^0 - \rho_{kj}^0), \end{aligned} \tag{12}$$

причем ранее [1,2] было показано, что

$$C^2 = \frac{2}{3} \Phi^2(q_0) = P^2(q_0, q_0) \geq B^2 \qquad \text{и} \qquad B \geq 0.$$

С учетом вышеизложенного и соотношений (9) получаем решение (10) относительно $y$:

$$y = -B + \sqrt{B^2 - P^2(q_0, q_0) + P^2(q, q_0)}. \tag{13}$$

Располагая отношением $y(q)$, можно найти $x(q)$. Из (9) и (11) следует

$$dx = \frac{P(q, q)}{P(q, q_0)} dy.$$

Интегрируя последнее выражение по частям, получаем

$$x - x_0 = \frac{P(q, q)}{P(q, q_0)} y + \sqrt{6} G\eta \int\limits_{q_0}^{q} \frac{y}{P(q', q_0)} dq'. \tag{14}$$

 ISSN 0556-171X. Проблемы прочности, 2003, № 4

Находим зависимость $\rho_{kj}(q)$. Из (8) следует

$$\rho_{kj} = s_{kj}^0 + S_{kj}(x - x_0) + \frac{P(q,q)}{P(q,q_0)}(\rho_{kj}^0 - s_{kj}^0 - S_{kj}y). \tag{15}$$

В результате подстановки (14) в (15) получим

$$\rho_{kj} = s_{kj}^0 + (\rho_{kj}^0 - s_{kj}^0)\frac{P(q,q)}{P(q,q_0)} + \sqrt{6}GS_{kj}\eta\int_{q_0}^{q}\frac{y}{P(q',q_0)}dq'. \tag{16}$$

Если дополнительно учесть, что

$$\sqrt{6}G\eta\int_{q_0}^{q}\frac{dq'}{P(q',q_0)} = 1 - \frac{P(q,q)}{P(q,q_0)}, \tag{17}$$

то окончательно с использованием выражения (13) можно записать:

$$\begin{cases} x = x_0 - B + \dfrac{P(q,q)}{P(q,q_0)}\sqrt{B^2 - P^2(q_0,q_0) + P^2(q,q_0)} + \\ \quad + \sqrt{6}G\eta\displaystyle\int_{q_0}^{q}\frac{\sqrt{B^2 - P^2(q_0,q_0) + P^2(q',q_0)}}{P(q',q_0)}dq'; \\ \rho_{kj} = s_{kj}^0 - BS_{kj} + \dfrac{P(q,q)}{P(q,q_0)}(\rho_{kj}^0 - s_{kj}^0 + BS_{kj}) + \\ \quad + \sqrt{6}\,G\eta S_{kj}\displaystyle\int_{q_0}^{q}\frac{\sqrt{B^2 - P^2(q_0,q_0) + P^2(q',q_0)}}{P(q',q_0)}dq'; \\ e_{kj}^p = \dfrac{1}{2G\eta}\rho_{kj}; \quad e_{kj}^e = \dfrac{1}{2G}s_{kj}; \quad e_{kj} = e_{kj}^e + e_{kj}^p, \end{cases} \tag{18}$$

где значения $s_{kj}(x)$, $P(q,q_0)$ и $B$ определяются соответственно по выражениям (5), (11) и (12).

3. **Задание прямолинейной траектории нагружения в девиаторном пространстве полных деформаций**. Зададим произвольный прямолинейный отрезок многозвенной ломаной, вдоль которого происходит нагружение, аналогично рассмотренному в п. 2, но теперь в девиаторном пространстве полных деформаций:

$$e_{kj} = e_{lk}^0 + E_{kj}(x - x_0). \tag{19}$$

При этом полагаем, что

$$E_{kj}E_{kj} = 1. \tag{20}$$

Тогда $x$ – длина траектории деформаций в соответствующем пространстве.

Из (1)–(4) можно получить следующее дифференциальное уравнение:

$$\frac{ds_{kj}}{dq}+\frac{3G(1+\eta)}{\Phi(q)}=2G\left[\frac{de_{kj}}{dq}+\frac{3G\eta}{\Phi(q)}e_{kj}\right]. \tag{21}$$

Решение уравнения (21) с учетом (19) можно записать так:

$$s_{kj}=\frac{1}{1+\eta}\left(3G\eta e_{kj}+\frac{s_{kj}^0-\rho_{kj}^0+2GE_{kj}z}{dz/dx}\right), \tag{22}$$

где

$$\begin{cases} z=\int\limits_{x_0}^{x}\exp\left[3G(1+\eta)\int\limits_{q_0}^{q}\frac{dq'}{\Phi(q')}\right]dx; \\ z(x_0)=0, \quad z>0 \quad \text{при} \quad x>x_0; \\ \dfrac{dz}{dx}=\exp\left[3G(1+\eta)\int\limits_{q_0}^{q}\frac{dq'}{\Phi(q')}\right]. \end{cases} \tag{23}$$

Из (1) следует

$$2G\eta e_{kj}=\eta s_{kj}+\rho_{kj}. \tag{24}$$

Подставляя (24) в (22), получаем

$$s_{kj}-\rho_{kj}=\frac{s_{kj}^0-\rho_{kj}^0+2GE_{kj}z}{dz/dx}, \tag{25}$$

а (25) в (2) с учетом последнего уравнения системы (1) –

$$\sqrt{z^2+2Az+D^2}=R(q,q_0), \tag{26}$$

где

$$R(q,q_0)=\frac{\Phi(q)}{G\sqrt{6}}\exp\left[3G(1+\eta)\int\limits_{q_0}^{q}\frac{dq'}{\Phi(q')}\right]; \tag{27}$$

$$\begin{aligned} &A=E_{kj}(s_{kj}^0-\rho_{kj}^0)/2G; \\ &D^2=(s_{kj}^0-\rho_{kj}^0)/4G^2, \end{aligned} \tag{28}$$

причем ранее [1, 2] было показано, что на активных участках

$$D^2 = \Phi^2(q_0)/6G^2 = R^2(q_0, q_0) \geq A^2 \qquad \text{и} \qquad A \geq 0.$$

С учетом изложенного выше и свойств (23) получаем решение (26) относительно $z$:

$$z = -A + \sqrt{A^2 - R^2(q_0, q_0) + R^2(q, q_0)}. \tag{29}$$

Располагая отношением $z(q)$, можно, по аналогии с процедурой, проведенной в предыдущем разделе, найти из (23) выражение для $x(q)$, и, подставляя в (19), (22) $x - x_0$ как функцию $q$, – выражение для $s_{kj}(q)$. Следовательно, окончательное решение задачи можно записать в параметрической форме:

$$\begin{cases} x = x_0 - A + \dfrac{R(q,q)}{R(q,q_0)}\sqrt{A^2 - R^2(q_0,q_0) + R^2(q,q_0)} + \\ + \sqrt{\dfrac{3}{2}}(1+\eta)\displaystyle\int_{q_0}^{q} \dfrac{\sqrt{A^2 - R^2(q_0,q_0) + R^2(q',q_0)}}{R(q',q_0)} dq'; \\ s_{kj} = \dfrac{\eta s_{kj}^0 + \rho_{kj}^0 - 2G\eta E_{kj} A}{1+\eta} + \\ + \sqrt{6}\, G\eta E_{kj} \displaystyle\int_{q_0}^{q} \dfrac{\sqrt{A^2 - R^2(q_0,q_0) + R^2(q',q_0)}}{R(q',q_0)} dq' + \\ + \dfrac{R(q,q)}{R(q,q_0)}\left[\dfrac{s_{kj}^0 - \rho_{kj}^0 - 2GE_{kj}A}{1+\eta} + 2GE_{kj}\sqrt{A^2 - R^2(q_0,q_0) + R^2(q,q_0)}\right]; \\ e_{kj}^e = \dfrac{1}{2G} s_{kj}; \quad e_{kj}^p = e_{kj} - e_{kj}^e; \quad \rho_{kj} = 2G\eta e_{kj}^p, \end{cases} \tag{30}$$

где значения $e_{kj}(x)$, $R(q, q_0)$ и $A$ определяются по выражениям (19), (27) и (28) соответственно.

Таким образом, можно заключить, что в полученных параметрических решениях уравнений теории течения с изотропно-кинематическим упрочнением зависимости всех искомых величин от параметра Одквиста записываются в квадратурах.

## Резюме

Точні аналітичні розв’язки рівнянь теорії текучості для початково-ізотропних матеріалів з ізотропно-кінематичним зміцненням у випадку довільних багатоланкових ломаних кусочно-лінійних траєкторій навантаження, котрі отримано раніше авторами в явному вигляді за допомогою триразових

обернень деяких функцій, що пов'язані зі зміцненням, записуються в параметричній формі у вигляді квадратур. Останні не потребують обернення ніяких функцій.

1. *Ромащенко В. А.*, *Лепихин П. П.*, *Иващенко К. Б.* Строгое решение задач теории течения с изотропно-кинематическим упрочнением. Сообщ. 1. Задание траекторий нагружения в пространстве напряжений // Пробл. прочности. – 1999. – № 6. – С. 81 – 92.
2. *Ромащенко В. А.*, *Лепихин П. П.*, *Иващенко К. Б.* Строгое решение задач теории течения с изотропно-кинематическим упрочнением. Сообщ. 2. Задание траекторий нагружения в пространстве деформаций // Там же. – 2000. – № 1. – С. 62 – 71.
3. *Смирнов В. И.* Курс высшей математики. – М.: Наука, 1974. – Т. 2. – 656 с.

Поступила 18. 07. 2002