

## **Исследование собственных колебаний многослойных пологих оболочек и пластин сложной формы в плане**

**Л. В. Курпа, А. В. Чистилина**

Национальный технический университет “Харьковский политехнический институт”,  
Харьков, Украина

*Предложен алгоритм решения задачи о собственных колебаниях многослойных пологих оболочек и пластин, в основу которого положены вариационные методы и теория  $R$ -функций. На базе данного алгоритма решены задачи для пологих оболочек (сферических и цилиндрических), а также пластин сложной формы в плане. Приведены результаты исследования зависимости собственных частот колебаний пологих оболочек и пластин с различным количеством слоев от угла поворота главных направлений каждого слоя.*

**Ключевые слова:** собственные колебания, вариационные методы, теория  $R$ -функций, пологие оболочки.

**Введение.** Многослойные оболочки и пластины широко используются в качестве основных элементов современных тонкостенных конструкций. Однако при этом оказывается проблематичным нахождение собственных частот и форм колебаний отдельных оболочечных элементов, имеющих сложную форму в плане. Подобного рода задачи связаны со значительными трудностями, обусловленными необходимостью решения систем дифференциальных уравнений с частными производными в областях сложной формы, что в общем случае может быть выполнено только с помощью приближенных методов. В настоящее время известно много работ, посвященных данной проблеме, среди которых можно выделить фундаментальные обзоры [1, 2], а также монографии [3–6]. Решение динамических задач для многослойных оболочек и пластин базируется как на использовании классической теории, так и уточненных теорий. Классическая теория не всегда может привести к большим погрешностям. Так, например, в работах [7, 8] выполнено сравнение результатов, полученных с помощью уточненных теорий и классической теории. Тем не менее, как показывает опыт, использование последней существенно упрощает расчет и во многих случаях вполне удовлетворяет запросы практики, в частности это касается тонких оболочек и пластин.

В данной работе для исследования динамического поведения многослойных оболочек и пластин использована классическая теория в сочетании с методом  $R$ -функций. Главным достоинством этого метода является возможность учета геометрии области на аналитическом уровне, что позволяет применять его для исследования пластин и пологих оболочек с довольно сложным планом. Нами указанный метод применен к исследованию динамического поведения многослойных сферических и цилиндрических оболочек, а также пластин сложной формы в плане, изготовленных из различного числа композитных слоев.

**Постановка задачи.** Рассмотрим задачу о свободных колебаниях многослойной пологой оболочки постоянной толщины  $h$ , опирающейся на заданный план  $\Omega$ . Полагаем, что кривизны срединной поверхности постоянны, а слои оболочки жестко связаны между собой и что поперечные нормальные и касательные напряжения малы, так что ими можно пренебречь по сравнению с другими компонентами напряжений. Деформации считаются пренебрежимо малыми по сравнению с толщиной всего пакета оболочки, а углы поворота малы по сравнению с единицей. Геометрические и механические параметры оболочки позволяют применить к ней классические гипотезы недеформируемых нормалей для всего пакета оболочки в целом.

В качестве координатной поверхности в однослойной оболочке выберем ее срединную поверхность, а в оболочке, образованной из нескольких слоев постоянной толщины, – поверхность, равноотстоящую от лицевых поверхностей. Координатные линии срединной поверхности совпадают с линиями главных кривизн, радиусы которых обозначим как  $R_1, R_2$  (главные радиусы кривизны).

В рамках принятых предположений вариационная постановка данной задачи сводится к нахождению минимума функционала [3, 9]

$$J = \Pi_{\max} - T_{\max}, \quad (1)$$

где  $\Pi_{\max}$  – максимальная потенциальная энергия оболочки;  $T_{\max}$  – максимальная кинетическая энергия.

Потенциальная энергия деформации пологой оболочки имеет вид

$$\begin{aligned} \Pi = & \frac{1}{2} \iint_{\Omega} (C_{11}\varepsilon_1^2 + 2C_{12}\varepsilon_1\varepsilon_2 + C_{22}\varepsilon_2^2 + C_{66}\gamma_{12}^2 + 2C_{16}\gamma_{12}\varepsilon_1 + \\ & + 2C_{26}\gamma_{12}\varepsilon_2) d\Omega + \iint_{\Omega} (K_{11}\varepsilon_1\chi_1 + K_{12}(\varepsilon_1\chi_2 + \varepsilon_2\chi_1) + K_{22}\varepsilon_2\chi_2 + \\ & + K_{66}\gamma_{12}\tau + K_{16}(\varepsilon_1\tau + \gamma_{12}\chi_1) + K_{16}(\varepsilon_1\tau + \gamma_{12}\chi_1)) d\Omega + \\ & + \frac{1}{2} \iint_{\Omega} (D_{11}\chi_1^2 + 2D_{12}\chi_1\chi_2 + D_{22}\chi_2^2 + D_{66}\tau^2 + 2D_{16}\tau\chi_1 + 2D_{26}\tau\chi_2) d\Omega, \quad (2) \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 = U_{,x} + k_1W; \quad \varepsilon_2 = V_{,y} + k_2W; \quad \gamma_{12} = U_{,y} + V_{,x}; \\ \chi_1 = -W_{,xx}; \quad \chi_2 = -W_{,yy}; \quad \tau = -2W_{,xy}. \end{aligned}$$

Кинетическая энергия определяется как

$$T = \frac{\rho h}{2g} \iint_{\Omega} ((U_{,t})^2 + (V_{,t})^2 + (W_{,t})^2) d\Omega, \quad (3)$$

где  $\rho, h$  – соответственно плотность и толщина оболочки.

Приведенные постоянные  $C_{pq}$ ,  $K_{pq}$ ,  $D_{pq}$ , характеризующие свойства материала всего пакета оболочки, зависят от свойств каждого слоя и определяются по формулам [10]

$$\begin{aligned} C_{pq} &= \sum_{i=1}^n (\gamma_i - \gamma_{i-1}) B_{pq}^i; & K_{pq} &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (\gamma_i^2 - \gamma_{i-1}^2) B_{pq}^i; \\ D_{pq} &= \frac{1}{3} \sum_{i=1}^n (\gamma_i^3 - \gamma_{i-1}^3) B_{pq}^i. \end{aligned} \quad (4)$$

где  $\gamma_i$  ( $\gamma_{i-1} < \gamma_i < \dots < h$ ) – толщина  $i$ -го слоя оболочки;  $B_{pq}^i$  – постоянные, характеризующие свойства каждого слоя оболочки.

Если оболочка составлена из ортотропных слоев, то упругие постоянные  $B_{pq}^i$  для каждого слоя могут быть записаны в виде

$$\begin{aligned} B_{11} &= \frac{E_1}{(1 - \nu_1 \nu_2)}; & B_{22} &= \frac{E_2}{(1 - \nu_1 \nu_2)}; & B_{66} &= G_{12}; \\ B_{12} &= \frac{\nu_2 E_1}{1 - \nu_1 \nu_2} = \frac{\nu_1 E_2}{1 - \nu_1 \nu_2}; & B_{16} &= B_{26} = 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Данные соотношения могут быть использованы в том случае, когда главные направления упругости совпадают с геометрическими направлениями осей координат. Если же имеет место поворот главных направлений упругости относительно осей координат на некоторый угол (угол поворота  $\theta$  отсчитывается от положительного направления оси  $Ox$ ), то упругие постоянные материала будут зависеть от упругих постоянных в главных направлениях ортотропного тела [3].

**Метод решения.** Решение дифференциального уравнения движения оболочки [9] будем искать в виде

$$\begin{cases} u(x, y, z, t) = U(x, y) \sin \lambda t; \\ v(x, y, z, t) = V(x, y) \sin \lambda t; \\ w(x, y, z, t) = W(x, y) \sin \lambda t. \end{cases} \quad (6)$$

В соответствии с (6) максимальную кинетическую энергию полой оболочки запишем следующим образом:

$$T_{\max} = \frac{\lambda^2 \rho h}{2} \iint_{\Omega} (U^2 + V^2 + W^2) d\Omega, \quad (7)$$

где  $\lambda$  – собственная частота колебаний.

Для нахождения минимума функционала (1) воспользуемся методом Ритца. Согласно этому методу, перемещения оболочки  $U, V, W$  представляются в виде

$$U = \sum_{i=1}^{N_1} a_i u_i; \quad V = \sum_{i=N_1+1}^{N_2} a_i v_i; \quad W = \sum_{i=N_2+1}^{N_3} a_i w_i, \quad (8)$$

где  $\{u_i\}, \{v_i\}, \{w_i\}$  – последовательности координатных функций, удовлетворяющих граничным условиям;  $a_i$  – неопределенные коэффициенты, которые находятся из условия минимума функционала (1).

Подставив выражения (8) в (1), в силу необходимого условия минимума функционал  $J$ , получим

$$\frac{\partial J}{\partial a_i} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, N_3). \quad (9)$$

В матричном виде система линейных уравнений (9) может быть представлена как

$$(A - \lambda^2 B)X = 0, \quad (10)$$

где  $X^T = (a_1, a_2, \dots, a_{N_3})$  – вектор неопределенных коэффициентов;  $A = \{a_{ij}\}$  и  $B = \{b_{ij}\}$  – матрицы Ритца.

Основная проблема, которая возникает при решении данного класса задач вариационными методами, – построение системы координатных функций, удовлетворяющих заданным граничным условиям. Нами эта проблема решена с помощью метода  $R$ -функций. Согласно последнему, система координатных функций строится с помощью структуры решений краевой задачи [11]. Конструктивные средства теории  $R$ -функций позволяют строить структурные формулы для достаточно широкого спектра краевых условий.

Рассмотрим примеры построения последовательностей координатных функций для исследуемых консольных оболочек. Предположим, что отсутствует проскальзывание между слоями оболочки. Тогда многослойную оболочку можно рассматривать как однослойную пологую оболочку с приведенными жесткостными параметрами.

Пусть заданный план оболочки имеет форму, изображенную на рис. 1. Будем считать, что вдоль границы  $ABCDEF$  оболочка жестко закреплена (жестко закрепленный участок  $\partial\Omega_1$  заштрихован), а на оставшемся участке  $\partial\Omega_2$  – свободна.

Тогда граничные условия на  $\partial\Omega_1$  имеют вид

$$U = 0; \quad V = 0; \quad W = 0; \quad \frac{\partial W}{\partial n} = 0, \quad (11)$$

на  $\partial\Omega_2$  –

$$\sigma_n = 0; \quad \tau_n = 0, \quad M_n = 0; \quad Q_n^* = 0. \quad (12)$$

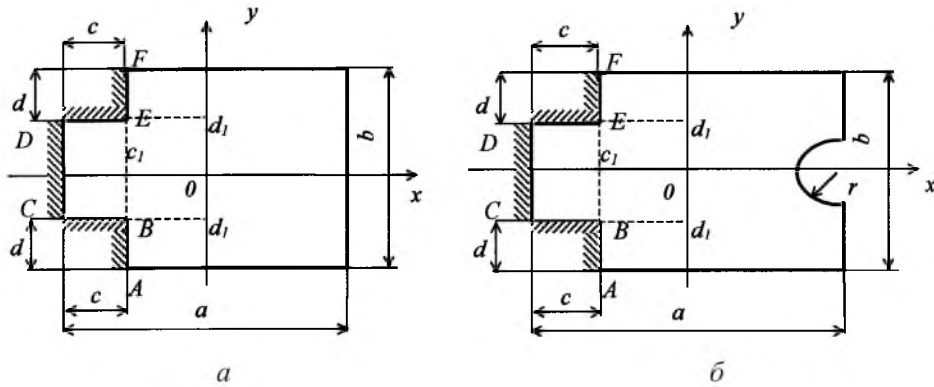


Рис. 1. Форма плана оболочки.

Аналитические выражения для нормальных  $\sigma_n$  и касательных  $\tau_n$  напряжений, изгибающего момента  $M_n$ , а также обобщенной перерезывающей силы  $Q_n^*$  представлены, например, в работе [9]. При использовании метода Ритца граничные условия (12) являются естественными. Система координатных функций должна удовлетворять главным (кинематическим) условиям, т.е. условиям (11).

С помощью методов теории  $R$ -функций построим уравнение  $\omega_1 = 0$  жестко заземленного участка:

$$\omega_1 = f_1 \wedge_0 f_2 \vee_0 f_3, \quad (13)$$

где  $f_1 = x + a/2 \geq 0$  – полуплоскость, расположенная правее вертикальной прямой  $x = -a/2$ ;  $f_2 = (d_1^2 - y^2)/2d_1 \geq 0$  – полоса, ограниченная горизонтальными прямыми  $y = \pm d_1$ ;  $f_3 = x + c_1 \geq 0$  – полуплоскость, расположенная правее вертикальной прямой  $x = -c_1$ ;  $\wedge_0, \vee_0$  – символы, обозначающие  $R$ -операции конъюнкции и дизъюнкции соответственно [11],

$$x \wedge_0 y = x + y - \sqrt{x^2 + y^2};$$

$$x \vee_0 y = x + y + \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Заметим, что построенная таким образом функция  $\omega_1(x, y)$  обращается в нуль только на границе области и положительна внутри области, т.е. обладает следующими свойствами:

$$\omega_1 = 0, \quad (x, y) \in \partial\Omega_1;$$

$$\omega_1 > 0, \quad (x, y) \in \Omega;$$

$$\omega_1 < 0, \quad (x, y) \notin \Omega.$$

Зная уравнение жестко заземленного участка границы области, можно построить структуру решения поставленной задачи:

$$U = \omega_1 P_1; \quad V = \omega_1 P_2; \quad W = \omega_1^2 P_3, \quad (14)$$

где  $P_1, P_2, P_3$  – неопределенные компоненты [11] построенных структурных формул. Путем непосредственной проверки можно убедиться, что при любом выборе неопределенных компонент, достаточное число раз дифференцируемых, функции  $U, V, W$  будут удовлетворять краевым условиям (11). Согласно методу  $R$ -функций, для построения последовательности координатных функций неопределенные компоненты структурных формул представляются в виде разложения в ряд по некоторой полной системе функций  $\{\varphi_i\}, \{\psi_i\}, \{\chi_i\}$ , например системе степенных полиномов, тригонометрических, сплайнов и др., т.е. предполагается, что

$$P_1 = \sum_{i=1}^{N_1} a_i \varphi_i; \quad P_2 = \sum_{i=N_1+1}^{N_2} a_i \psi_i; \quad P_3 = \sum_{i=N_2+1}^{N_3} a_i \chi_i. \quad (15)$$

Тогда, подставляя выражение (15) в (14), получаем, что координатные последовательности  $\{u_i\}, \{v_i\}, \{w_i\}$  в формулах (8) имеют вид

$$\begin{cases} u_i = \omega_1 \varphi_i, & i = 1, 2, \dots, N_1; \\ v_i = \omega_1 \psi_i, & i = N_1 + 1, N_1 + 2, \dots, N_2; \\ w_i = \omega_1 \chi_i, & i = N_2 + 1, N_2 + 2, \dots, N_3. \end{cases} \quad (16)$$

**Численные результаты.** Численная реализация предложенного алгоритма проведена в рамках программирующей системы POLE-RL, база которой содержит модули вычисления двойных и контурных интегралов, нахождения собственных чисел и собственных функций, формирования различных полных систем и др. Для решения данного класса задач составлена программа на входном языке RL, что позволило осуществить широкий численный эксперимент для исследования свободных колебаний многослойных пластин и пологих оболочек, в том числе косоугольноармированных с различной геометрией заданного плана.

Рассмотрим пологие оболочки (цилиндрические, сферические, а также пластины как частный случай оболочки), план которых представлен на рис. 1. Предположим, что исследуемые элементы изготовлены из двух видов материала: стеклопластика или углепластика с эпоксидными матрицами. Упругие постоянные для каждого вида материала приведены в табл. 1.

Т а б л и ц а 1

Упругие постоянные исследуемых материалов

Материал	$E_1$ , ГПа	$E_2$ , ГПа	$G_{12}$ , ГПа	$\nu_1$	$\nu_2$
Стеклопластик	60,7	24,80	12,0	0,5629	0,23
Углепластик	138,0	8,96	7,1	0,4621	0,03

*Пример 1.* Пусть четырехслойная оболочка (рис. 1,а) имеет следующие формулы укладки слоев:  $(\theta, -\theta, -\theta, \theta)$  ( $\theta$  зафиксируем равным  $30^\circ$ ) и геометрические характеристики:  $a/b = 1$ ,  $b/h = 100$ . Исследуем влияние глубины вреза  $c$  на величину безразмерного частотного параметра  $\Lambda = \lambda^2 b^2 \sqrt{\rho/E_1 h^2}$  для четырехслойной сферической и цилиндрической оболочек, а также пластины. В качестве полной системы аппроксимирующих функций выбраны степенные полиномы, т.е.  $\{\varphi_i\}: 1, x, y, x^2, xy, y^2, \dots$ ;  $\{\psi_i\}: 1, x, y, x^2, xy, y^2, \dots$ ;  $\{\chi_i\}: 1, x, y, x^2, xy, y^2, \dots$ . Будем удерживать члены до 9-й степени, что соответствует 45 координатным функциям для каждой из функций  $U, V, W$ . При вычислении матрицы Рунца использовалась 10-точечная квадратурная формула Гаусса (~ 300 точек по всей области).

Размер вреза уменьшали до нулевого значения, соответствующего четырехслойной пологой консольной оболочке [12]. Расчетные значения безразмерного частотного параметра  $\Lambda$  для оболочек (рис. 1,а) приведены в табл. 2.

Т а б л и ц а 2

Значения безразмерного частотного параметра  $\Lambda$  для четырехслойных оболочек и пластин из стеклопластика при разной глубине вреза  $c$  ( $a/b = 1, b/h = 100$ )

$R_y/R_x$	$b/R_y$	$c/b$	$d/b$	$\Lambda_1$	$\Lambda_2$	$\Lambda_3$	$\Lambda_4$	$\Lambda_5$	$\Lambda_6$
1	0,5	0,001	0,001	2,2190	2,4500	7,1700	8,4600	11,9800	17,2900
		0*		2,2130*	2,5100*	7,3300*	8,5000*	12,0600*	17,2500*
		0,100		2,4087	2,5219	6,8949	8,9628	11,6416	18,1583
		0,200		3,3739	3,5329	8,1161	11,9782	15,0654	20,1782
0	0,5	0,001	0,001	2,7000	4,1700	7,1900	10,7500	11,8700	14,1100
		0*		2,6900*	4,1000*	7,1400*	10,6000*	11,5700*	13,8600*
		0,100		2,6469	3,7176	7,0632	11,4475	12,5329	14,2944
		0,200		3,7465	5,2803	8,5834	13,9309	16,0108	16,0402
$k_1 = k_2 = 0$		0,001	0,001	0,9500	2,1500	5,3700	6,5000	7,9900	13,4500
		0*		0,8700*	2,1400*	5,3300*	5,9600*	7,8200*	12,6100*
		0,100		1,0730	2,3356	5,7035	6,9619	8,8567	13,9879
		0,200		1,4361	2,9359	6,5207	8,7218	11,4451	14,6427

**Примечание.** Здесь и в табл. 6, 7 звездочкой обозначены данные работы [12].

Можно отметить, что с увеличением вреза в основном растет значение частотного параметра, при его отсутствии оно сопоставимо с приведенным в литературе, отклонение не превышает 6%.

*Пример 2.* Рассмотрим пологую оболочку, план которой изображен на рис. 1,б. Исследуем зависимость безразмерного частотного параметра колебаний четырехслойной цилиндрической и сферической оболочек, а также пластины от угла расположения слоев (формула укладки слоев:  $(\theta, -\theta, -\theta, \theta)$ ). В табл. 3 представлены полученные значения безразмерного частотного параметра  $\Lambda = \lambda^2 b^2 \sqrt{\rho/E_1 h^2}$  для оболочек со следующими геометрическими характеристиками (рис. 1,б):  $a/b = 1$ ,  $b/h = 100$ ,  $c/b = 0,2$ ,  $d/b = 0,2$ ,

$r/b = 0,2$ . Результаты получены при аппроксимации каждой из неопределенных компонент степенными полиномами, что соответствует 66 членам разложения для каждой функций  $U, V, W$ .

Т а б л и ц а 3

Значения безразмерного частотного параметра  $\Lambda$  для четырехслойных оболочек и пластин из стеклопластика при разном угле поворота  $\theta$   
( $a/b = 1, b/h = 100, c/b = 0,2, d/b = 0,2, r/b = 0,2$ )

$R_y/R_x$	$b/R_y$	$\theta$ , град	$\Lambda_1$	$\Lambda_2$	$\Lambda_3$	$\Lambda_4$	$\Lambda_5$	$\Lambda_6$
1	0,5	15	3,1013	4,3093	7,4790	11,3622	13,8554	17,6838
		30	3,1145	4,1313	7,7511	10,8905	13,3940	18,3295
		45	3,0233	3,7949	7,7233	10,0917	12,5063	18,2677
		60	2,8267	3,4283	7,3176	9,2047	11,4667	17,3242
		90	2,5227	3,0898	6,5686	8,2990	10,3565	15,6074
0	0,5	15	3,6470	4,5572	10,1747	13,1138	15,0880	15,2636
		30	3,5802	4,6236	10,0525	13,1334	14,9035	15,2701
		45	3,3906	4,5021	9,5178	12,5139	14,0093	15,1929
		60	3,1232	4,2032	8,7733	11,5342	12,8468	14,5697
		90	2,7859	3,7823	7,9192	10,4008	11,5517	13,2916
$k_1 = k_2 = 0$		15	1,7301	2,6686	6,1834	10,0287	10,9938	13,7169
		30	1,6034	2,7087	6,4963	9,2883	10,4135	14,2985
		45	1,4339	2,6665	6,5987	8,2907	9,5451	14,4612
		60	1,2778	2,5147	6,3554	7,3798	8,6461	13,9551
		90	1,1469	2,2376	5,7477	6,6229	7,7566	12,7957

Данные исследований свидетельствуют, что с увеличением угла поворота  $\theta$  значения частотного параметра для оболочек и пластин в основном уменьшаются, что согласуется с данными работы [12]. Это в определенной степени подтверждает правильность работы предложенного алгоритма, а также разработанного программного обеспечения.

Одним из преимуществ системы POLE-RL является возможность в рамках одной программы исследовать сходимость решения, увеличивая степень аппроксимирующих полиномов и изменяя число узлов интегрирования. В табл. 4 показана практическая сходимость значений безразмерного частотного параметра при увеличении степени аппроксимирующих полиномов для четырехслойной сферической оболочки (рис. 1,б). В данном случае угол поворота главных направлений относительно системы координат равен  $45^\circ$ .

Интерфейс системы POLE-RL позволяет рассматривать формы колебаний исследуемых объектов. В табл. 5 приведены формы колебаний четырехслойной пластины, сферической и цилиндрической оболочек (рис. 1,б), соответствующие первым четырем значениям безразмерного параметра. Геометрические параметры оболочек следующие:  $a/b = 1, b/h = 100, c/b = 0,2, d/b = 0,2, r/b = 0,2$ , угол поворота  $\theta = 30^\circ$ .















Т а б л и ц а 4

Исследование сходимости безразмерного частотного параметра для четырехслойной сферической оболочки из стеклопластика при различных значениях степени аппроксимирующих полиномов ( $a/b = 1$ ,  $b/h = 100$ ,  $c/b = 0,2$ ,  $d/b = 0,2$ ,  $r/b = 0,2$ )

$n$	$\Lambda_1$	$\Lambda_2$	$\Lambda_3$	$\Lambda_4$	$\Lambda_5$
8	3,1123	3,8522	8,0819	10,3899	13,1331
10	3,0233	3,7949	7,7233	10,0917	12,5063
11	2,9802	3,7719	7,6024	9,9428	12,3256

Т а б л и ц а 5

Формы колебаний четырехслойной пластины, цилиндрической и сферической оболочек из стеклопластика ( $a/b = 1$ ,  $b/h = 100$ ,  $c/b = 0,2$ ,  $d/b = 0,2$ ,  $r/b = 0,2$ )

Пластина			
			
$\Lambda_1=1,6034$	$\Lambda_2=2,7087$	$\Lambda_3=6,4963$	$\Lambda_4=9,2883$
Цилиндрическая оболочка			
			
$\Lambda_1=3,5802$	$\Lambda_2=4,6236$	$\Lambda_3=10,0525$	$\Lambda_4=13,1334$
Сферическая оболочка			
			
$\Lambda_1=3,1145$	$\Lambda_2=4,1313$	$\Lambda_3=7,7511$	$\Lambda_4=10,8905$

Для проверки достоверности разработанного алгоритма и соответствующего программного обеспечения полученные результаты сравнивали с приведенными в литературных источниках.

*Пример 3.* Рассмотрим консольную многослойную пологую оболочку с прямоугольным планом (рис. 2). Полагаем, что механические свойства материала и геометрические параметры те же, что и в примерах 1, 2. Тести-

рование разработанного подхода выполнено на примерах трех- и четырех-слойных пологих оболочек и пластин, изготовленных из стеклопластика. При этом была исследована зависимость частотного параметра от формулы укладки слоев. Для трехслойных оболочек (рис. 2), слои которых располагаются ортогонально относительно друг друга, в табл. 6 полученные значения сравниваются с результатами работы [12]. Здесь и далее расчет проводился при 45 координатных функциях для  $U, V, W$ .

Т а б л и ц а 6

Значения безразмерного частотного параметра для ортогонально армированных трехслойных оболочек и пластин из стеклопластика ( $a/b = 1, b/h = 100$ )

$b/R_y$	$R_y/R_x$	$\Lambda_1$	$\Lambda_2$	$\Lambda_3$	$\Lambda_4$	$\Lambda_5$	$\Lambda_6$
$\theta = 0, 90, 0^\circ$							
$k_1 = k_2 = 0$		1,0587	2,0437	5,3786	6,7819	8,1294	12,7628
		1,0123*	2,0070*	5,4500*	6,3748*	7,9377*	12,3070*
0,1	0	1,4524	2,0694	5,4707	7,4504	8,2611	12,9575
		1,4200*	2,0334*	5,4966*	7,2161*	8,0785*	12,5280*
	1	1,3404	2,0650	5,7787	7,7569	8,1659	13,8563
		1,3241*	2,0316*	5,8926*	7,5800*	8,0316*	13,8400*
$\theta = 90, 0, 90^\circ$							
$k_1 = k_2 = 0$		0,6834	1,8087	4,0051	5,5445	6,3801	11,3750
		0,6709*	1,7932*	4,1931*	6,3675*	7,2119*	11,7510*
0,1	0	1,1119	1,8390	4,7147	5,8486	6,5196	11,6310
		1,1197*	1,8202*	5,3911*	6,5132*	7,2565*	12,3680*
	1	0,9849	1,8315	4,2565	6,4428	6,6358	12,6200
		1,0399*	1,8195*	4,9310*	6,4997	8,1783*	12,9140*

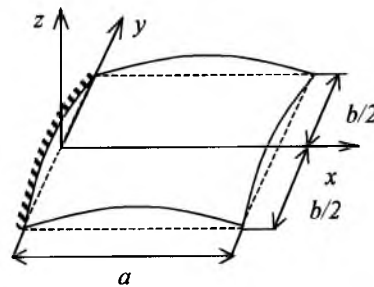


Рис. 2. Консольная пологая оболочка с прямоугольным планом.

Для четырехслойных пологих оболочек (цилиндрической и сферической) и пластины проведено сравнение результатов расчета безразмерного частотного параметра  $\Lambda$  с помощью метода  $R$ -функций с данными работы [12] при изменении угла поворота  $\theta$  главных направлений относительно системы координат от  $0$  до  $90^\circ$ . Формула укладки слоев принималась такая же, как и в примере 1. В табл. 7 представлены значения  $\Lambda$  при  $\theta = 45^\circ$  (рис. 2). При этом различие полученных расчетных значений не превышает 6%.

Т а б л и ц а 7

Значения безразмерного частотного параметра  $\Lambda$  для четырехслойных оболочек и пластин из стеклопластика при  $\theta = 45^\circ$  ( $a/b = 1$ ,  $b/h = 100$ )

$b/R_y$	$R_y/R_x$	$\Lambda_1$	$\Lambda_2$	$\Lambda_3$	$\Lambda_4$	$\Lambda_5$
0,5	0	2,5237 2,5440*	3,8697 3,7873*	6,7885 7,0457*	9,9707 9,9972*	11,0218 11,0170*
	1	2,0233 2,0863*	2,4155 2,4897*	6,7685 7,1457*	8,0765 8,3019*	11,5965 11,9950*
$k_1 = k_2 = 0$		0,8300 0,7674*	2,0569 2,1339*	4,8134 4,7375*	6,0735 6,1811*	7,5531 7,6231*

**Заключение.** Сравнение полученных с помощью метода  $R$ -функций результатов с приведенными в [12] свидетельствует о достоверности и эффективности предложенного метода и соответствующего ему программного обеспечения. Последнее позволяет проводить исследование и расчеты для многослойных пологих оболочек и пластин, в том числе изготовленных из композиционного материала, имеющих произвольную форму в плане, различные способы закрепления и количество слоев.

## Резюме

Запропоновано алгоритм розв'язання задачі про вільні коливання багатошарових оболонок і пластин, в основу якого покладено варіаційні методи та теорію  $R$ -функцій. На базі цього алгоритму розв'язано задачі для пологих оболонок (сферичних і циліндричних), а також пластин складної форми в плані. Наведено результати дослідження залежності власних частот коливань пологих оболонок і пластин із різною кількістю шарів від кута повороту головних напрямків кожного шару.

1. Григолюк Э. И., Коган Ф. А. Современное состояние теории многослойных оболочек // Прикл. механика. – 1972. – 8, № 6. – С. 3 – 17.
2. Дудченко А. А., Лурьев С. А., Образцов И. Ф. Анизотропные многослойные пластины и оболочки. – М.: ВИНТИ, 1983. – С. 3 – 68.
3. Амбарцумян С. А. Общая теория анизотропных оболочек. – М.: Наука, 1974. – 448 с.
4. Болотин В. В., Новичков Ю. Н. Механика многослойных конструкций. – М.: Машиностроение, 1980. – 376 с.
5. Рассказов А. О., Соколовская И. И., Шульга Н. А. Теория и расчет слоистых ортотропных пластин и оболочек. – Киев: Вища шк., 1986. – 191 с.
6. Пискунов В. Г., Вериженко В. Е. Линейные и нелинейные задачи расчета слоистых конструкций. – Киев: Будівельник, 1986. – 176 с.
7. Вериженко В. Е., Пискунов В. Г., Присяжнюк В. К., Табаков П. Я. Уточненная динамическая теория многослойных оболочек и пластин. Сообщ. 2. Система разрешающих уравнений и результаты // Пробл. прочности. – № 6. – С. 61 – 69.

8. *Bhimaraddi A.* Free vibration analysis of doubly curved shallow shells on rectangular planform using three-dimensional elasticity theory // *Int. J. Sol. Struct.* – 1991. – **27**, No. 7. – P. 897 – 913.
9. *Власов В. З.* Общая теория оболочек и ее приложения в технике. – Л.: Гостехтеоретиздат, 1949. – 784 с.
10. *Механика композитов:* В 12 т. / Под. общ. ред. А. Н. Гузя. – Киев: Наук. думка, 1993. – Т. 8. – 379 с.
11. *Рвачев В. Л., Курна Л. В.* R-функции в задачах теории пластин. – Киев: Наук. думка, 1987. – 176 с.
12. *Qatu M. S. and Leissa A. W.* Natural frequencies for cantilevered doubly-curved laminated composite shallow shells // *Composite Structures* 0263-8223. – Elsevier Science Publishers Ltd, 1991.

Поступила 01. 03. 2002