

УДК 539.3

## РАВНОМЕРНО-ВРАЩАТЕЛЬНЫЕ КОНФИГУРАЦИИ ТОЧЕЧНЫХ ВИХРЕЙ

Х. АРЕФ\*, В. В. МЕЛЕШКО\*\*, А. А. ГУБА\*\*\*, А. А. ГУРЖИЙ\*\*\*\*

\* Технический университет Дании, Лингбю, Дания

\*\* Киевский национальный университет имени Тараса Шевченко, Украина

\*\*\* Политехнический институт и университет штата Вирджиния, Блэксбург, США

\*\*\*\* Институт гидромеханики НАН Украины, Киев

Получено 20.04.2007

Рассматривается задача о построении конфигураций и анализе устойчивости стационарного вращения системы  $N$  одинаковых точечных вихрей на плоскости. В работе приводится краткий обзор имеющихся в литературе методов поиска равномерно вращающихся вихревых структур. Предложен новый метод построения симметричных и несимметричных конфигураций точечных вихрей с одинаковой интенсивностью, основанный на численном решении системы нелинейных алгебраических уравнений. Анализ полученных решений позволил сформировать расширенный каталог равномерно вращающихся структур, содержащих  $N$  (где  $2 \leq N \leq 10$ ) точечных вихрей. В каталог включены 13 симметричных и 25 несимметричных вихревых конфигураций. Сравнительный анализ траекторий движения системы точечных вихрей без начального возмущения и с начальным возмущением показывает, что симметричные конфигурации содержат как устойчивые, так и неустойчивые структуры. В то же время, все несимметричные вихревые конфигурации являются неустойчивыми.

Розглядається задача про побудову конфігурацій і аналіз стійкості стаціонарного обертання системи  $N$  однакових точкових вихорів на площині. У роботі наводиться короткий огляд існуючих у літературі методів пошуку вихрових структур, що рівномірно обертаються. Запропонований новий метод побудови симетричних і несиметричних конфігурацій точкових вихорів з однаковою інтенсивністю, заснований на чисельному розв'язку системи нелінійних алгебраїчних рівнянь. Аналіз одержаних розв'язків дозволив сформувати розширений каталог структур, що рівномірно обертаються і містять  $N$  (де  $2 \leq N \leq 10$ ) точкових вихорів. Каталог вміщує 13 симетричних і 25 несиметричних вихрових конфігурацій. Порівняльний аналіз траєкторій руху системи точкових вихорів без початкового збудження і з початковим збудженням показує, що симетричні конфігурації містять як стійкі, так і нестійкі структури. У той же час, всі несиметричні вихрові конфігурації є нестійкими.

A problem on construction of configurations and analysis of stability of stationary rotation of a system  $N$  of identical point vortices on a plane is considered. A brief review on existing in literature methods to search the uniformly-rotating vortex structures is carried out. A new method to construct the symmetric and asymmetric configurations of point vortices with equal intensity based on numeral solution of a system of nonlinear algebraic equalizations is proposed. The analysis of achieved solutions allowed to form an extended catalogue of uniformly-rotated structures containing  $N$  (where  $2 \leq N \leq 10$ ) point vortices. The catalogue has 13 symmetric and 25 asymmetrical vortex configurations. The comparative analysis of trajectories of point vortex system without initial perturbations and with initial perturbations shows that symmetric configurations contain both steady and unsteady structures. On the other hand, all asymmetrical vortex configurations are unsteady.

### ВВЕДЕНИЕ

В следующем году будет отмечаться 150-летний юбилей одной из самых знаменитых и весомых работ в гидродинамике – классической статьи [1] выдающегося немецкого физика, математика, акустика, физиолога, психолога – естествоиспытателя в старинном смысле этого слова Г. Гельмгольца (1821–1894), заложившего этой работой<sup>1</sup> основание теории вихрей. Сейчас трудно сказать с определенностью, что побудило бывшего хирур-

га гарнизонного драгунского полка в Потсдаме, выпускника Военного медико-хирургического института Фридриха-Вильгельма в Берлине<sup>2</sup>, молодого профессора кафедры анатомии и физиологии Боннского университета<sup>3</sup>, обратится к весьма трудным в математическом плане нелинейным уравнениям Эйлера движения идеальной жидко-

<sup>2</sup>Институт при бесплатности обучения налагал на своих воспитанников обязанность отслужить по его окончании несколько лет в армии или на флоте.

<sup>3</sup>Статья вышла, когда Гельмгольц уже был профессором кафедры физиологии Гейдельбергского университета. Жизнь и научные труды этого выдающегося физика, математика, акустика, физиолога, психолога (естествоиспытателя, в старинном смысле этого слова) XIX века – на его кончину откликнулись некрологами более 50 научных журналов по всему миру – подробно описаны во многих книгах и статьях его коллег и учеников (выделим замечательный очерк А. Г. Столетова [7]) и его последователей [8, 9]. Назовем лишь книгу [10], в которой можно найти детальную библиографию; см. также [11, р. 197] для дальнейших ссылок.

<sup>1</sup>Существует английский перевод [2], сделанный Тэйттом, а также русский перевод [3], выполненный под редакцией и с обширными комментариями С. А. Чаплыгина [4]. В дальнейшем мы будем давать необходимые ссылки именно на этот русский перевод, имеющийся как у одного из авторов, так и на сайте <http://ivanik3.narod.ru>. Эта же работа опубликована в виде книги [5] и журнальной статьи [6].

сти. Сам Гельмгольц в речи на банкете по поводу своего 70-летия (события, собравшего 2 ноября 1891 года в Берлине 260 друзей и почитателей) дал такую развернутую трактовку [12, с. XXI]:

Мне удалось решить некоторые физико-математические задачи, и в том числе даже такие, над которыми тщетно трудились великие математики со времен Эйлера, например вопросы о вихревых движениях и о разрывности движения в жидкостях, вопрос о распространении звука у открытых концов органичных труб, и прочее. Но та гордость, какую мог бы внушать мне в этих случаях конечный результат, значительно принижались от сознания, что решение подобных задач почти всегда удавалось мне не иначе как путем постепенного обобщения удобных частных случаев, рядом счастливых проблесков мысли, приходивших в голову после долгого блуждания по сторонам. Я могу сравнить себя с путником, который предпринял восхождение на гору, не зная дороги; долго и с трудом взбирается он и часто вынужден ворочаться назад, ибо дальше нет прохода; то размышление, то случай открывают ему новые тропинки, они ведут его несколько далее, и наконец, когда цель уже достигнута, он, к своему стыду, находит широкую дорогу, по которой мог бы подняться, если бы сумел верно отыскать начало. В своих статьях я, конечно, не занимал читателя рассказом о таких блужданиях, описывая только тот проторенный путь, по которому теперь он может без труда взойти на вершину.

До опубликования работы [1] все задачи гидродинамики рассматривались для случаев, когда вектор скорости  $\mathbf{u}$  в эйлеровой системе с компонентами  $u, v, w$  в прямоугольной системе координат  $Oxyz$  имеет потенциал. Хотя понятие вращения частиц, характеризуемого вектором  $\boldsymbol{\omega}$  с компонентами  $\xi, \eta, \zeta$  в прямоугольных координатах

$$\begin{aligned}\xi &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right), & \eta &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right), \\ \zeta &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right)\end{aligned}\quad (1)$$

появлялось уже в работах Д'Аламбера (1749), Эйлера (1752-1755), Лагранжа (1760) и Коши

(1815), лишь Гельмгольц впервые подверг общему исследованию те случаи движения жидкости, когда потенциал скорости отсутствует. При этом им были открыты новые, вихревые, типы движения жидкости, которые не были детально известны "отцам-основателям" теоретической гидродинамики<sup>4</sup>. Гельмгольц установил, что для невязкой несжимаемой жидкости при воздействии массовых сил, обладающих потенциалом, вихревое движение не может ни возникнуть, ни исчезнуть. Если завихренность уже присутствует у части жидких частиц, то они неспособны передать ее тем частицам, которые ее не имеют. Три вихревых закона Гельмгольца устанавливают любопытную и нерушимую связь между жидкими частицами и состоянием их вращения [3, с. 7]:

Дальнейшее исследование покажет нам, что в тех случаях, где существует потенциал скоростей, мельчайшие частицы жидкости не имеют вращательного движения, но, по крайней мере, часть жидких частиц находится во вращении, раз потенциал скоростей не имеет места.

*Вихревыми линиями (Wirbellinien, vortex-lines)* я называю линии, проведенные в жидкой массе таким образом, что их направление повсюду совпадает с направлением мгновенной оси вращения лежащих на них частиц жидкости.

*Вихревыми нитями (Wirbelfäden, vortex-filaments)* я называю части жидкой массы, которые выделяются из нее, если через все точки контура бесконечно малого элемента поверхности провести соответственные вихревые линии.

Исследование показывает, что если для всех сил, действующих на жидкость, существует потенциал сил, то:

1) ни одна жидкая частица не может прийти во вращательное движение, если только она не обладала им уже с самого начала;

2) жидкие частицы, расположенные для какого-нибудь момента времени на вихревой линии, всегда будут и при своем перемещении принадлежать одной и той же вихревой линии;

<sup>4</sup>Хотя сам Гельмгольц отмечал [3, с. 6]: "Между тем уже Эйлер (*Histoire de l'Acad. des Sciences de Berlin. 1755, p. 292*) обратил внимание на то, что существуют и такие случаи движения жидкости, при которых не имеет место потенциал скоростей, например, вращение жидкости около оси при одинаковой угловой скорости всех частиц".

3) произведение поперечного сечения на скорость вращения для бесконечно тонкой вихревой нити на всем ее протяжении постоянно и сохраняет свою величину при передвижении нити. Поэтому вихревые нити должны внутри жидкости замыкаться в себе; они могут оканчиваться не иначе, как на ее границах.

Гельмгольц [1, §2] установил<sup>5</sup> уравнения для компонент вектора завихренности:

$$\begin{aligned}\frac{D\xi}{Dt} &= \xi \frac{\partial u}{\partial x} + \eta \frac{\partial u}{\partial y} + \zeta \frac{\partial u}{\partial z}, \\ \frac{D\eta}{Dt} &= \xi \frac{\partial v}{\partial x} + \eta \frac{\partial v}{\partial y} + \zeta \frac{\partial v}{\partial z}, \\ \frac{D\zeta}{Dt} &= \xi \frac{\partial w}{\partial x} + \eta \frac{\partial w}{\partial y} + \zeta \frac{\partial w}{\partial z},\end{aligned}\quad (2)$$

или же, эквивалентно для несжимаемой жидкости:

$$\begin{aligned}\frac{D\xi}{Dt} &= \xi \frac{\partial u}{\partial x} + \eta \frac{\partial v}{\partial x} + \zeta \frac{\partial w}{\partial x}, \\ \frac{D\eta}{Dt} &= \xi \frac{\partial u}{\partial y} + \eta \frac{\partial v}{\partial y} + \zeta \frac{\partial w}{\partial y}, \\ \frac{D\zeta}{Dt} &= \xi \frac{\partial u}{\partial z} + \eta \frac{\partial v}{\partial z} + \zeta \frac{\partial w}{\partial z}.\end{aligned}\quad (3)$$

Здесь мы использовали обозначение Стокса для полной производной  $D/Dt = (\partial/\partial t) + u(\partial/\partial x) + v(\partial/\partial y) + w(\partial/\partial z)$ . В современных векторных обозначениях уравнение (3) имеет вид:

$$\frac{D\boldsymbol{\omega}}{Dt} = \boldsymbol{\omega} \cdot \nabla \mathbf{u}, \quad (4)$$

где

$$\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{u}, \quad \nabla \cdot \mathbf{u} = 0. \quad (5)$$

Вероятно, трудно назвать иную статью по механике, которая породила бы целое научное направление. Названное вихревой динамикой или теорией вихрей, это направление гидродинамики успешно развивается во всем мире, в том числе и в Институте гидромеханики НАН Украины [13, 14].

Теория вихрей Гельмгольца детально описывалась или просто упоминалась в статьях в энциклопедиях, курсах общей и теоретической физики, многочисленных учебниках по механике жидкости, диссертациях, специализированных монографиях и учебниках, научных журнальных статьях и научно-популярных книгах. Список ссылок

<sup>5</sup>Вывод этих уравнений намечен лишь бегло, что потребовало детального комментария С.А. Чаплыгина [4, с. 79].

настолько велик (достаточно сказать, что приведенная в обзоре [11], возможно и неполная, библиография с 1858 по 1956 годы содержит более 1000 наименований работ по вихревой динамике), что дать какой-либо полный обзор всех исследований вряд-ли представляется возможным. Приведем лишь чрезвычайно высокую оценку Н. Е. Жуковским [15, с. 38] вклада Гельмгольца в механику<sup>6</sup>

Механика развивалась как глубоко-мысленными трудами аналитиков, так и остроумными исследованиями геометров. При этом часто бывало, что сложные аналитические формулы освещались и представлялись в ясной наглядной форме, благодаря удачным геометрическим представлениям. Такие интерпретации охватывали задачу во всей ее полноте и раскрывали многие свойства ее, не замеченные при аналитическом исследовании. Так было с решением задачи о движении твердого тела около его центра тяжести; решение сперва было получено Эйлером аналитическим путем, но оставалось затерянным среди массы формул и только благодаря простым и наглядным интерпретациям Пуансо предстало перед глазами ученых со всей ясностью.

Какая роль выпала на долю Пуансо при разъяснении вопроса о движении твердого тела, такая же принадлежит и Гельмгольцу в разъяснении вопроса о движении жидкости.

Почти все работы Гельмгольца по механике посвящены гидродинамике, которой он не перестает заниматься и до настоящего времени. При этом можно сказать, что современная гидродинамика своим развитием обязана главным образом Гельмгольцу. А между тем наиболее замечательная работа германского ученого в этой области: “*Ueber Integrale der hydrodynamischen Gleichungen, welche den Wirbelbewegungen entsprechen*” появилась в 1858 году, спустя 43 года после того, как формулы, заключающие в себе принцип сохранения вихрей, были найдены Коши. Но Коши рассматривал полученный им результат только с аналитической стороны и не предвидел той массы вопросов,

<sup>6</sup>Этот обзор был воспроизведен в двух изданиях собрания сочинений Н. Е. Жуковского (1937 год, том IX, с. 313–328 и 1950 год, том VII, с. 132–149).

которые могут быть решены при надлежащем геометрическом освещении выводов.

Отметим также, что согласно базе данных ISI Web of Science по более чем 6000 научным журналам с более чем 31 миллионом источников на время написания этой статьи (июль 2007) немецкий вариант статьи [1], начиная с 1950 года, прямо цитировался 72 раза, английский перевод [3] цитировался 39 раз – совсем неплохо для статьи, вошедшей в “научный фольклор”.

Уравнения (3) выглядят обманчиво просто, но получение каких-либо аналитических или численных результатов их решения возможно лишь при существенных упрощениях. Знаменитая концепция *точечных вихрей* в идеальной жидкости, предложенная Гельмгольцем в §5 статьи [1], когда вращение заключено только в нескольких расположенных в безграничной жидкости параллельно оси  $Z$ , с единственной отличной от нуля компонентой вектора завихренности  $\zeta$  бесконечно тонких параллельных вихревых нитях (каждая нить имеет постоянное предельное значение  $\Gamma$  произведения поперечного сечения на величину  $\zeta$ ), является чрезвычайно удачной моделью [16].

Одной из интереснейших задач динамики точечных вихрей является задача о поиске таких конфигураций  $N$  вихрей одинаковой интенсивности, которые бы лишь равномерно вращались вокруг центра завихренности системы, не изменяя расстояния между вихрями. Такие задачи были инициированы исследованиями В. Томсона (будущего лорда Кельвина) [18–20] и Дж. Дж. Томсона [21–24] по созданию “вихревой теории материи” и “корпускулярной модели атома” соответственно. Эти доквантовые построения были впоследствии отброшены, но несмотря на это, многие замечательные мысли и наблюдения, относящиеся к периодичности строения вещества, ни в коем случае не утратили своего значения [24, 25].

Важным стимулом для создания и разработки этих моделей послужили соответственно все та же классическая статья Гельмгольца [1] и простые и изящные эксперименты профессора Гарвардского университета Майера [27–31]. Эти эффектные опыты затем многократно повторялись и усовершенствовались [32–35], их описание и резюме результатов приведено также в [22, с. 120–121], [23, с. 72–74], [35, с. 432–433], [36]. В опытах Майера несколько маленьких магнитов, состоящих из равно намагниченных стальных иголок, воткнуты в маленькие пробки и плавают в широком сосуде с водой (рис. 1). Магниты расположены так, что

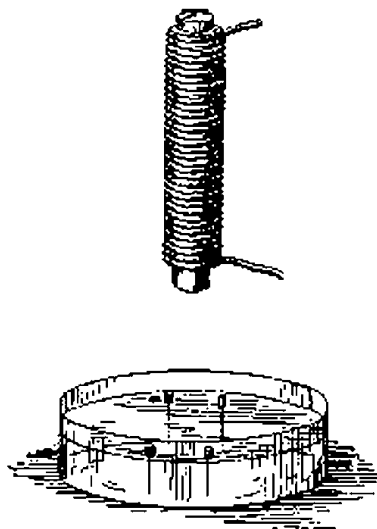
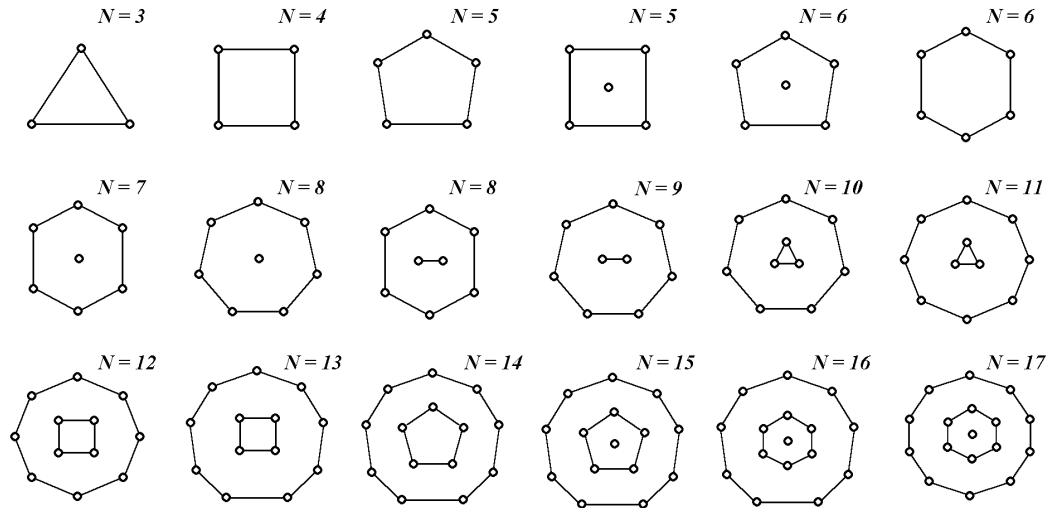


Рис. 1. Схема опыта Майера (согласно [22, с. 120]).

все их положительные полюса находятся выше поверхности воды. Эти положительные полюса отталкиваются друг от друга с силами, величины которых изменяются обратно пропорционально квадрату расстояния между ними. Притягивающая сила действует со стороны отрицательного полюса большого магнита, подвешенного вертикально на некотором расстоянии над поверхностью воды. Составляющая силы притяжения этого магнита вдоль поверхности воды направлена к точке поверхности, находящейся вертикально под полюсом магнита, и приблизительно обратно пропорциональна расстоянию от этой точки.

Расположения, принимаемые плавающими магнитами по мере возрастания их числа от трех до семнадцати, представлены на рис. 2. Видно, что когда число магнитов не превосходит четырех, то они располагаются в вершинах правильного треугольника или квадрата. Пять магнитов могут находиться как в вершинах правильного пятиугольника так и в вершинах квадрата с одним магнитом в центре.

Шесть магнитов располагаются не в вершинах правильного шестиугольника, а делятся на две системы, так что один находится в центре, а пять – вне его в вершинах правильного пятиугольника, схематично это можно записать  $6 = 1 + 5$ . Такое расположение в двух орбитах продолжается до тех пор, пока число магнитов не достигнет пятнадцати,  $15 = 1 + 5 + 9$ , когда получаются три орбиты; при двадцати семи возможны комбинации  $27 = 5 + 9 + 13$  и  $27 = 1 + 5 + 9 + 12$  и осуществляется

Рис. 2. Схема конфигурации плавающих магнитов при  $3 \leq N \leq 17$  согласно [29]

переход к четырем орбитам и т.д. Майер [30] привел таблицу расположения по орбитам для  $N \leq 42$  магнитов, воспроизведенную в [23, с. 73].

Эти блестящие эксперименты вдохновили В. Томсона [18] на указание аналогии стационарного положения магнитов с равномерно вращающейся системой точечных вихрей одинаковой интенсивности<sup>7</sup>. На наш взгляд, такая аналогия выглядит не совсем обоснованной, поскольку уравнения равновесия магнитов по сути не были даже выписаны (некоторое их обсуждение дано лишь в работе [31]). Тем не менее, научный авторитет В. Томсона был в то время столь велик, что ученые начали искать такие равномерно вращающиеся конфигурации точечных вихрей. Первый существенный результат получил Дж. Дж. Томсон [37], показавший, что правильный вихревой  $N$ -угольник равномерно вращается вокруг начала координат. Естественным образом возникает *первая проблема*: отыскать все возможные (с точностью до поворота относительно центра завихренности) равномерно вращающиеся конфигурации точечных вихрей. С этим тесно связан второй принципиальный вопрос: для заданного  $N > 3$  существует ли конечное или бесконечное число таких конфигураций?

Предложено несколько алгоритмов отыскания центрально симметричных [39–41] и несимметричных [42–46] равномерно вращающиеся кон-

<sup>7</sup>Сам В. Томсон указал лишь на наличие двух таких конфигураций для трех вихрей: равносторонний треугольник и прямая с равноудаленными положениями двух вихрей от третьего, расположенного в центре.

фигураций точечных вихрей. На сегодняшний день наиболее полным считается (неопубликованный, copies are available from the authors upon request, частично эти данные были опубликованы в открытой печати [41]) “Лос Аламосский каталог” [46], содержащий численные данные о большинстве вихревых конфигурациях вплоть до  $N = 50$  вихрей. Возник даже специальный термин “вихревые кристаллы” [47] для общего названия работ в этом направлении. Следует также отметить, что в последней четверти XX века было проведено ряд экспериментов [49–52], идейно аналогичных экспериментам Майера, но на значительно более качественном оборудовании для различных тонких физических систем (сверхтекучий гелий, плазма, магнитные диски наноразмеров).

*Второй проблемой* в данной задаче является проблема устойчивости (и в каком смысле) любых равномерно вращающихся конфигураций. Уже Дж. Дж. Томсон [37] исследовал устойчивость правильного  $N$ -угольника точечных вихрей и показал, на основе анализа в линейном приближении, что система вихрей при  $N \leq 6$  будет устойчивой для малых отклонений, а при  $N \geq 8$  будет неустойчивой даже в линейном приближении. Случай  $N = 7$  в виду нулевого характеристического числа не давал возможности судить об устойчивости системы в линейном приближении. Результаты Дж. Дж. Томсона были обобщены Хавелом [37] на случай, когда правильный  $N$ -угольник одинаковых точечных вихрей заключен в коаксиальный круг с жесткой стенкой. Показано, что граница имеет, хотя и незначительное, но доста-

билизирующее влияние.

Последующие работы в этом направлении были выполнены Л. Г. Хазиным [52, 53] и Л. Г. Куракиным и В. И. Юдовичем [54, 55]. Первый автор с помощью несколько усложненных методов современной математики об устойчивости равновесия гамильтоновой системы при наличии резонансных соотношений между частотами нормальных колебаний строго доказал те результаты (теорема Дж. Дж. Томсона), которые вроде бы не вызывали сомнений. (Это является яркой иллюстрацией высказывания академика А. Н. Крылова [56, с. 549] о “торжестве науки над здравым смыслом”.) Согласно этим результатам ответ на вопрос о устойчивости зависит от членов 4 степени в тейлоровском разложении гамильтониана около положения равновесия. В работах [52, 53] сообщается, что сложные вычисления позволили установить устойчивость; подробности этих вычислений опубликованы не были.

В работах [54, 55] представлено решение задачи о устойчивости вихревого семиугольника относительно малых возмущений. Оно было получено с использованием развитой самими авторами общей теории стационарного движения динамических систем, имеющих группу симметрии. В работе Арефа [57] доказана неустойчивость в линейном приближении системы вихрей, расположенных специальным образом (в корнях полинома Эрмита) на прямой.

В данной статье мы обращаемся к обоим поставленным проблемам. В первом разделе статьи будут представлены основные уравнения динамики точечных вихрей. Во втором разделе, на основе метода [42] будут найдены равномерно вращающиеся конфигурации точечных вихрей одинаковой интенсивности. На основе полученных результатов представлен каталог симметричных и несимметричных конфигураций точечных вихрей при  $N \leq 10$ . Численный анализ устойчивости полученных конфигураций по отношению к малым возмущениям рассматривается в третьей части. Последний раздел посвящен обсуждению полученных результатов.

## 1. ТОЧЕЧНЫЕ ВИХРИ НА ПЛОСКОСТИ

В §5 статьи [1] Гельмгольц изучил случаи, когда вращение заключено только в нескольких параллельных вихревых столбах, расположенных в безграничной жидкости параллельно оси  $Z$ , с единственной отличной от нуля компонентой вектора завихренности  $\zeta$ . В частности, он рассмотрел вза-

имодействие нескольких бесконечно тонких параллельных вихревых нитей, каждая из которых имеет постоянное предельное значение  $\Gamma$  произведения поперечного сечения  $d\sigma$  на величину  $\zeta$ . Это представляет знаменитую модель *точечных вихрей* в идеальной жидкости, поскольку при взаимодействии такие вихревые нити остаются всегда параллельными оси  $Z$  и все движение полностью описывается положением точек в плоскостях, перпендикулярных оси  $Z$ , в частности, в плоскости  $OXY$ .

### 1.1. Точечные вихри на плоскости

Гельмгольц установил закон сохранения *центра завихренности* ансамбля точечных вихрей (в самой статье [3, с. 40] обсуждение идет в терминах центра тяжести по аналогии с системой точечных масс): “Итак, центр тяжести вихревых нитей при их взаимном передвижении остается неизменным, если только сумма масс не равна нулю, в каком случае вообще не имеет места центр тяжести.”

Не входя в дальнейшие пояснения и даже не выписывая уравнений движения системы точечных вихрей, Гельмгольц отмечает два вытекающих из этого закона следствия [3, с. 40]:

Отсюда вытекают такие следствия:

1) Если мы имеем отдельную прямолинейную вихревую нить с бесконечно малым поперечным сечением в жидкой массе, распространяющейся в бесконечности во всех направлениях, перпендикулярных к нити, то движение жидких частиц, находящихся в конечном расстоянии от нити, зависит только от произведения  $\zeta \cdot da \cdot db = m$  из угловой скорости на площадь поперечного сечения нити, а не от формы сечения. Частицы жидкой массы вращаются около нее с тангенциальной скоростью  $m/(\pi r)$ , где  $r$  представляет расстояние от центра тяжести вихревой нити. Таким образом, положение самого центра тяжести, скорость вращения, величина поперечного сечения, а следовательно и величина  $m$  остаются неизменными, если даже форма бесконечно малого сечения и изменяется.

2) Если мы имеем две прямолинейные вихревые нити с бесконечно малым поперечным сечением в безграничной жидкой массе, то каждая из них относит другую в направлении, перпендикулярном к линии, их соединяющей. Расстояние от

этого не изменяется. Таким образом, обе нити будут вращаться около их общего центра тяжести, оставаясь на равном расстоянии друг от друга. Если скорость вращения в обеих вихревых нитях имеет то же направление, т. е. имеет одинаковые знаки, то центр тяжести должен лежать между ними [смотри рис. 3,а]. Если же она в них направлена в противоположные стороны т. е. имеет обратные знаки, то центр тяжести будет лежать на продолжении линии, их соединяющей [смотри рис. 3,б]. И если произведение из скорости вращения на поперечное сечение для обеих нитей то же по величине, но противоположно по знаку, – когда центр тяжести лежал бы в бесконечности, – то они будут передвигаться с одинаковой скоростью в том же направлении, перпендикулярном к линии, их соединяющей [смотри рис. 3,в].

Вопреки замечанию Бэтчелора [58, с. 653] о неясности в поведении системы трех точечных вихрей, такая задача была детально изучена в замечательной диссертации Грёбли [59], опубликованной также в виде отдельной статьи [60]<sup>8</sup>. Эта работа была мало оценена современниками: в влиятельных трактатах Кирхгофа [63, лекция 20, §3] и Ламба [64, §155] она была упомянута лишь в сноске. Значительно позднее эти результаты были независимо заново открыты в статьях [66–68]. Полный анализ этой интегрируемой нелинейной задачи приведен в статье [68].

Интегрируемые случаи задачи о взаимодействии четырех точечных вихрей были рассмотрены в магистерских диссертациях Д. Н. Горячева [69] и Н. С. Васильева [70] (изданных также в виде больших статей [71, 72])<sup>9</sup>. Четыре точечных вихря одинаковой интенсивности были детально изучены в работах [74–76], причем основной упор был на анализ хаотического поведения такой неинтегрируемой динамической системы.

Задачи о движении точечных вихрей не исследовались бы столь внимательно, если бы кроме красоты полученных аналитических решений из них невозможно было бы получить информацию о том, что происходит в случаях, отличных от простых. Такая информация, в первую очередь, состоит

<sup>8</sup>Обзор жизни и научных достижений Вальтера Грёбли (1852-1903) швейцарского профессора, преподавателя гимназии в Цюрихе приведен в [61], а также в русском переводе [62].

<sup>9</sup>Интересно, что в обоих случаях в качестве оппонента был задействован Н. Е. Жуковский.

в моделировании с помощью точечных вихрей двухмерных когерентных структур в обобщенном описании двухмерной изотропной турбулентности. Задача является сложной, поскольку прямой численный расчет для случая большого количества точечных вихрей не позволяет установить четкие закономерности, кроме общих утверждений про своеобразное “группирование” вихрей [14].

Задачи о движении лишь малого числа точечных вихрей имеют ряд особенностей. Во-первых, они допускают простое интегрирование в современными численными методами. Во-вторых, в случае симметрии движения относительно прямой или точки удается построить аналитические выражения зависимости координат от времени (или наоборот) или найти относительные траектории движения – в любом случае нелинейная задача сводится к квадратурам. Наличие точных аналитических решений позволяет оценить эффективность численных алгоритмов решения задачи Коши нелинейного вихревого движения. И, наконец, если задача трех вихрей в целом интегрируема, то четыре и более вихрей обеспечивают “простейший” случай хаотического движения. Отметим, что такое хаотичное движение нельзя рассматривать как случай турбулентного движения, поскольку турбулентность в обычном понимании обозначается стохастическим полем скорости, описываемым детерминированными уравнениями Навье-Стокса. Скорее речь тут должна идти о новой режиме движения, который не вписывается в традиционное деление на ламинарное и турбулентное движение [76]. Стохастическое движение системы нескольких точечных вихрей представляет собой ламинарный поток с стохастическими свойствами. Когерентные вихревые структуры в турбулентных (например, сдвиговых) течениях, наоборот, представляют регулярные картины потока в стохастическом поле скоростей.

Напомним основные уравнения, описывающие движение системы  $N$  точечных вихрей на безграничной плоскости в невязкой жидкости. Подробное изложение теории точечных вихрей можно найти в многочисленных учебниках и монографиях [13, 59, 64, 65, 78–89]<sup>10</sup>.

Проблема описания движения системы  $N$  точечных вихрей с вихрем  $\alpha$ , имеющим постоянную в силу теорем Гельмгольца интенсивность  $\Gamma_\alpha$  и расположение  $(x_\alpha, y_\alpha)$  заключается в решении системы  $2N$  нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка [58, §7.3]

<sup>10</sup>Мы даем ссылки на зарубежные книги в русских переводах, детальные ссылки содержатся в обзоре [11].

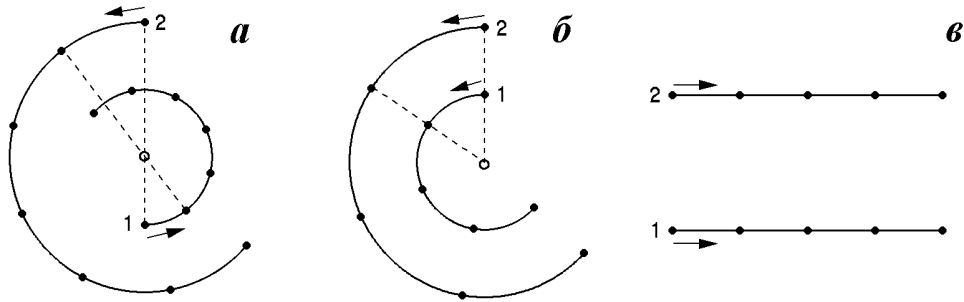


Рис. 3. Траектории взаимодействия двух точечных вихрей: а – вихри с разными по знаку интенсивностями, б – вихри с одинаковыми по знаку интенсивностями, в – вихри с одинаковыми по модулю, но с противоположными по знаку, интенсивностями

$$\begin{aligned} \frac{dx_\alpha}{dt} &= -\frac{1}{2\pi} \sum_{\beta=1}^N \Gamma_\beta \frac{(y_\alpha - y_\beta)}{l_{\alpha\beta}^2}, \\ \frac{dy_\alpha}{dt} &= \frac{1}{2\pi} \sum_{\beta=1}^N \Gamma_\beta \frac{(x_\alpha - x_\beta)}{l_{\alpha\beta}^2}, \end{aligned} \quad (6)$$

где  $\alpha = 1, 2, \dots, N$ ,  $l_{\alpha\beta} = \sqrt{(x_\alpha - x_\beta)^2 + (y_\alpha - y_\beta)^2}$  – расстояние между вихрями  $\alpha$  и  $\beta$ . Штрих при знаках суммы обозначает, что сингулярный член  $\beta = \alpha$  опущен. Начальные условия имеют вид  $x_\alpha = x_\alpha^{(0)}$ ,  $y_\alpha = y_\alpha^{(0)}$  при  $t = 0$  и определяются конкретной ситуацией задачи.

Система (6) может быть также записана в виде  $N$  нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка для комплексных координат  $z_\alpha = x_\alpha + iy_\alpha$

$$\frac{dz_\alpha^*}{dt} = \frac{1}{2\pi i} \sum_{\beta=1}^N \Gamma_\beta \frac{1}{z_\alpha - z_\beta}, \quad \alpha = 1, \dots, N. \quad (7)$$

с начальными условиями  $z_\alpha = z_\alpha^{(0)}$ , при  $t = 0$ . В приведенном уравнении звездочка обозначает комплексное сопряжение.

В своих лекциях Кирхгоф [63, Лекция 20] показал, что система (6) может быть записана в гамильтоновой форме

$$\Gamma_\alpha \frac{dx_\alpha}{dt} = \frac{\partial H}{\partial y_\alpha}, \quad \Gamma_\alpha \frac{dy_\alpha}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_\alpha}, \quad (8)$$

где  $\alpha = 1, \dots, N$ . Гамильтониан системы равен

$$H = -\frac{1}{4\pi} \sum_{\alpha, \beta=1}^N \Gamma_\alpha \Gamma_\beta \ln l_{\alpha\beta}, \quad (9)$$

и сохраняется в процессе движения вихрей. В дополнение к  $H$  гамильтонова система (8) имеет три

независимые первые интеграла

$$\begin{aligned} Q &= \sum_{\alpha=1}^N \Gamma_\alpha x_\alpha, & P &= \sum_{\alpha=1}^N \Gamma_\alpha y_\alpha, \\ I &= \sum_{\alpha=1}^N \Gamma_\alpha (x_\alpha^2 + y_\alpha^2). \end{aligned} \quad (10)$$

Физический смысл этих величин ясен. Они выражают закон сохранения кинетической энергии взаимодействия вихрей, компонент импульса и момента импульса, соответственно. Инварианты  $Q, P$  при отличном от нуля значении

$$\Gamma = \sum_{\alpha=1}^N \Gamma_\alpha \quad (11)$$

дают возможность утверждать, что частица жидкости, которая находится в точке с координатами  $(X, Y)$ :

$$X = \frac{1}{\Gamma} \sum_{\alpha=1}^N \Gamma_\alpha x_\alpha, \quad Y = \frac{1}{\Gamma} \sum_{\alpha=1}^N \Gamma_\alpha y_\alpha \quad (12)$$

остается неподвижной. Эта точка называется центром завихренности. В частном случае, когда  $\Gamma = 0$ , центр лежит на бесконечности.

Функция тока, наведенная системой  $N$  точечных вихрей, определяется из выражения [64]

$$\Psi(x, y) = -\frac{1}{4\pi} \sum_{\alpha=1}^N \Gamma_\alpha \ln[(x - x_\alpha)^2 + (y - y_\alpha)^2]. \quad (13)$$

Поле скорости течения жидкости связано с полем функции тока уравнениями

$$u = \frac{\partial \Psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \Psi}{\partial x}. \quad (14)$$



В случае комплексного представления аргумента  $z = x + iy$  функция тока и поле скорости определяются из уравнений [64]

$$\Psi(z) = -\frac{1}{4\pi} \sum_{\alpha=1}^N \Gamma_{\alpha} \ln |z - z_{\alpha}|^2, \quad (15)$$

$$u - iv = \frac{\partial \Psi}{\partial z}, \quad (16)$$

которые в дальнейшем будут использоваться.

## 2. РАВНОМЕРНО-ВРАЩАТЕЛЬНЫЕ КОНФИГУРАЦИИ ТОЧЕЧНЫХ ВИХРЕЙ

Среди широкого класса стационарных конфигураций точечных вихрей наибольший интерес представляют равномерно-вращательные конфигурации вихрей с равными интенсивностями.

Рассмотрим систему  $N$  точечных вихрей одинаковой интенсивности  $\Gamma$ . В этом случае уравнения движения вихрей (7) имеют вид:

$$\frac{dz_{\alpha}^*}{dt} = \frac{\Gamma}{2\pi i} \sum_{\beta=1}^N \frac{1}{z_{\alpha} - z_{\beta}}. \quad (17)$$

Если система точечных вихрей равномерно вращается с постоянной угловой скоростью  $\omega$ , решение системы уравнений (17) следует искать в виде

$$z_{\alpha} = Z_{\alpha} e^{i\omega t}, \quad \alpha = 1, \dots, N, \quad (18)$$

где  $Z_{\alpha}$  – комплексные постоянные, подлежащие определению. Также искомой величиной является угловая скорость  $\omega$  вращения системы точечных вихрей.

Подстановка (18) в (17) приводит к следующей нелинейной алгебраической системе

$$Z_{\alpha}^* = \frac{\Gamma}{2\pi\omega} \sum_{\beta=1}^N \frac{1}{Z_{\alpha} - Z_{\beta}}. \quad \alpha = 1, \dots, N \quad (19)$$

с комплексными неизвестными  $Z_{\alpha}$ . Общая теория решения (19) на сегодняшний день отсутствует. В настоящей работе предлагается новый эффективный метод нахождения некоторых частных решений таких систем уравнений. Его численная реализация существенным образом упрощает объем вычислений при нахождении новых стационарных конфигураций системы точечных вихрей.

### 2.1. Правильные конфигурации

Рассмотрим сначала частный случай решения (19), при котором точечные вихри располагаются в вершинах правильного  $N$ -угольника. Этот частный класс решений получен еще в работе Дж.Дж. Томсона [89], удостоенной премии Адамса в 1883 г.

Для правильного  $N$ -угольника пространственное положение вихрей можно задать

$$Z_{\alpha} = R e^{i2\pi(\alpha-1)/N}, \quad \alpha = 1, \dots, N, \quad (20)$$

где  $R$  – радиус описанной окружности.

Подставка уравнения (20) в уравнение движения (17), записанного для вихря 1, позволяет записать тождество

$$2\pi R^2 \omega = \sum_{\alpha=2}^N \frac{\Gamma}{1 - \exp[2\pi i(\alpha-1)/N]}. \quad (21)$$

В работе [44] было показано, что решения уравнения (21) (в общем случае комплексные значения  $z_1, z_2, \dots, z_N$ ) можно представить в виде корней полинома Эрмита:

$$P(z) = (z - z_1) \dots (z - z_N), \quad (22)$$

Первые производные по комплексному аргументу имеют вид

$$P'(z) = P(z) \sum_{\alpha=1}^N \frac{1}{z - z_{\alpha}}, \quad (23)$$

$$\begin{aligned} P''(z) &= 4i P(z) \sum_{\alpha=1}^N \frac{y_{\alpha}}{z - z_{\alpha}} = \\ &= -2NP(z) + 2zP'(z). \end{aligned} \quad (24)$$

Представив полином в виде

$$P(z) = z^N - \gamma^N, \quad \gamma \neq R, \quad (25)$$

то корни полинома Эрмита принимают значения

$$z_1 = \gamma, \quad z_2 = \gamma\varepsilon, \quad \dots, \quad z_N = \gamma\varepsilon^{N-1}, \quad (26)$$

где  $\varepsilon = \exp[2\pi i/N]$ .

В этом случае справедливо соотношение:

$$Nz^{N-1} = (z^N - \gamma^N) \sum_{\alpha=1}^n \frac{1}{z - \gamma\varepsilon^{\alpha}}. \quad (27)$$

В частном случае  $z = 1$  это уравнение дает:

$$\sum_{\alpha=1}^N \frac{1}{1 - \gamma\varepsilon^{\alpha}} = \frac{N}{1 - \gamma^N}, \quad \gamma^N \neq 1. \quad (28)$$

При  $\gamma = 1$  полином Эрмита (22) с учетом (26) можно представить в виде суммы

$$P_1(z) = (z - \varepsilon) \dots (z - \varepsilon^{N-1}) = \frac{z^N - 1}{z - 1} = 1 + z + \dots + z^{N-1} \quad (29)$$

Первая производная по аргументу равна

$$P_1'(z) = 1 + 2z + \dots + (N - 1)z^{N-2}. \quad (30)$$

Следовательно  $P_1(1) = N$ ,  $P_1'(1) = \frac{1}{2}N(N - 1)$ , и уравнение (23) переходит в равенство

$$\sum_{\alpha=1}^N \frac{1}{1 - \varepsilon^\alpha} = \frac{1}{2}(N - 1). \quad (31)$$

Заметим, что к аналогичному выражению можно прийти в результате предельного перехода  $\gamma \rightarrow 1$  в выражении (27).

Сравнение уравнений (31) и (21) позволяет определить скорость вращения системы точечных вихрей интенсивности  $\Gamma$ , размещенных в вершинах правильного  $N$ -угольника

$$\omega = \frac{\Gamma}{4\pi R^2}(N - 1). \quad (32)$$

Если в центре правильного  $N$ -угольника разместить точечный вихрь интенсивности  $\Gamma$ , имеем систему  $N + 1$  точечного вихря, которая равномерно вращается с постоянной угловой скоростью:

$$\omega = \frac{\Gamma}{4\pi R^2}(N - 1) + \frac{\Gamma}{2\pi R^2} = \frac{\Gamma}{4\pi R^2}(N + 1). \quad (33)$$

Следует заметить, что система  $N$  одинаковых точечных вихрей, расположенных в вершинах правильного многоугольника, вращается с постоянной угловой скоростью при произвольном значении интенсивности точечного вихря, расположенного в центре многоугольника. Если интенсивность центрального точечного вихря равна  $\beta\Gamma$ , то из (33) следует, что такая система будет вращаться с постоянной угловой скоростью

$$\omega = \frac{\Gamma}{4\pi R^2}(N - 1 + 2\beta). \quad (34)$$

Интересно заметить, что при  $\beta = (1 - N)/2$ , рассматриваемая система точечных вихрей покоится. В этом случае центральный вихрь будет иметь всегда интенсивность завихренности, противоположную по знаку ( $\beta < 0$ ) по отношению к интенсивности точечных вихрей, расположенным в вершинах правильного многоугольника.

Более сложные равномерно вращающиеся конфигурации точечных вихрей были получены в работе [40]. В исследованиях представлены другие методы исследования симметричных конфигураций, для которых точечные вихри с одинаковыми интенсивностями расположены уже на концентрических окружностях с центральным или без центрального вихря.

## 2.2. Несимметричные конфигурации

В недавней работе [42] предложен другой метод нахождения некоторых решений системы нелинейных уравнений (19). С его помощью были найдены новые равномерно вращающиеся конфигурации точечных вихрей [43]. Метод позволяет получать как симметричные, так и несимметричные конфигурации точечных вихрей.

Коротко опишем алгоритм данного метода. Как и ранее рассмотрим систему точечных вихрей, расположенных в точках  $z_\alpha$  с равными интенсивностями  $\Gamma$ . Пусть система  $N$  точечных вихрей образует равномерно вращаемую конфигурацию вихрей и тождественно удовлетворяет уравнение (19). Выберем систему координат так, чтобы центр завихренности системы вихрей совпадал с началом координат. Другими словами, в рассматриваемой системе инварианты  $P = Q = 0$ , смотри уравнения (10).

Функция тока (15), наведенная системой  $N$  точечных вихрей, в системе координат, вращающейся с угловой скоростью  $\omega$ , принимает вид:

$$\Psi(z) = -\frac{\Gamma}{4\pi} \sum_{\alpha=1}^N \ln |(z - Z_\alpha)|^2 + \frac{\omega |z|^2}{2}, \quad (35)$$

Если начальная система  $N$  точечных вихрей является равномерно-вращательной конфигурацией, то значение угловой скорости  $\omega$  можно определить, воспользовавшись уравнением (7) для одного из вихрей, например вихря 1:

$$\omega = \frac{\Gamma}{2\pi |Z_1|} \left| \sum_{\beta=2}^N \frac{1}{Z_1 - Z_\beta} \right|. \quad (36)$$

В этом случае распределение поля функции тока (35) позволяет определить для равномерно вращающейся конфигурации системы  $N$  точечных вихрей неподвижные точки  $z_0$  течения, в которых функция  $\Psi(z)$  имеет экстремум. Структура течения не изменится, если в точку  $z_0$  поместить вихрь нулевой интенсивности,  $Z_{N+1} = z_0$ .

Теперь начнем постепенно увеличивать интенсивность  $(N + 1)$ -го вихря,  $\Gamma_{N+1} = \varepsilon\Gamma$ , где  $0 \leq \varepsilon \leq 1$ .

В этом случае уравнение (19), определяющее стационарное положение вихрей, можно представить в виде

$$Z_{\alpha}^* = \frac{\Gamma}{2\pi\omega} \left[ \sum_{\beta=1}^N \frac{1}{Z_{\alpha} - Z_{\beta}} + \frac{\varepsilon}{Z_{\alpha} - Z_{N+1}} \right], \quad \alpha = 1, \dots, N,$$

$$Z_{N+1}^* = \frac{\Gamma}{2\pi\omega} \left[ \sum_{\beta=1}^N \frac{1}{Z_{N+1} - Z_{\beta}} \right], \quad (37)$$

Решение этого уравнения определяет новое положение  $Z_{\alpha}$  (где  $\alpha = 1, \dots, N + 1$ ) вихрей в равномерно вращаемой конфигурации, которая состоит из  $N$  вихрей с одинаковыми интенсивностями  $\Gamma$  и точечным вихрем с интенсивностью  $\varepsilon\Gamma$ .

В дальнейшем удобно положить, что множитель, стоящий перед квадратными скобками, равен единице. Фактически это означает, что  $\Gamma = 2\pi\omega$ . Другими словами, если в полученном решении интенсивности вихрей увеличить в  $k$  раз, то угловая скорость системы точечных вихрей возрастет в  $k$  раз. Если расстояния между вихрями увеличить в  $k$ , а интенсивности вихрей оставить неизменными, то такая система вихрей будет вращаться с угловой скоростью в  $\sqrt{k}$  раз меньшей.

Таким образом, для перехода от равномерно вращаемой конфигурации  $N$  точечных вихрей к системе, состоящей из  $N + 1$  вихря, используется следующая схема:

- 1) Выберем в качестве исходной системы вихрей произвольную конфигурацию равномерно вращаемых точечных вихрей.
- 2) Определяем угловую скорость вращения системы точечных вихрей (36).
- 3) Находим в рассматриваемом течении точки, в которых наведенная скорость со стороны вихрей и внешнего течения равна нулю или экстремальные значения распределения (35).
- 4) В неподвижных точках течения помещаем точечный вихрь с интенсивностью  $\varepsilon$  и постепенно с определенным шагом увеличиваем интенсивность этого вихря до 1. На каждом шаге решается система нелинейных уравнений (37) относительно неизвестных  $Z_{\alpha}$ , где  $\alpha = 1, \dots, N + 1$ .
- 5) При  $\varepsilon = 1$  решение (37) дает новое положение равномерно вращаемой конфигурации системы  $N + 1$  точечных вихрей.

Анализ уравнения (37) и его решений показывает, что новая конфигурация вихрей определяется

в первую очередь начальным приближением (конфигурацией из  $N$  вихрей) и выбором точки, в которую помещается вихрь переменной интенсивности. Исследования показывают, что стационарных точек в течении может быть несколько, однако не каждая из них может привести к новой конфигурации точечных вихрей. Следует заметить, что при решении нелинейных уравнений точечный вихрь, изначально помещенный в разные стационарные точки течения, может попадать в одни и те же равномерно вращаемые конфигурации точечных вихрей.

При численной реализации метода интенсивность  $N + 1$  вихря увеличивалась дискретно  $\Delta\varepsilon = 0.01$  на каждом шаге решения задачи. При решении системы уравнений (37) применялся метод Ньютона-Рафсона [90].

Численное решение системы нелинейных уравнений позволяет определить последовательность равномерно вращаемых конфигураций точечных вихрей. Многие из полученных конфигураций совпадают с приведенными в литературе. При увеличении числа вихрей в начальной стационарной конфигурации вихрей число стационарных точек течения увеличивается. На рис. 4 приведен пример распределения функции тока двух разных конфигураций, состоящих из 9 точечных вихрей одинаковой интенсивности  $\Gamma = 1.0$ , лежащие на двух окружностях. На рисунке с индексом "а" показан пример, в котором на внешней окружности помещены 7 вихрей, а на внутренней окружности находятся только 2 точечных вихря, случай  $7+2$ . На рис. 4,б приведен аналогичный случай, но с распределением вихрей  $6+3$ . Линии тока нанесены с шагом  $\Delta\Psi = 0.02$ . Крестиками на обоих рисунках обозначены стационарные точки течения, которые в дальнейшем использовались при вычислениях в качестве начального положения точечного вихря переменной интенсивности.

Результаты вычислений сведены на рис. 5. Здесь показаны все найденные симметричные равномерно-вращаемые конфигурации точечных вихрей для  $N = 3, \dots, 10$ . Бóльший индекс у каждой конфигурации соответствует общему числу  $N$  вихрей в структуре. Нижний индекс обозначает номер найденной разновидности для текущего значения  $N$ . В отличие от "Тарвардского каталога" [35, 36] симметричных конфигураций, в настоящих исследованиях приведен более расширенный каталог в диапазоне  $N = 3, \dots, 10$ . В него включены 3 дополнительные конфигурации: одна при  $N = 8$  ( $8_3$ ), одна при  $N = 9$  ( $9_1$ ) и одна при  $N = 10$  ( $10_1$ ).

Весьма важным является тот факт, что с помощью предложенного алгоритма нахождения

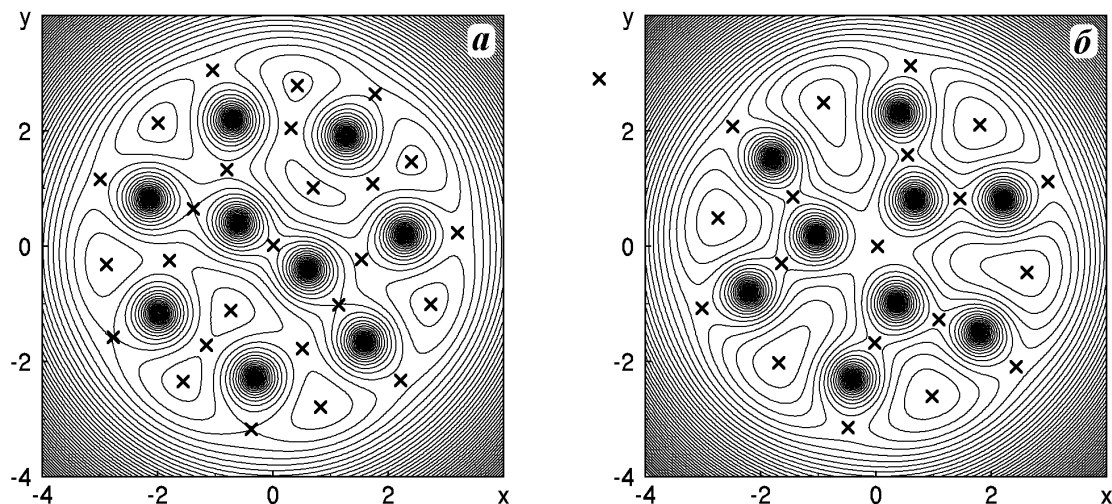


Рис. 4. Линии тока системы 9 точечных вихрей в стационарно вращаемой конфигурации на неограниченной плоскости: а – случай 7+2, б – случай 6+3

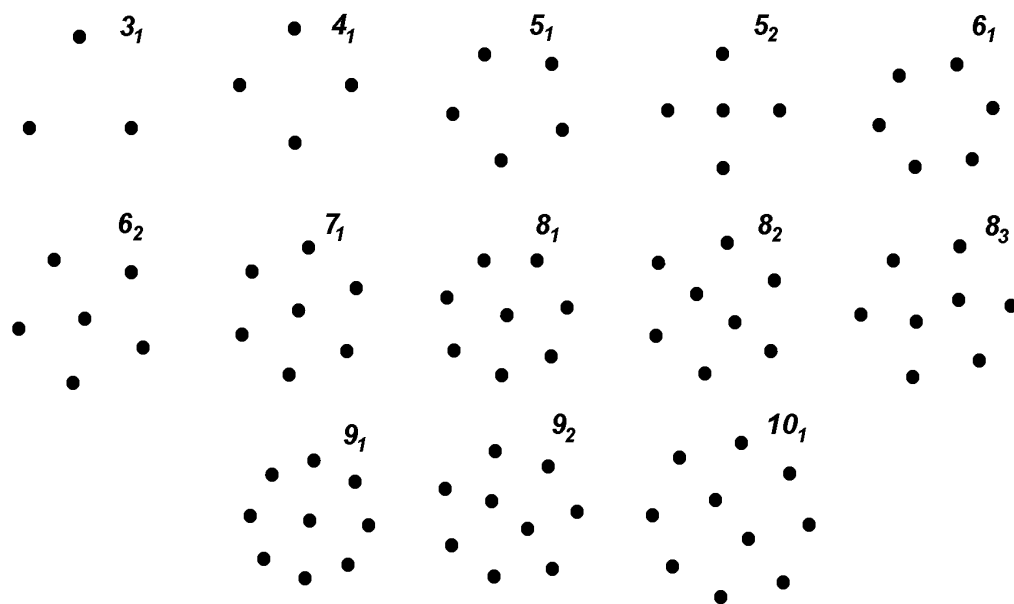


Рис. 5. “Аналог Гарвардского каталога” симметричных конфигураций системы точечных вихрей для  $N = 3, \dots, 10$  (расширенный)

равномерно-вращательных конфигураций точечных вихрей была найдена последовательность несимметричных конфигураций. Наши исследования показали, что такие структуры появляются, начиная уже с 5 вихрей, а не с 8 вихрей, как было отмечено в работе [88].

Распределение линий тока для некоторых равномерно вращаемых конфигураций точечных вих-

рей для  $N = 9$  показаны на рис. 6. Эти рисунки выполнены по аналогии с рис. 4. Линии тока нанесены на обоих рисунках с шагом  $\Delta\Psi = 0.02$ . Сравнение с симметричным случаем показывает, что количество стационарных точек течения для симметричных и несимметричных конфигураций остается примерно одинаковым, однако эти точки в несимметричном случае распределены неравно-

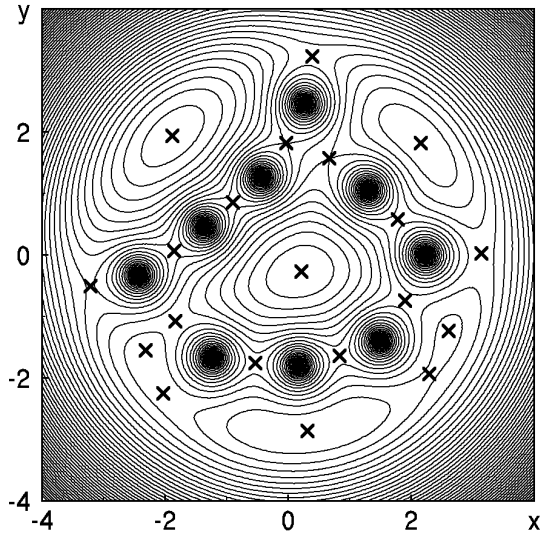


Рис. 6. Линии тока несимметричной системы 9 точечных вихрей в стационарно вращаемой конфигурации на неограниченной плоскости

мерно. Как и ранее, стационарные точки течения используются при вычислениях в качестве начального положения точечного вихря переменной интенсивности.

На рис. 7 представлен каталог несимметричных конфигураций точечных вихрей одинаковой интенсивности  $\Gamma = 1.0$  при  $N = 5, \dots, 9$ , полученных с помощью предложенного алгоритма нахождения решений нелинейного уравнения движения точечных вихрей (19). Исследования показывают, что представленные конфигурации действительно являются решениями системы (19) и все точечные вихри вращаются с постоянной угловой скоростью. Следует обратить внимание на то, что с увеличением числа вихрей в рассматриваемой системе, число несимметричных конфигураций возрастает. На рис. 8 представлен каталог несимметричных конфигураций точечных вихрей для  $N = 10$ .

Таким образом, описанный выше алгоритм нахождения стационарных конфигураций систем точечных вихрей, вращающихся с постоянной угловой скоростью, позволил определить 28 новых конфигураций:

- одна несимметричная конфигурация для  $N = 5$ ;
- одна несимметричная конфигурация для  $N = 6$ ;
- три несимметричных конфигурации для  $N = 7$ ;
- одна симметричная конфигурация для  $N = 8$ ;
- три несимметричных конфигурации для  $N = 8$ ;

- одна симметричная конфигурация для  $N = 9$ ;
- восемь несимметричных конфигураций для  $N = 9$ ;
- одна симметричная конфигурация для  $N = 10$ ;
- девять несимметричных конфигураций для  $N = 10$ .

### 3. УСТОЙЧИВОСТЬ КОНФИГУРАЦИЙ ВИХРЕЙ

В настоящее время имеется большое количество работ [21, 52–54, 57, 91–92], посвященных общей теории устойчивости стационарных движений вихревых систем. В большинстве исследований под устойчивостью системы точечных вихрей понимают устойчивость по Раусу, связанную с устойчивостью пространственных координат и импульсов. Это значит, что при достаточно малом возмущении в начальных условиях траектории движения точечных вихрей отклоняются незначительно, относительные расстояния между вихрями меняются слабо, следовательно пространственные конфигурации сохраняются во времени с неподвижным центром завихренности. Часто под неустойчивостью понимают отсутствие устойчивости по Раусу. Другими словами, любое малое возмущение в начальное положение системы точечных вихрей приводит к существенным изменениям в траекториях вихрей, нарушению пространственной конфигурации.

Проблеме устойчивости правильных вихревых многоугольников посвящены работы [39, 54, 93]. Дж. Дж. Томсон [19] исследовал линейную устойчивость правильного вихревого  $N$ -угольника и показал, что при  $2 \leq N \leq 6$  вихревая конфигурация является устойчивой. Случай  $N = 7$  характеризуется тем, что вносимые в систему возмущения возрастают экспоненциально. Дж. Дж. Томсон предположил, что при  $N \geq 8$  неустойчивость правильных вихревых конфигураций сохраняется. В работе [52] доказана справедливость этого утверждения и показано, что система точечных вихрей, расположенных в вершинах правильного многоугольника является устойчивой относительно малых линейных возмущений для  $2 \leq N \leq 6$  и является неустойчивой для  $N \geq 8$ . Что касается случая  $N = 7$ , исследования [94] показывают, что стационарное вращение правильного вихревого семиугольника является устойчивым по Раусу.

Упомянутые выше экспериментальные исследования Майера, Вуда, Дира и Монкмана показывают, что правильные вихревые шестиугольники и семиугольники являются неустойчивыми.

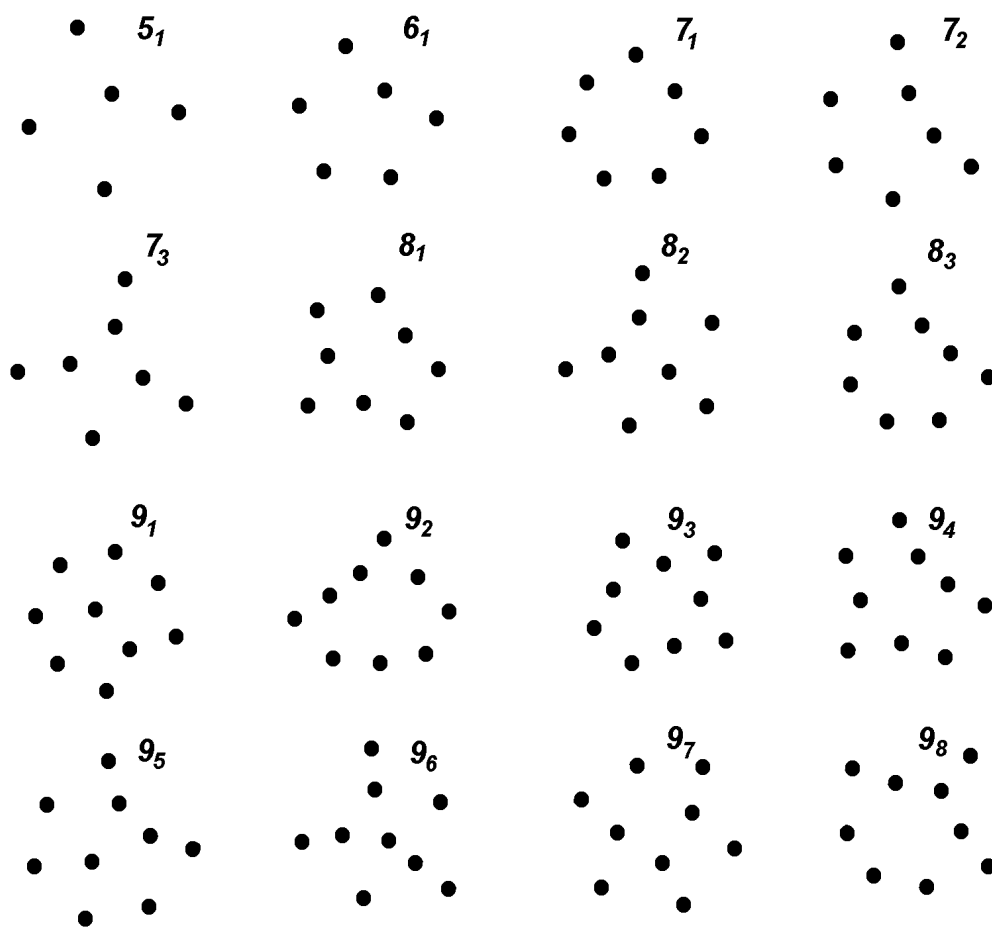


Рис. 7. Каталог несимметричных конфигураций системы точечных вихрей для  $N = 3, \dots, 9$

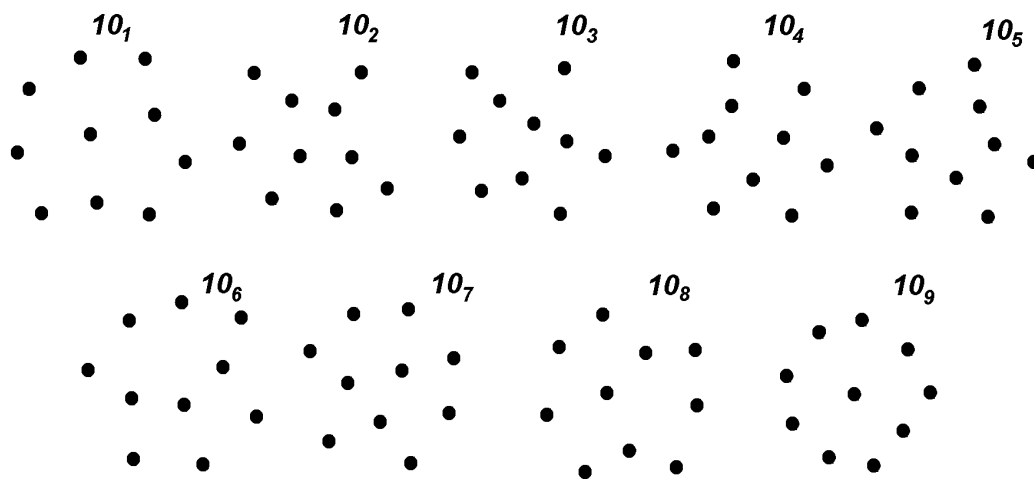


Рис. 8. Каталог несимметричных конфигураций системы точечных вихрей для  $N = 10$

Тщательные эксперименты [48, 49] свидетельствуют о том, что правильный семиугольник является неустойчивым.

В работе [54] рассматривается задача об устойчивости правильного вихревого семиугольника с позиций общей теории стационарного движения динамических систем, имеющих группу симметрии. Полученный результат обладает некоторой формальностью по отношению к фундаментальному понятию устойчивости. Доказанная авторами устойчивость при  $N = 7$  является довольно “хрупкой” (можно сказать “неустойчивая устойчивость” или “условная устойчивость”), которая сразу же нарушается при введении в рассматриваемую систему малого возмущения.

Отметим также, что режим стационарного вращения вихревого  $N$ -угольника является неустойчивым по Ляпунову для любых  $N$ . Действительно, если в начальный момент времени возмутить правильный вихревой  $N$ -угольник так, чтобы он оставался правильным, но имел другой размер, то дальнейшее движение останется равномерным вращением, но с иной угловой скоростью. В результате, насколько бы не было малым возмущение сначала, со временем оно будет возрастать и достигнет порядка размера многоугольника. Этой очевидной неустойчивости отвечает линейно увеличивающееся решение линеаризованной системы и жорданова клетка  $2 \times 2$  матрицы линеаризации, отвечающая её удвоенному собственному значению. Такая ситуация обычна для стационарных движений гамильтоновых систем при наличии циклических координат.

Траектории движения системы  $N = 7$  точечных вихрей, образующих в начальный момент равнобедренный треугольник, показаны на рис. 9 в течение первых десяти периодов взаимодействия. На рисунке с индексом “а” показаны траектории вихрей с начальной невозмущенной конфигурацией, а на рисунке с индексом “б” показан этот же случай, но с внесенным возмущением  $\delta = 0.025$  в начальную конфигурацию вихрей. Направление движения вихрей на рисунках указано стрелкой, а начальное положение отмечено сплошными кружочками. Интегрирование уравнений движения (6) проводилось с использованием метода Рунге-Кутты-Фельберга четвертого-пятого порядка [95]. Видно, что конфигурация возмущенной системы точечных вихрей, размещенных в вершинах правильного многоугольника для  $N = 7$ , при малом возмущении довольно быстро нарушается. Это подтверждает тот факт, что устойчивость правильной конфигурации семи точечных вихрей является неустойчивой.

Табл 1. Таблица значений инвариантов движения симметричных конфигураций точечных вихрей без возмущения  $H_1, I_1$  и с малым  $\delta = 0.025$  возмущением  $H_2, I_2$ .

	$H_1$	$H_2$	$I_1$	$I_2$
3	-0.1316	-0.1281	3.000	2.915
4	-0.3187	-0.3138	6.003	5.881
5 <sub>1</sub>	-0.5981	-0.5952	10.000	9.928
5 <sub>2</sub>	-0.5872	-0.5809	9.998	9.841
6 <sub>1</sub>	-0.9784	-0.9753	15.009	14.932
6 <sub>2</sub>	-0.9794	-0.9729	15.001	14.839
7 <sub>1</sub>	-1.4797	-1.4733	20.997	20.838
8 <sub>1</sub>	-2.0940	-2.0878	28.003	27.848
8 <sub>2</sub>	-2.0810	-2.0739	27.998	27.822
8 <sub>3</sub>	-2.0826	-2.0739	28.004	27.790
9 <sub>1</sub>	-2.8263	-2.8204	35.998	35.850
9 <sub>2</sub>	-2.8233	-2.8169	35.996	35.819
10 <sub>1</sub>	-3.6893	-3.6816	45.002	44.809

Для исследования устойчивости других равномерно-вращательных конфигураций вихрей одинаковой интенсивности проводилась численная интеграция траектории движения системы вихрей без возмущения и с малым возмущением, вносимым в начальные координаты  $\delta$ . В настоящих исследованиях применялись такие возмущения, чтобы инварианты движения системы  $H$  (9) и  $I$  (10) оставались, по возможности, неизменными. С другой стороны требование  $P = 0$  и  $Q = 0$  выполнялось всегда. В таблице 1 приведены значения инвариантов до внесения возмущений ( $H_1$  и  $I_1$ ) и соответствующие значения ( $H_2$  и  $I_2$ ) после внесения возмущения  $\delta = 0.025$ . Анализ результатов показывает, что энергия движения системы изменялась на величину порядка  $10^{-2}$ , а момент импульса системы вихрей уменьшался на величину порядка  $10^{-1}$ . Можно утверждать, что внесение возмущения существенным образом не изменяет динамические параметры системы точечных вихрей.

Отметим, что наиболее полным собранием численно полученных устойчивых относительных положений для  $N = 1, \dots, 50$ , при которых вихри расположены на вложенных друг в друга концентрических окружностях (“атомных оболочках”, по терминологии Дж. Дж. Томсона) считается Лос-Аламосский каталог [41]. В современной литературе часто приводятся лишь фрагменты из каталога, полностью он еще не приведен.

Анализ конфигураций вихревых структур Лос-Аламосского каталога позволяет сделать, по крайней мере, два важных наблюдения:

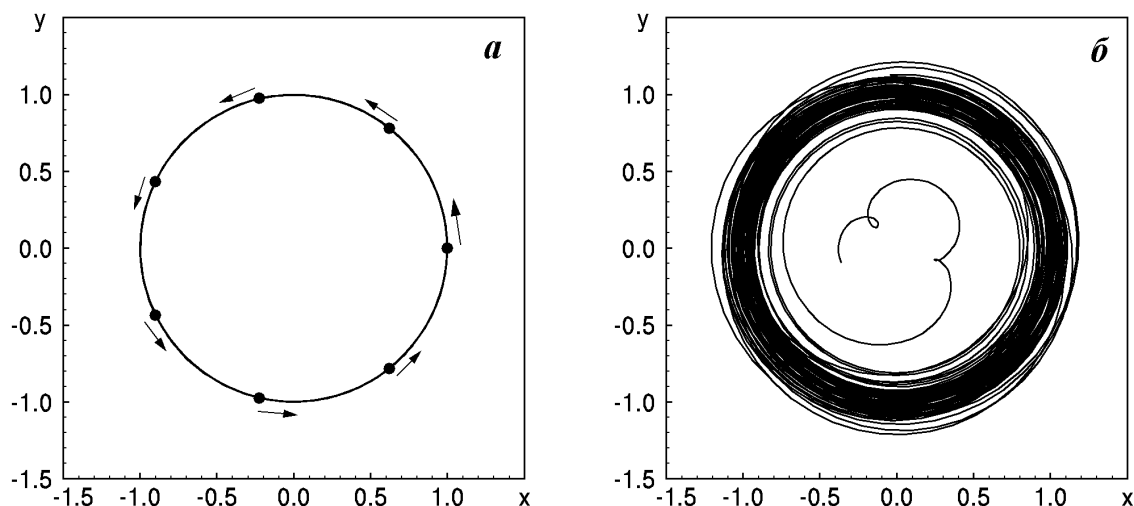


Рис. 9. Траектории движения симметричной системы  $N = 7$  точечных вихрей: а – без начального возмущения, б – с возмущением  $\delta = 0.025$

- Для любого  $N$  существует устойчивая стационарная конфигурация.
- Каждая устойчивая конфигурация точечных вихрей обладает определенной симметрией, в то время как любая несимметричная конфигурация вихрей является неустойчивой.

В работе [96] доказан первый вывод, но для случаев вплоть до  $N = 50$ . Насколько известно, в полном объеме эти гипотезы пока не доказаны.

В работе [54] доказано, что при  $N \geq 8$ , кроме правильных конфигураций, существует хотя бы одна неправильная конфигурация точечных вихрей. В работах [42, 43] были приведены некоторые несимметричные конфигурации точечных вихрей.

Исследование устойчивости рассмотренных выше несимметричных решений нелинейной системы уравнений (19) было проведено на основе сравнительного анализа траекторий движения систем точечных вихрей без начального возмущения и с начальным возмущением. Как и ранее, начальное возмущение  $\delta$  выбиралось таким, чтобы инварианты движения системы минимально изменялись. В таблице 2 представлены значения инвариантов  $H_1, I_1$  движения несимметричных конфигураций, изображенных на рис. 7 и рис. 8, без начальных возмущений и соответствующие инварианты  $H_2, I_2$  после внесения возмущения  $\delta = 0.0025$ . Видно, что энергия движения вихрей изменяется в пределах  $10^{-5}$ , а момент импульса уменьшается на величину порядка  $10^{-3}$ . Следовательно, внесенные возмущения существенным

образом не изменяют динамические параметры системы точечных вихрей.

В качестве примера рассмотрим траектории движения некоторых несимметричных систем точечных вихрей. На рис. 10 представлены траектории движения системы вихрей  $N = 7_3$  без начального возмущения (рисунок с индексом “а”) и с начальным возмущением (рисунок с индексом “б”)  $\delta = 0.025$ . Видно, что, начиная со второго периода, траектории движения вихрей имеют существенные отличия по отношению к траекториям вихрей без возмущения. Исследования показывают, что все несимметричные системы, представленные в каталоге на рис. 7 и рис. 8 являются неустойчивыми по отношению к малым возмущениям.

## ВЫВОДЫ

В настоящей работе представлен новый метод нахождения стационарно вращаемых конфигураций системы точечных вихрей одинаковой интенсивности на плоскости. Метод основан на решении нелинейной системы алгебраических уравнений, который использует в качестве начального приближения стационарную конфигурацию порядка  $N$  и стационарную точку течения жидкости во вращающейся системе координат с угловой скоростью, равной угловой скорости вращения вихревой системы порядка  $N$ . С увеличением количества точечных вихрей в системе количе-



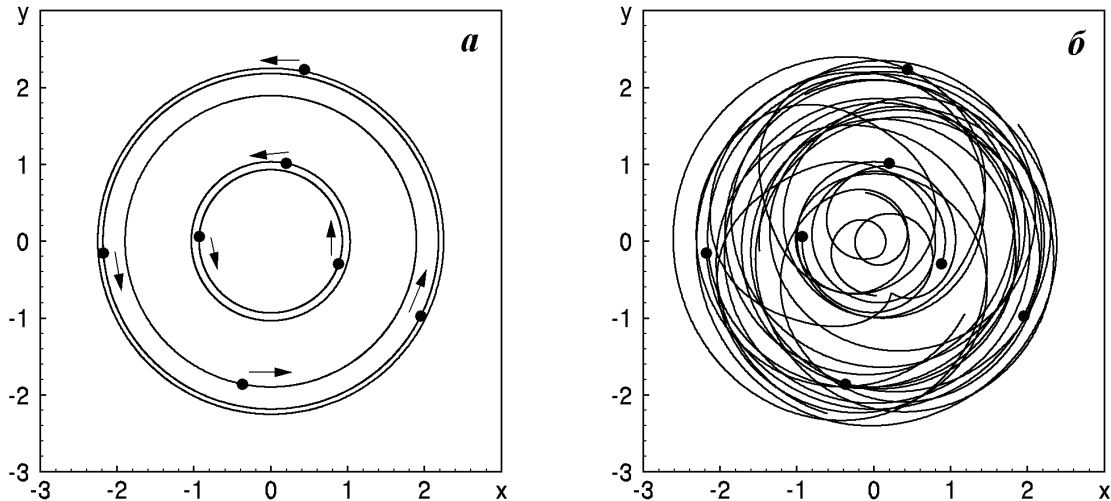


Рис. 10. Траектории движения несимметричной системы  $N = 7_3$  точечных вихрей: а – без начального возмущения, б – с возмущением  $\delta = 0.025$

ство таких точек течения существенно увеличивается. В стационарную точку течения помещается точечный вихрь, интенсивность которого, по мере проведения итераций, постепенно увеличивается вплоть до достижения равной с другими интенсивностями. На каждом итерационном шаге решается нелинейная система алгебраических уравнений порядка  $N + 1$ , в результате которой определяется новая равномерно-вращаемая конфигурация из  $N + 1$  точечного вихря. Численное решение алгебраической системы не зависит от устойчивости получаемой конфигурации вихрей. По этой причине предлагаемый метод позволяет определять как устойчивые, так и неустойчивые конфигурации точечных вихрей на плоскости.

Исследования показывают, что симметричные конфигурации вихрей размещаются на концентрических окружностях с равномерным распределением вихрей по каждой окружности. Вихревые системы при  $N < 4$  всегда располагаются на одной окружности. Начиная с  $N \geq 5$  точечные вихри могут уже располагаться на двух окружностях. Если  $N \geq 9$ , то стационарные вихревые конфигурации содержат, как минимум, две концентрические окружности, заполненные вихрями.

В результате исследований сформирован дополненный аналог (фрагмент для  $N = 3, \dots, 10$ ), так называемый, “Лос-Аламосского каталога” [46], который считается наиболее полным собранием устойчивых вихревых конфигураций для  $N = 1, \dots, 50$ , в котором вихри расположены на вложенных друг в

друга концентрических окружностях. Анализ показывает, что созданный в настоящей работе фрагмент каталога отличается от выше указанного наличием трех новых конфигураций:  $8_3$ ,  $9_1$  и  $10_1$ .

Метод нахождения стационарных вихревых конфигураций, используемый в настоящей работе, позволяет находить несимметричные вихревые структуры. Они имеют место, начиная со случая  $N = 5$ , а не с  $N = 8$  [88], и их количество существенно возрастает с увеличением количества вихрей в рассматриваемой системе: по одной конфигурации для  $N = 5, 6$ , по три для  $N = 7, 8$ , восемь конфигураций для  $N = 9$ , девять для  $N = 10$  и т.д. Большая часть из представленных несимметричных конфигураций являются новыми.

В работе проведен анализ устойчивости вихревых структур по Раусу. Для этого в начальное положение вихрей вносилось малое возмущение, но такое, которое не меняет положение центра завихренности системы вихрей и минимально изменяет энергетические параметры системы точечных вихрей,  $\Delta H < 0.01H$  и  $\Delta I < 0.01I$ .

Исследование устойчивости показало, что симметричные конфигурации для  $N \leq 6$  точечных вихрей, лежащих на одной окружности, являются устойчивыми к малым возмущениям. Это значит, что вихревая конфигурация после внесения малого возмущения в начальное положение сохраняет свою структуру с течением времени. Вихревые конфигурации, содержащие  $N \geq 8$  точечных вихрей на одной окружности, являются неустой-

Табл. 2. Таблица значений инвариантов движения несимметричных конфигураций точечных вихрей без возмущения  $H_1, I_1$  и с малым  $\delta = 0.025$  возмущением  $H_2, I_2$ .

	$H_1$	$H_2$	$I_1$	$I_2$
5 <sub>1</sub>	-0.58669	-0.58663	10.0	9.9985
6 <sub>1</sub>	-0.97433	-0.97426	15.0	14.9983
7 <sub>1</sub>	-1.46510	-1.46503	21.0	20.9982
7 <sub>2</sub>	-1.44410	-1.44403	21.0	20.9983
7 <sub>3</sub>	-1.42046	-1.42040	21.0	20.9985
8 <sub>1</sub>	-2.07041	-2.07034	28.0	27.9984
8 <sub>2</sub>	-2.05269	-2.05263	28.0	27.9985
8 <sub>3</sub>	-2.05647	-2.05638	28.0	27.9980
9 <sub>1</sub>	-2.82233	-2.82225	36.0	35.9982
9 <sub>2</sub>	-2.78345	-2.78339	36.0	35.9987
9 <sub>3</sub>	-2.80028	-2.80020	36.0	35.9979
9 <sub>4</sub>	-2.78741	-2.78733	36.0	35.9981
9 <sub>5</sub>	-2.79871	-2.79862	36.0	35.9977
9 <sub>6</sub>	-2.75592	-2.75585	36.0	35.9982
9 <sub>7</sub>	-2.80823	-2.80816	36.0	35.9983
9 <sub>8</sub>	-2.78123	-2.78117	36.0	35.9984
10 <sub>1</sub>	-3.67984	-3.67975	45.0	44.9977
10 <sub>2</sub>	-3.65191	-3.65185	45.0	44.9985
10 <sub>3</sub>	-3.64413	-3.64407	45.0	44.9984
10 <sub>4</sub>	-3.65781	-3.65776	45.0	44.9987
10 <sub>5</sub>	-3.65231	-3.65223	45.0	44.9980
10 <sub>6</sub>	-3.67236	-3.67229	45.0	44.9982
10 <sub>7</sub>	-3.67990	-3.67983	45.0	44.9983
10 <sub>8</sub>	-3.67847	-3.67842	45.0	44.9987
10 <sub>9</sub>	-3.68155	-3.68147	45.0	44.9982

чивыми. Случай  $N = 7$  является условно устойчивым. Малые возмущения в такой вихревой системе приводят к ее разрушению, однако симметричная конфигурация вихрей без возмущений с течением времени сохраняется в течении, как минимум 8 – 10 периодов взаимодействия.

Другие симметричные вихревые конфигурации, представленные в каталоге настоящей работы, являются устойчивыми к малым возмущениям. При этом установлено, что включенная в так называемый Гарвардский каталог (эксперименты Майера) конфигурация 10 точечных вихрей, размещенных на концентрических окружностях (случай  $3+7$ ) является неустойчивой. И, наоборот, аналогичная конфигурация 10 вихрей (случай  $2+8$ ) оказалась устойчивой. Исследования показывают, что все несимметричные конфигурации точечных вихрей, полученные в настоящей работе являются неустойчивыми по отношению к малым возмущениям.

В работе с помощью численных методов постро-

ены каталоги равномерно вращаемых конфигураций точечных вихрей одинаковой интенсивности на плоскости, которые содержат симметричные и несимметричные вихревые структуры. Такие конфигурации представляют несомненный интерес и позволяют уже сегодня сформировать ряд новых задач вихревой динамики.

Работа выполнена в рамках бюджетной темы 1.10.1.6С7 Института гидромеханики НАН Украины и в рамках проекта INTAS 04-80-7297 “Vortex Dynamics”.

1. Helmholtz H. Über Integrale der hydrodynamischen Gleichungen, welche den Wirbelbewegungen entsprechen // J. reine angew. Math. – 1858. – 55. – P. 25–55.
2. Helmholtz H. On integrals of the hydrodynamical equations, which express vortex-motion // Phil. Mag. (Ser. 4). – 1867. – 33. – P. 485–510.
3. Гельмгольц Г. Об интегралах уравнений гидродинамики, соответствующих вихревым движениям // Два исследования по гидродинамике. I. О вихревом движении. II. О прерывном движении жидкости. – М.: ПАЛЛАΣ, 1902. – С. 5–51.
4. Чаплыгин С. А. Заметки о жизни и трудах Гельмгольца // Гельмгольц Г. Два исследования по гидродинамике. I. О вихревом движении. II. О прерывном движении жидкости. – М.: ПАЛЛАΣ, 1902. – С. 69–108.
5. Гельмгольц Г. Основы вихревой теории. – М.-Ижевск: Изд-во Ин-та компьютерных исследований, 2002. – 81 с.
6. Гельмгольц Г. Об интегралах уравнений гидродинамики, соответствующих вихревым движениям // Нелин. динамика. – 2006. – 2, N3. – С. 473–507.
7. Столетов А. Г. Гельмгольц и современная физика // А. Г. Столетов. Избранные сочинения. – М.-Л.: Гостехтеоретиздат, 1950. – С. 553–589.
8. Зернов В. Герман Гельмгольц. – М.-Л.: Госиздат, 1925. – 100 с.
9. Лазарев П. П. Гельмгольц. Изд. 2. – М.: Изд-во АН СССР, 1959. – 130 с.
10. Лебединский А. В., Франкфурт У. И., Френк А. М. Гельмгольц (1821–1894). – М.: Наука, 1950. – 320 с.
11. Meleshko V. V., Aref H. A bibliography of vortex dynamics 1858-1956 // Adv. Appl. Mech. – 2007. – 41. – P. 197–292.
12. Гельмгольц Г. Речь на обеде 2 ноября 1891 года // Герман фон-Гельмгольц (1821–1891 гг.) Публичные лекции, читанные в Императорском Московском Университете в пользу Гельмгольцевского Фонда. – М.: Изд-во Импер. Московского ун-та, 1892. – С. XI–XXVIII.
13. Мелешко В. В., Константинов М. Ю. Динамика вихревых структур. – К.: Наукова думка, 1993. – 283 с.
14. Салтанов Н. В., Горбань В. А. Вихревые структуры в жидкости: аналитические и численные решения. – К.: Наукова думка, 1993. – 244 с.
15. Жуковский Н. Е. Работы [Гельмгольца] по механике // Герман фон-Гельмгольц (1821–1891 гг.) Публичные лекции, читанные в Императорском Московском Университете в пользу Гельмгольцевского Фонда. – М.: Изд-во Импер. Московского ун-та, 1892. – С. 37–52.

16. Aref H. Point vortex dynamics: A classical mathematics playground // *J. Math. Phys.*– 2007.– **48**, No 1.– P. 1–21.
17. Thomson W. On vortex atoms // *Phil. Mag. (Ser. 4)*.– 1867.– **34**.– P. 15–24.
18. Thomson W. Floating magnets [illustrating vortex systems] // *Nature*.– 1878.– **18**.– P. 13–14.
19. Thomson W. Vortex statics // *Phil. Mag. (Ser. 5)*.– 1880.– **10**.– P. 97–109.
20. Thomson J. J. On the structure of the atom: an investigation of the stability and periods of oscillation of a number of corpuscles arranged at equal intervals around the circumference of a circle with application of the results to the theory of atomic structure // *Phil. Mag. (Ser. 6)*.– 1904.– **7**.– P. 237–265.
21. Thomson J. J. The corpuscular theory of matter.– London: Constable & Co, 1907.– 112 p.
22. Томсон Дж. Дж. Распределение корпёслей в атоме // Новые идеи в физике.– СПб.: Образование, 1911.– С. 110–132.
23. Томсон Дж. Дж. Электричество и материя.– М.-Л.: Госиздат, 1928.– 263 с.
24. Цейтлин З. Вихревая теория материи, ее развитие и значение // Под знаменем марксизма.– 1924.– N 10–11.– С. 78–91.
25. Kragh H. The vortex atom: A Victorian theory of everything // *Centaurus*.– 2002.– **44**.– P. 32–114.
26. Mayer A. M. A note on experiments with floating magnets; showing the motions and arrangements in a plane of freely moving bodies, acted on by forces of attraction and repulsion; and serving in the study of the directions and motions of lines of magnetic force // *Phil. Mag. (Ser. 5)*.– 1878.– **5**.– P. 397–398.
27. Mayer A. M. Floating magnets // *Nature*.– 1878.– **17**.– P. 487–488.
28. Mayer A. M. Note on floating magnets // *Am. J. Sci.*– 1878.– (Ser. 3) **15**.– P. 477–478.
29. Mayer A. M. Floating magnets // *Nature*.– 1878.– **18**.– P. 258–260.
30. Mayer A. M. On the morphological laws of the configuration formed by magnets floating vertically and subjected to the attraction of a superposed magnet; with notes on some of the phenomena in molecular structure which these experiments may serve to explain and illustrate // *Phil. Mag. (Ser. 5)*.– 1879.– **7**.– P. 98–108.
31. Warder R. B., Shipley W. P. Floating magnets // *Am. J. Sci.*– 1878.– (Ser. 3) **20**.– P. 285–288.
32. Monkman J. On the arrangement of electrified cylinders when attracted by an electrified sphere // *Proc. Cambridge Phil. Soc.*– 1889.– **6**.– P. 179–181.
33. Wood R. W. Equilibrium-figures formed by floating magnets // *Phil. Mag. (Ser. 5)*.– 1879.– **46**.– P. 162–164.
34. Derr L. A photographic study of Mayer's floating magnets // *Proc. Am. Acad. Arts Sci.*– 1909.– **44**.– P. 525–528.
35. Льюис М. История физики.– М.: Мир, 1970.– 464 с.
36. Snelders H. A. M. A. M. Mayer's experiments with floating magnets and their use in the atomic theories of matter // *Ann. Sci.*– 1976.– **33**.– P. 67–80.
37. Thomson J. J. A Treatise on the Motion of Vortex Rings.– London: Macmillan, 1883.– 124 p.
38. Aref H. Point vortex motions with a center of symmetry // *Phys. Fluids*.– 1982.– **25**.– P. 2183–2187.
39. Lewis D., Ratiu T. Rotating  $n$ -gon/ $kn$ -gon vortex configurations // *J. Nonlinear Sci.*– 1996.– **6**.– P. 385–414.
40. Aref H., van Buren M. Vortex triple rings // *Phys. Fluids*.– 2005.– **17**.– P. 55–64.
41. Campbell L. J., Ziff R. M. Vortex patterns and energies in a rotation superfluid // *Phys. Rev. B*.– 1979.– **B20**.– P. 1886–1902.
42. Aref H., Vainchtein D. L. Point vortices exhibit asymmetric equilibria // *Nature*.– 1998.– **392**.– P. 769–770.
43. Губа А. О., Гуржий О. А., Мелешко В. В. Рівномірно-обертвові конфігурації точкових вихорів // Вісн. Київ. унів.-ту. Сер. фіз.-мат.наук.– 2006.– N2.– С. 100–104.
44. Aref H. Vortices and polynomials // *Fluid Dyn. Res.*– 2007.– **39**.– P. 5–23.
45. Newton P. K., Chamon G. Construction of point vortex equilibria via Brownian ratchets // *Proc. R. Soc. London*.– 2007.– **A463**.– P. 1525–1540.
46. Campbell L. J., Ziff R. A catalog of two-dimensional vortex patterns // LA-7384-MS, Rev. Informal Report.– Los Alamos Scientific Laboratory, 1978.– P. 1–40.
47. Aref H., Newton P. K., Stremmer M. A., Tokieda T., Vainchtein D. L. Vortex crystals // *Adv. Appl. Mech.*– 2002.– **39**.– P. 1–79.
48. Yarmchuk E. J., Gordon M. J., Packard R. E. Observation of stationary vortex arrays in rotating superfluid Helium // *Phys. Rev. Lett.*– 1979.– **43**.– P. 214–217.
49. Yarmchuk E. J., Packard R. E. Photographic studies of quantized vortex lines // *J. Low Temp. Phys.*– 1982.– **46**.– P. 479–.
50. Grzybowski B. A., Stone H. A., Whitesides G. M. Dynamic self-assembly of magnetized, millimetre-sized objects rotating at a liquid-air interface // *Nature*.– 2000.– **405**.– P. 1033–1036.
51. Durkin D., Fajans J. Experiments on two-dimensional vortex patterns // *Phys. Fluids*.– 2000.– **12**.– P. 289–293.
52. Хазин Л. Г. Правильные многоугольники из точечных вихрей и резонансная неустойчивость стационарных состояний // *ДАН СССР*.– 1976.– **230**.– С. 799–802.
53. Хазин Л. Г. Устойчивость положения равновесия гамильтоновых систем при кратных частотах // Н. Е. Кочин и развитие механики.– М.: Наука, 1984.– С. 174–185.
54. Куракин Л. Г., Юдович В. И. О нелинейной устойчивости стационарного вращения правильного вихревого многоугольника // *Доклады РАН*.– 2002.– **284**.– С. 476–482.
55. Kurakin L. G., Yudovich V. I. The stability of stationary rotating of a regular vortex polygon // *Chaos*.– 2002.– **12**.– P. 574–595.
56. Крылов А. Н. Воспоминания и очерки.– М.: Изд-во АН СССР, 1956.– 884 с.
57. Aref H. On the equilibrium and stability of a row of point vortices // *J. Fluid Mech.*– 1995.– **290**.– P. 167–181.
58. Бэтчелор Дж. Введение в динамику жидкости.– М.: Мир, 1973.– 758 с.

59. Gröbli W. Spezielle Probleme über die Bewegung geradliniger paralleler Wirbelfäden.– Zürich: Zürcher und Furrer, 1877.– 90 p.
60. Gröbli W. Spezielle Probleme über die Bewegung geradliniger paralleler Wirbelfäden // Vierteljschr. Naturf. Ges. Zürich.– 1887.– **22**.– P. 37–82, 129–168.
61. Aref H., Rott N., Thomann H. Gröbli's solution of the three-vortex problem // Annu. Rev. Fluid Mech.– 1992.– **24**.– P. 1–20.
62. Ареф Х., Ротт Н., Томанн Х. Решение Грёбли задачи трех вихрей / В кн. Фундаментальные и прикладные проблемы вихревой динамики // М.-Ижевск.– Изд-во Ин-та компьютерных исследований, 2003.– С. 677–703.
63. Кирхгоф Г. Механика. Лекции по математической физике.– М.: Изд-во АН СССР, 1962.– 403 с.
64. Ламб Г. Гидродинамика.– М.-Л.: Гостехиздат, 1947.– 928 с.
65. Synge J. L. On the motion of three vortices // Can. J. Math.– 1949.– **1**.– P. 257–270.
66. Новиков Е. А. Динамика и статистика системы вихрей // Ж. эксп. теор. физ.– 1975.– **68**.– С. 1868–1882.
67. Aref H. Motion of three vortices // Phys. Fluids.– 1979.– **22**.– P. 393–400.
68. Tavantzis J., Ting L. The dynamics of three vortices revisited // Phys. Fluids.– 1988.– **31**.– P. 1392–1409.
69. Горячев Д. Н. О некоторых случаях движения прямолинейных параллельных вихрей.– М.: Изд-во Московского ун-та, 1898.– 106 с.
70. Васильев Н. С. Движение бесконечно тонких вихрей.– Одесса: Изд-во Сапожникова, 1913.– 188 с.
71. Горячев Д. Н. О некоторых случаях движения прямолинейных параллельных вихрей // Уч. зап. Импер. Москов. ун-та Отдел физ.-мат.– 1898.– **16**.– С. 1–188.
72. Васильев Н.С. Движение бесконечно тонких вихрей // Зап. матем. отд. Новороссийс. об-ва естествоисп.– 1914.– **22**.– С. 1–188.
73. Новиков Е. А., Седов Ю. Б. Стохастические свойства системы четырех вихрей // Ж. эксп. теор. физ.– 1978.– **75**.– С. 868–876.
74. Aref H., Pomphrey H. Integrable and chaotic motions of four vortices. I. The case of identical vortices // Proc. R. Soc. London.– 1982.– **A380**.– P. 359–387.
75. Pullin D. I., Saffman P. J. Long-time symplectic integration: the example of four-vortex motion // Proc. R. Soc. London.– 1982.– **A432**.– P. 481–494.
76. Aref H. Integrable, chaotic, and turbulent vortex motion in two-dimensional flows // Annu. Rev. Fluid Mech.– 1983.– **15**.– P. 345–389.
77. Саткевич А. А. Аэродинамика как теоретическая основа авиации.– Петроград: Изд-во Ин-та инж. путей сообщения, 1923.– 579 с.
78. Планк М. Введение в механику деформируемых тел.– М.-Л.: Госиздат, 1929.– 208 с.
79. Саткевич А. А. Теоретические основы гидро-аэродинамики. Часть 1. Кинематика жидких тел.– Л.: Изд-во Воздухофлота, 1932.– 238 с.
80. Саткевич А. А. Теоретические основы гидро-аэродинамики. Часть 2. Динамика жидких тел.– Л.-М.: ОНТИ НКТП СССР, 1934.– 468 с.
81. Прандтль Л., Титъенс О. Гидро- и аэромеханика [по лекциям проф. Л. Прандтля]. Том первый. Изд. 2-ое.– М.-Л.: ГТТИ, 1933.– 223 с.
82. Вилля А. Теория вихрей.– Л.-М.: ОНТИ, 1936.– 266 с.
83. Милл-Томсон Л. М. Теоретическая гидродинамика.– М.: Мир, 1964.– 655 с.
84. Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В. Теоретическая гидромеханика. Часть первая. Изд. 6-ое.– М.: Физматгиз, 1963.– 584 с.
85. Козлов В. В. Общая теория вихрей.– Ижевск: Изд-во Удмурт. ун-та, 1998.– 238 с.
86. Пуанкаре А. Теория вихрей.– Ижевск: Изд-во Регул. хаот. динамика, 2000.– 160 с.
87. Сэффман Ф. Дж. Динамика вихрей.– М.: Научный Мир, 2000.– 376 с.
88. Борисов А. В., Мамаев И. С. Математические методы динамики вихревых структур.– М.-Ижевск: Изд-во Ин-та компьютерных исследований, 2005.– 368 с.
89. Thomson J.J. A treatise on the motion of vortex rings.– London: Macmillan, 1883.– 124 p.
90. Самарский А. А. Введение в численные методы.– М: Наука, 1982.– 278 с.
91. Havelock T. H. Stability of motion of rectilinear vortices in ring formation // Phil. Mag. (Ser. 7).– 1931.– **11**.– P. 617–633.
92. Mertz G.T. Stability of body-centered polygonal configurations of ideal vortices // Phys. Fluids.– 1978.– **21**.– P. 1092–1095.
93. Борд Е.Г. О нелинейных возмущениях правильной полигональной системы вихрей // Нелин. динамика.– 2006.– **3**.– С. 353–360.
94. Куракин Л. Г., Юдович В. И. Устойчивость стационарного вращения правильного вихревого многоугольника / В кн. Фундаментальные и прикладные проблемы вихревой динамики // М.-Ижевск.– Изд-во Ин-та компьютерных исследований, 2003.– С. 238–299.
95. Форсайт Дж., Малкольм М., Коулер К. Машинные методы математических вычислений.– М: Мир, 1980.– 210 с.
96. Campbell L. J. Transverse normal modes of finite vortex arrays // Phys. Rev. Let.– 1981.– **24**, N2.– P. 514–534.