

УДК 532.592

ФОРМИ ВІЛЬНОЇ ПОВЕРХНІ ТА УМОВИ ІСНУВАННЯ ГІДРОДИНАМІЧНОГО СОЛІТОНУ, САМОТНЬОЇ, ОДИНОЧНОЇ І КНОЇДАЛЬНИХ ХВИЛЬ

О. А. РЯБЕНКО

Національний університет водного господарства та природокористування, Рівне

Одержано 24.09.2006

У відповідності з отриманими розв'язками узагальненого диференціального рівняння профілю вільної поверхні хвилеподібних білякритичних течій для різних значень квадрата модуля еліптичних функцій Якобі визначено обриси вільної поверхні та умови існування різних типів розглядуваних течій, причому ці умови виражені через характеристики потоку в початковому перерізі досліджуваних явищ. Визначено умови існування рухомих кноїдальних хвиль та критерії ідентифікації самотньої та різних типів одиночних хвиль. Описано вплив граничних і початкових умов на існування білякритичних течій.

В соответствии с полученными решениями обобщенного дифференциального уравнения профиля свободной поверхности волнообразных околокритических течений для разных значений квадрата модуля эллиптических функций Якоби определены очертания свободной поверхности и условия существования разных типов рассматриваемых течений, причем эти условия выражены через характеристики потока в начальном сечении рассматриваемых явлений. Определены условия существования перемещающихся кноидальных волн и критерии идентификации уединенной и разных типов одиночных волн. Описано влияние граничных и начальных условий на существование околокритических течений.

In correspondence with the obtained solutions for the generalised differential equation of the profile of free surface of wavelike near-critical flows for various values of the square of the module of elliptical Jacobi functions we determined outlines of free surface and conditions for existing various types of flows discussed, these conditions being expressed via flow characteristics in the initial intersection of phenomena studied. Conditions are determined of existing movable cnoidal waves and criteria of identifying solitary and various types of single waves. The influence is described of limiting and initial conditions on the existence of nearcritical flows.

ВСТУП

Експериментальні і теоретичні дослідження безнапірних потоків рідини виявляють існування особливого класу білякритичних течій, які якісно відрізняються від звичайних спокійних і бурхливих потоків з плавно- та повільнозмінним рухом. Диференціальні рівняння Кортвега–де Фріса, Серра, Сміслова профілю вільної поверхні таких течій та отримані розв'язки цих рівнянь в явному вигляді не розкривають усі характеристики потоку в початковому перерізі розглядуваних явищ [1]. Характерно, що відомі залежності профілю вільної поверхні таких білякритичних течій, як кноїдальні та самотня хвилі виражені через максимальну і мінімальну глибини цих хвиль, хоча в більшості реальних задач гідротехнічної практики максимальна глибина апріорі невідома, а визначення цієї глибини є однією з головних задач виконуваних розрахунків.

Традиційно вважається, що всі безнапірні потоки рідини, в тому числі і білякритичні течії, однозначно описуються числом Фруда, яке складають за характерними параметрами розглядуваних явищ і часто відносять до їхнього початкового перерізу. Разом з цим при вивченні білякритичних

течій було виявлено низку суперечностей і парадоксів [2], суть яких не можна пояснити на основі гіпотези про однозначність описання білякритичних течій лише одним параметром – їхнім характерним числом Фруда. Проведеними дослідженнями було встановлено, що для однозначного описання білякритичних течій в додаток до числа Фруда в їхньому початковому перерізі необхідно враховувати ще й ступінь викривлення елементарних струминок у вертикальній площині (іншими словами, ступінь відхилення від гідростатичного закону розподілу тиску по глибині) в тому самому перерізі потоку. В роботах [1, 2] побудована математична модель хвилеподібних білякритичних течій, виведено узагальнене диференціальне рівняння профілю їхньої вільної поверхні та отримані відповідні розв'язки. Характерною особливістю згаданих математичної моделі, диференціальних рівнянь та їхніх розв'язків є те, що в них у явному вигляді враховано можливе викривлення елементарних струминок у вертикальній площині в початковому перерізі розглядуваних явищ.

Необхідно зауважити, що форми вільної поверхні та умови існування різних типів білякритичних течій у відомих залежностях не можна признати повністю описаними, адже вони не враховують

весь комплекс необхідних для цього характеристик потоку в початковому перерізі розглядуваних явищ. Крім того, виявлені ще не всі частинні розв'язки відомого диференціального рівняння Кертевега–де Фріса, які можна отримати при екстремальних значеннях квадрата еліптичних функцій Якобі, використовуваних для описання кноїдальних хвиль.

Експериментальні дослідження виявляють ряд різних типів одиночних хвиль, що певним чином відрізняються між собою. Це вимагає встановлення чітких критеріїв ідентифікації кожного типу цих хвиль, а особливо нерухомої і рухомої самотньої хвилі, які є яскравим прикладом гідродинамічного солітону.

Мета даної роботи полягає в наступному:

- визначити обриси кривої вільної поверхні та умови існування різних типів хвилеподібних білякритичних течій на основі узагальненого диференціального рівняння профілю вільної поверхні цих течій в межах всього діапазону існування квадрата еліптичних функцій Якобі;

- однозначно описати профіль вільної поверхні різних типів білякритичних течій та умови їх існування для різних значень квадрата еліптичних функцій Якобі в залежності від визначальних характеристик потоку в початковому перерізі розглядуваних явищ;

- визначити вплив граничних і початкових умов на існування різних типів білякритичних течій;

- сформулювати критерії ідентифікації різних типів одиночних хвиль, у тому числі і тих, які можна віднести до категорії гідродинамічних солітонів;

- визначити умови існування рухомих стаціонарних кноїдальних хвиль.

1. РОЗВ'ЯЗКИ УЗАГАЛЬНЕНОГО ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО РІВНЯННЯ ПРОФІЛЮ ВІЛЬНОЇ ПОВЕРХНІ БІЛЯКРИТИЧНИХ ТЕЧІЙ

1.1. Узагальнене диференціальне рівняння профілю вільної поверхні білякритичних течій

Клас білякритичних течій з гладкою поверхнею можна описати узагальненим диференціальним рівнянням профілю вільної поверхні цих течій, записаним в розмірній (1) та безрозмірній (2) формах:

$$\left(\frac{dh}{dx}\right)^2 = \frac{3g}{q^2} \left\{ -h^3 + \left(2\beta_1 h_1 + \frac{q^2}{gh_1^2}\right) h^2 - \right.$$

$$\left. - \left[(2\beta_1 - 1) h_1^2 + \frac{2q^2}{gh_1} \right] h + \frac{q^2}{g} \right\}, \quad (1)$$

$$\left(\frac{dh}{dx}\right)^2 = \frac{3}{Fr_1} \left[-\left(\frac{h}{h_1}\right)^3 + (2\beta_1 + Fr_1) \left(\frac{h}{h_1}\right)^2 - (2\beta_1 - 1 + 2Fr_1) \frac{h}{h_1} + Fr_1 \right]. \quad (2)$$

де h та x – біжучі координати довільної точки вільної поверхні потоку; q – питома витрата; g – прискорення вільного падіння; $Fr_1 = V_1^2/gh_1$ – число Фруда в початковому перерізі нерухомих явищ; V_1 – швидкість потоку в тому ж перерізі цих явищ; $Fr_1 = c_1^2/gh_1$ – число Фруда в початковому перерізі хвиль переміщення; c – швидкість руху цих хвиль; h_1 та β_1 – відповідно глибина та коефіцієнт потенціальної енергії в початковому перерізі білякритичних течій.

Диференціальні рівняння (1) і (2) були виведені для плоских умов на основі відповідної математичної моделі білякритичних течій і враховують можливе викривлення елементарних струминок у вертикальній площині в початковому перерізі розглядуваних течій [1, 2]. Загальний розв'язок диференціальних рівнянь (1) і (2), описаний в роботах [1, 2], можна виразити у вигляді наступної системи рівнянь:

$$\left. \begin{aligned} \eta &= \frac{h}{h_1} = 1 + (\eta_b - 1) \operatorname{cn}^2\left(\frac{x}{\Delta}, k\right), \\ \Delta &= 2h_1 \sqrt{\frac{\eta_b Fr_1}{3(\eta_b^2 - Fr_1)}}, \\ k &= \sqrt{\frac{\eta_b(\eta_b - 1)}{\eta_b^2 - Fr_1}}, \\ \eta_b &= \frac{1}{2} \left[\frac{4s_1 - 1}{3} + Fr_1 + \sqrt{\left(\frac{4s_1 - 1}{3} + Fr_1\right)^2 - 4Fr_1} \right], \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

де $\eta_b = h_b/h_1$ – відношення максимальної глибини h_b білякритичних течій (яка у випадку гладкої хвилястої поверхні звичайно формується під вершиною першої за рахунком хвилі) до початкової глибини h_1 цих течій; s_1 – коефіцієнт негідростатичності в початковому перерізі розглядуваних течій.

Відмітними рисами загального розв'язку (3), так само як і диференціальних рівнянь (1) і (2), є такі:

1) профіль вільної поверхні однозначно виражений через параметри потоку в початковому перерізі білякритичних течій ($Fr_1, h_1, s_1, k_1, \beta_1$);

2) через коефіцієнт негідростатичності s_1 або інші пов'язані з ним коефіцієнти k_1 та β_1 враховано можливе викривлення потоку в початковому перерізі цих течій.

1.2. Оцінка ступеню викривлення потоку у вертикальній площині

Візуалізація і виділення в реальному потоці множини елементарних струминок та вимірювання для кожної із них параметрів їх викривлення у вертикальній площині – нахилу та кривизни – при сучасному рівні розвитку вимірювальної техніки є практично неможливими. Зауважимо, що проблема вимірювання ступеню нахилу та кривизни не вирішена з достатньою точністю навіть стосовно доступної для спостережень і вимірювань найвищої елементарної струминки – кривої вільної поверхні потоку.

Враховуючи тісний взаємозв'язок між викривленням у вертикальній площині довільної елементарної струминки, що проходить через деяку точку потоку, та гідродинамічним тиском у цій точці на практиці широко застосовують спосіб оцінки ступеня згадуваного викривлення елементарних струминок, оснований на вивченні розподілу гідродинамічного тиску по глибині у вибраному перерізі потоку. Тут доречно підкреслити, що існуючі методики вимірювання гідродинамічного тиску добре опрацьовані і вважаються досить надійними.

Вивченням розподілу гідродинамічного тиску по глибині в різних перерізах потоку з хвилястою поверхнею займалися Б. О. Бахметев, Г. Й. Сухомел, В. В. Смирнов, І. Л. Розовський, Ф. Серр, А. Кафагі, С. З. Хаммад, А. І. Модзалевський та ін. Проведені дослідження [3–5] показали, що у випуклих і ввігнутих потоках у перерізах, проведених через вершини та підшви хвиль, спостерігається близький до параболічного закон розподілу гідродинамічного тиску по глибині. При наявності відомого закону розподілу гідродинамічного тиску по глибині виникає можливість здійснення оцінки ступеня викривлення потоку у вертикальній площині в даному перерізі на основі вимірювання лише двох параметрів потоку в цьому перерізі – глибини h та п'єзометричного тиску на дні h_{nd} , вираженого у висоті водного стовпа. Останній параметр можна безпосередньо виміряти за допомогою донного п'єзометра, встановленого в потрібному місці експериментальної установки. При

проведенні обширних експериментів із змінними характеристиками потоку для умов плоскої задачі використовують систему донних п'єзометрів, розміщених з певним кроком по осі установки [1].

В теоретичних і експериментальних дослідженнях потоків, викривлених у вертикальній площині, ступінь відхилення від гідростатики у довільному перерізі з параметрами h та h_{nd} зручно оцінювати за допомогою таких трьох коефіцієнтів: негідростатичності $s = h_{nd}/h$, гідродинамічного тиску $k = F_{ездm}/F_{ездcm}$ та потенціальної енергії $\beta = E_{nom}/h$, де h_{nd} – значення п'єзометричного тиску на дні, виражене у висоті водного стовпа, $F_{ездm}$ та $F_{ездcm}$ – площі епюр відповідно гідродинамічного та гідростатичного тиску, E_{nom} – питома потенціальна енергія. У випадку параболічного закону розподілу гідродинамічного тиску по глибині вказані коефіцієнти зв'язані між собою такими залежностями [1, 2]:

$$\beta = \frac{1+2s}{3}, \quad k = \frac{4s-1}{3}, \quad \beta = \frac{1+k}{2}, \quad (4)$$

причому для гідростатичного розподілу тиску по глибині коефіцієнти s, k, β дорівнюють одиниці.

1.3. Характеристика умов існування розв'язків узагальненого диференціального рівняння (1)

Математичні умови існування розв'язків узагальненого диференціального рівняння кривої вільної поверхні білякритичних течій, записаного у розмірній (1) чи безрозмірній формі (3), визначаються межами існування квадрата модуля k^2 еліптичних функцій Якобі [6, 7]:

$$0 \leq k^2 \leq 1, \quad (5)$$

що входить у загальний розв'язок цього рівняння – систему (3). Реальні проблеми водогосподарської практики, пов'язані із застосуванням розв'язків диференціального рівняння (1), роблять актуальним питання про більш повне розкриття умови (5) із вираженням її через гідравлічні характеристики потоку в початковому перерізі розглядуваних явищ. Для вирішення цього питання необхідно скористатися рівняннями

$$k = \sqrt{\frac{\eta_B(\eta_B - 1)}{\eta_B^2 - Fr_1}}, \quad (6)$$

$$\eta_B = \frac{1}{2} \left[\frac{4s_1 - 1}{3} + Fr_1 + \sqrt{\left(\frac{4s_1 - 1}{3} + Fr_1 \right)^2 - 4Fr_1} \right], \quad (7)$$

які входять у систему (3).

У відповідності з виразом (5) умови існування розв'язків системи рівнянь (3) проаналізуємо для таких значень квадрата модуля k^2 еліптичних функцій Якобі:

$$k^2 = 0, \quad (8)$$

$$k^2 = 1, \quad (9)$$

$$0 < k^2 < 1. \quad (10)$$

1.4. Частинний випадок при $k^2 = 0$

На основі виразів (6) і (8) можна записати

$$\frac{\eta_B (\eta_B - 1)}{\eta_B^2 - Fr_1} = 0.$$

Ця рівність виконується за умови, що чисельник дорівнює нулю, тобто

$$\eta_B (\eta_B - 1) = 0.$$

Враховуючи, що $\eta_B \neq 0$, отримуємо наступний розв'язок:

$$\eta_B = 1. \quad (11)$$

Визначимо тепер ступінь негідростатичності в початковому перерізі розглядуваних явищ для даного випадку. З цією метою підставимо вираз (11) у формулу (7):

$$\sqrt{\left(\frac{4s_1 - 1}{3} + Fr_1\right)^2 - 4Fr_1} = 2 - \frac{4s_1 - 1}{3} - Fr_1.$$

Піднісши до квадрату обидві частини цієї рівності, після певних перетворень отримуємо наступну умову:

$$s_1 = 1. \quad (12)$$

Обриси профілю вільної поверхні потоку визначимо на основі залежностей

$$\eta = \frac{h}{h_1} = 1 + (\eta_B - 1) \operatorname{cn}\left(\frac{x}{\Delta}, k\right), \quad (13)$$

$$\Delta = 2h_1 \sqrt{\frac{\eta_B Fr_1}{3(\eta_B^2 - Fr_1)}}, \quad (14)$$

взятих із системи (3). Як відомо [6, 7], еліптична функція Якобі амплітуди косинуса при модулі $k = 0$ вироджується в звичайну тригонометричну функцію косинуса:

$$\operatorname{cn}\left(\frac{x}{\Delta}, 0\right) = \cos\left(\frac{x}{\Delta}\right). \quad (15)$$

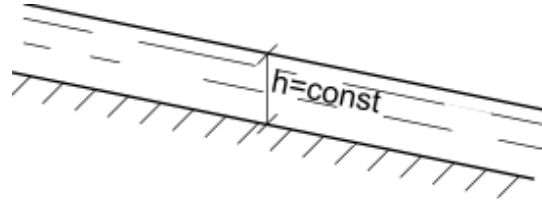


Рис. 1. Рівномірний потік при $k^2 = 0$

З врахуванням виразів (14), (11) і (15) із залежності (13) отримуємо:

$$\eta = 1 + (1 - 1) \cos^2\left(\frac{x}{2h_1} \sqrt{\frac{3(1 - Fr_1)}{Fr_1}}\right) = 1. \quad (16)$$

На основі отриманих залежностей (11), (12) і (16) можна зробити висновок, що у випадку виконання умови (8) загальний розв'язок диференціального рівняння (1) у вигляді системи (3) зводиться до усталеного рівномірного потоку з постійною глибиною

$$h = \text{const} \quad (17)$$

(див. рис. 1) та гідростатичним розподілом тиску по глибині у будь-якому перерізі.

Тут необхідно підкреслити, що вирази (12) і (17) не мають ніяких обмежень по числу Фруда Fr_1 , тобто даний розв'язок справедливий для усталеного руху при

$$Fr_1 \lesseqgtr 1, \quad (18)$$

що відповідає потокам у спокійному, критичному і бурхливому станах. Умова (18) для усталених у часі потоків рівнозначна наступній умові:

$$h \lesseqgtr h_{\kappa},$$

вираженій через критичну глибину h_{κ} . Зазначимо, що випадок усталеного рівномірного потоку з глибиною $h = h_{\kappa} = \text{const}$ та відповідно з числом Фруда $Fr_1 = 1$ і гідростатичним розподілом тиску по глибині в будь-якому перерізі описаний в [8].

Таким чином, існування усталеного рівномірного потоку з постійною глибиною $h = \text{const}$ вимагає виконання трьох умов (8), (12), (18):

$$k^2 = 0,$$

$$s_1 = 1,$$

$$Fr_1 \lesseqgtr 1.$$

1.5. Частинний випадок при $k^2 = 1$

На основі залежностей (6) і (9) можна записати:

$$\frac{\eta_B(\eta_B - 1)}{\eta_B^2 - Fr_1} = 1$$

або

$$\eta_B(\eta_B - 1) = \eta_B^2 - Fr_1,$$

звідки витікає такий розв'язок:

$$\eta_B = Fr_1. \tag{19}$$

Для визначення ступеня негідростатичності у початковому перерізі білякритичних течій стосовно випадку $k^2 = 1$ підставимо залежність (19) у формулу (7):

$$\sqrt{\left(\frac{4s_1 - 1}{3} + Fr_1\right)^2 - 4Fr_1} = Fr_1 - \frac{4s_1 - 1}{3}.$$

Піднісни до квадрату обидві частини цієї рівності і зробивши необхідні перетворення, отримаємо такий вираз:

$$Fr_1 \left(\frac{4s_1 - 1}{3} - 1\right) = 0.$$

На основі цієї залежності, враховуючи, що $Fr_1 \neq 0$, отримаємо умову (12):

$$s_1 = 1,$$

тобто при значенні квадрата модуля еліптичних функцій Якобі $k^2 = 1$ (так само, як і при $k^2 = 0$) в початковому перерізі розглядуваних явищ повинен бути гідростатичний закон розподілу тиску по глибині потоку.

Проте в даному випадку, на відміну від попереднього, відношення η_B у відповідності з формулою (19) залежить від числа Фруда Fr_1 . Як було показано в [1, 2], інтегрування диференціального рівняння (1), а також розв'язок системи (3) за умови (12) дають відому формулу профілю вільної поверхні самотньої хвилі (див. рис. 2):

$$\eta = \frac{h}{h_1} = 1 + (Fr_1 - 1)sch^2 \left[\sqrt{\frac{3(Fr_1 - 1)}{Fr_1} \frac{x}{2h_1}} \right]. \tag{20}$$

При цьому було показано, що для існування самотньої хвилі, крім умови (12), повинна виконуватись ще й наступна додаткова умова [1, 2]:

$$Fr_1 > 1. \tag{21}$$

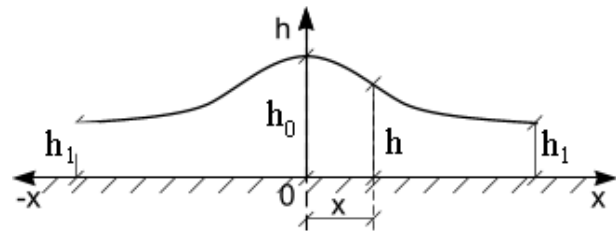


Рис. 2. Схема самотньої хвилі

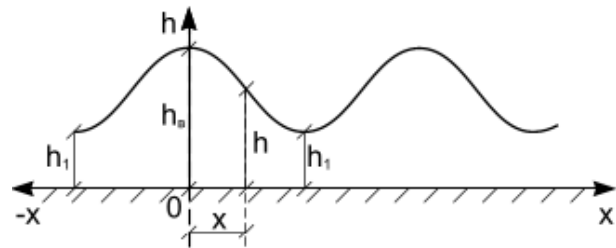


Рис. 3. Схема кноїдальних хвиль

Таким чином, існування самотньої хвилі, яка описується залежністю (20), вимагає виконання умов (9), (12), (21):

$$k^2 = 1,$$

$$s_1 = 1,$$

$$Fr_1 > 1.$$

1.6. Загальний випадок при $0 < k^2 < 1$

З'ясувавши фізичний зміст та умови існування частинних випадків (при $k^2 = 0$ та $k^2 = 1$) загального розв'язку диференціального рівняння (1) у вигляді системи (3), тепер ми можемо визначити умови існування кноїдальних хвиль (див. рис. 3), описуваних системою рівнянь (3), як загального розв'язку диференціального рівняння (1) при квадраті модуля еліптичних функцій Якобі $0 < k^2 < 1$. Загальну для даного випадку умову (10) можна замінити наступною системою:

$$k^2 > 0, \tag{22}$$

$$k^2 < 1. \tag{23}$$

Для випадку $k^2 > 0$ на основі залежностей (6) і (22) можна записати таку нерівність

$$\frac{\eta_B(\eta_B - 1)}{\eta_B^2 - Fr_1} > 0. \tag{24}$$

Із умов поставленої задачі витікає

$$\eta_{\text{в}} > 1. \quad (25)$$

Звідси можна зробити висновок, що чисельник нерівності (24) є додатним. Тоді і знаменник виразу (24) також повинен бути додатним:

$$\eta_{\text{в}}^2 - Fr_1 > 0$$

або

$$\eta_{\text{в}} > \sqrt{Fr_1}.$$

Підставивши в це співвідношення значення $\eta_{\text{в}}$ із формули (7), отримуємо

$$\begin{aligned} & \sqrt{\left(\frac{4s_1 - 1}{3} + Fr_1\right)^2 - 4Fr_1} > \\ & > 2\sqrt{Fr_1} \left(\frac{4s_1 - 1}{3} + Fr_1\right). \end{aligned} \quad (26)$$

Розв'язок ірраціональних нерівностей типу (26) залежить від знаку їх правої частини. Аналіз правої частини виразу (26) показує, що для білякритичних течій при $Fr_1 = 0.3 \div 4.0$ та $s_1 \geq 1.0$ вона завжди від'ємна. В цьому випадку нерівність (26), у відповідності з [9], можна замінити наступною тотожною системою:

$$\begin{cases} 2\sqrt{Fr_1} - \left(\frac{4s_1 - 1}{3} + Fr_1\right) < 0, \\ \left(\frac{4s_1 - 1}{3} + Fr_1\right)^2 - 4Fr_1 \geq 0. \end{cases}$$

Загальним розв'язком цієї системи є наступна умова

$$\frac{4s_1 - 1}{3} \geq \sqrt{Fr_1} (2 - \sqrt{Fr_1}). \quad (27)$$

Для випадку $k^2 < 1$ із виразів (6) і (23) витікає:

$$\frac{\eta_{\text{в}} (\eta_{\text{в}} - 1)}{\eta_{\text{в}}^2 - Fr_1} < 1. \quad (28)$$

Проведений аналіз показує, що і чисельник, і знаменник лівої частини нерівності (28) є додатними у всьому діапазоні умов існування білякритичних течій. В такому випадку співвідношення (28) можна переписати таким чином:

$$\eta_{\text{в}}^2 - \eta_{\text{в}} < \eta_{\text{в}}^2 - Fr_1,$$

звідки отримуємо таку умову:

$$\eta_{\text{в}} > Fr_1. \quad (29)$$

Із структури формули (7) витікає, що вираз (29) вимагає виконання наступної умови:

$$s_1 > 1. \quad (30)$$

Особливо наочно цей висновок ілюструє показаний на рис. 4 графік $\eta_{\text{в}} = f(Fr_1, s_1)$, побудований за формулою (7).

Розв'язок системи нерівностей (22) і (23). На основі отриманих у даному пункті результатів систему нерівностей (22) і (23) можна замінити такою системою:

$$\begin{cases} \frac{4s_1 - 1}{3} \geq 2\sqrt{Fr_1} - Fr_1, \\ s_1 > 1. \end{cases}$$

Умову (27) можна переписати таким чином:

$$\frac{4s_1 - 1}{3} = k_1 \geq k_1^{\min} = 2\sqrt{Fr_1} - Fr_1.$$

Проведений аналіз показує, що в області існування білякритичних течій, яку можна охарактеризувати числами Фруда $Fr_1 = 0.3 \div 4.0$ [10], права частина нерівності (27), тобто мінімальне значення коефіцієнта гідродинамічного тиску в початковому перерізі розглядуваних течій, буде

$$k_1^{\min} \leq 1.$$

Випадок $k_1 < 1$ суперечить математичній моделі хвилеподібних білякритичних течій, описаній в [2], оскільки вимагає, щоб у початковому перерізі розглядуваних явищ потік був ввігнутий (тобто $d^2h/dx^2 < 0$), тоді як у дійсності у зазначеному перерізі друга похідна $d^2h/dx^2 \geq 0$. Враховуючи цю обставину, умову (27) можна переписати таким чином:

$$k_1 = \frac{4s_1 - 1}{3} \geq 1$$

або через коефіцієнт негідростатичності

$$s_1 \geq 1. \quad (31)$$

Проаналізуємо більш детально можливі випадки виконання умови $s_1 = 1$ для різних значень числа Фруда Fr_1 стосовно розв'язку (3) при квадраті модуля еліптичних функцій Якобі $k^2 < 1$. Як видно із структури формули (7) (див. рис. 4) реалізація умови $s_1 = 1$ при $Fr_1 < 1$ фізично неможлива. Випадок $s_1 = 1$ при $Fr_1 > 1$ відповідає формуванню самотньої хвилі (див. п. 1.5). У випадку $s_1 = 1$ та $Fr_1 = 1$ утворюється рівномірний потік з постійною глибиною $h = h_{\kappa} = \text{const}$ та гідростатичним розподілом тиску по глибині в будь-якому перерізі (див. п. 1.4).

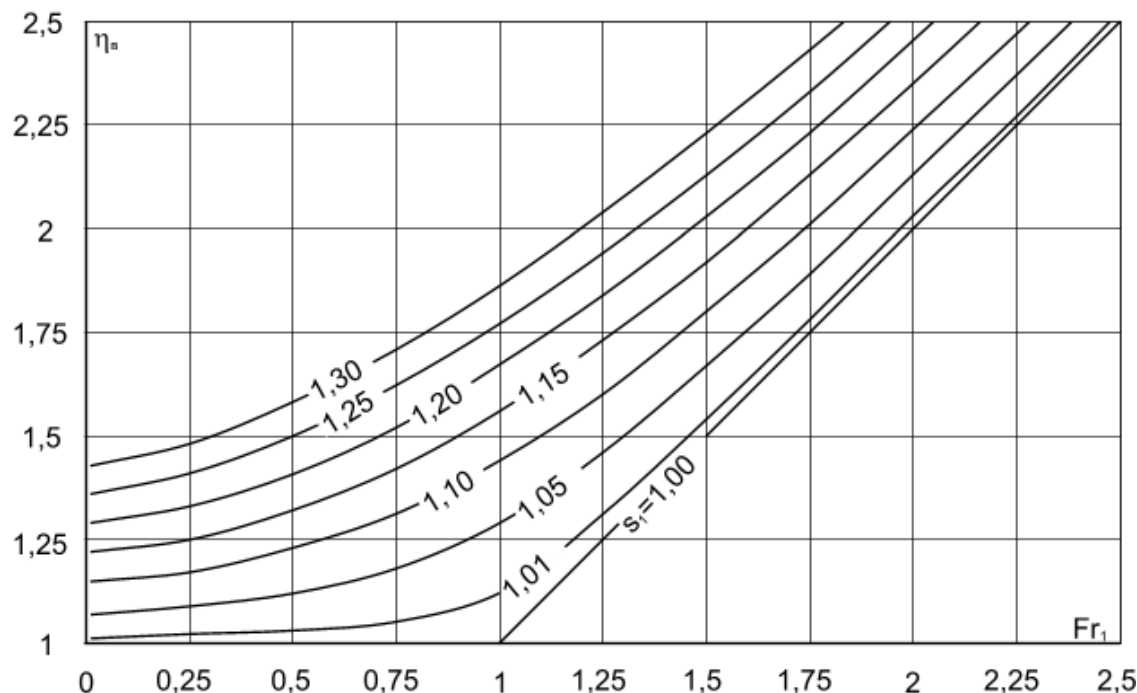


Рис. 4. Графік $\eta_v = f(\text{Fr}_1, s_1)$ за формулою (7): пряма при $s_1 = 1$ відповідає формулі $\eta_v = \text{Fr}_1$

Отже в даному випадку вимога $s_1 = 1$ відповідає, внаслідок чого умова (27) зводиться до вигляду $s_1 > 1$, що є загальним розв'язком системи нерівностей (27) і (30), значить для існування кноїдальних хвиль, описуваних системою рівнянь (3), при $0 < k^2 < 1$ є умова (30).

Дуже важливо підкреслити, що ця умова не має ніяких обмежень стосовно числа Фруда Fr_1 в початковому перерізі розглядуваного явища. Щоб переконатися в цьому, скористаємось нерівністю (29). Підставивши в цей вираз значення η_v , визначене за формулою (7), отримаємо:

$$\sqrt{\left(\frac{4s_1 - 1}{3} + \text{Fr}_1\right)^2 - 4\text{Fr}_1} > \text{Fr}_1 - \frac{4s_1 - 1}{3}. \quad (32)$$

Розв'язок даної нерівності залежить від знаку її правої частини, який визначається співвідношенням між числом Фруда Fr_1 та коефіцієнтом гідродинамічного тиску $k_1 = (4s_1 - 1)/3$ у початковому перерізі кноїдальних хвиль.

Число Фруда Fr_1 для нерухомих і рухомих білякритичних явищ виражається відповідно такими залежностями, наведеними в п. 1.1.:

$$\text{Fr}_1 = \frac{V_1^2}{gh_1}, \quad (33)$$

$$\text{Fr}_1 = \frac{c^2}{gh_1}. \quad (34)$$

У відповідності із [8, 11] перепишемо ці вирази з врахуванням коефіцієнта кінетичної енергії α_1 в початковому перерізі розглядуваних явищ:

$$\text{Fr}_1^* = \frac{\alpha_1 V_1^2}{gh_1}, \quad (35)$$

$$\text{Fr}_1^* = \frac{\alpha_1 c^2}{gh_1}. \quad (36)$$

Коефіцієнт гідродинамічного тиску k_1 в початковому перерізі кноїдальних хвиль змінюється у відносно вузьких межах. Проведені експериментальні дослідження [12 – 15] показують, що для білякритичних течій з гладкою хвилястою поверхнею коефіцієнт негідростатичності $s_1 = 1.0 \div 1.07$, що відповідає значенням коефіцієнта гідродинамічного тиску $k_1 = 1.0 \div 1.09$. Для безнапірних потоків із звичайним рівнем турбулентності приблизно в таких же межах знаходиться і коефіцієнт кінетичної енергії α_1 [8, 11]. Якщо зневажити різницю в значеннях коефіцієнтів α_1 та k_1 , то для встановлення знаку правої частини нерівності (32) можна порівнювати число Фруда Fr_1 з одиницею.

З гідравлічної точки зору цей висновок є надзвичайно важливим, оскільки саме значення чис-

ла Фруда $Fr_1 = 1$ є граничним, що поділяє потоки на спокійні, критичні і бурхливі [8, 11]. Зроблений висновок дає підставу розглядати в подальшому умови існування кноїдальних хвиль відповідно для потоків у спокійному, критичному та бурхливому станах.

У випадку, коли права частина нерівності (32) від'ємна, тобто коли число Фруда $Fr_1 < 1$, що відповідає потокам у спокійному стані, умову (32), згідно з [9], можна замінити нерівністю:

$$\left(\frac{4s_1 - 1}{3} + Fr_1\right)^2 - 4Fr_1 \geq 0,$$

звідки витікає наступна, вже відома умова, отримана при квадраті модуля еліптичних функцій Якобі $k^2 > 0$ (27):

$$\frac{4s_1 - 1}{3} \geq \sqrt{Fr_1} (2 - \sqrt{Fr_1}).$$

У випадку, коли права частина нерівності (32) додатна або дорівнює нулю, тобто коли число Фруда $Fr_1 \geq 1$, що відповідає потокам у бурхливому чи критичному стані, згідно з [9], вираз (32) можна замінити такою нерівністю

$$\left(\frac{4s_1 - 1}{3} + Fr_1\right)^2 - 4Fr_1 > \left(Fr_1 - \frac{4s_1 - 1}{3}\right)^2,$$

з якої витікає така вже відома умова (30), введена при $k^2 < 1$:

$$s_1 > 1.$$

Отримані результати свідчать, що кноїдальні хвилі можуть існувати не тільки в спокійних, а й в бурхливих та критичних потоках, тобто при числах Фруда

$$Fr_1 \lesseqgtr 1.$$

Цей висновок знаходиться у повній відповідності з результатами теоретичних досліджень У. Літмена [16]. Необхідно підкреслити, що зроблений висновок спростовує точку зору тих вчених, які вважають, що кноїдальні хвилі можуть існувати лише в спокійних потоках, тобто при $Fr_1 < 1$, [17, 18]. Результати деяких проведених дослідів з кноїдальними хвилями, що утворюються на поверхні бурхливих потоків, тобто при $Fr_1 > 1$, дані в [1].

Таким чином, для існування кноїдальних хвиль, описуваних системою рівнянь (3), необхідно виконання умов (10), (30), (18):

$$0 < k^2 < 1,$$

$$s_1 > 1,$$

$$Fr_1 \lesseqgtr 1.$$

На закінчення даного пункту підкреслимо, що виражені через число Фруда Fr_1 умови (18) і (21) існування загального (3) і частинних (17) та (20) розв'язків диференціального рівняння (1) передбачають, що межі існування числа Фруда Fr_1 не охоплюють всю множину значень відповідно від 1 до 0 та від 1 до ∞ , а лише характеризують стан потоку (спокійний чи бурхливий відповідно) і обмежуються межами існування даного типу явища.

2. ВПЛИВ ОСОБЛИВИХ ОБСТАВИН НА УМОВИ ІСНУВАННЯ РІЗНИХ ТИПІВ БІЛЯКРИТИЧНИХ ТЕЧІЙ

2.1. Вплив граничних і початкових умов на формування білякритичних течій

Умови існування загального (3) та частинних (17) і (20) розв'язків узагальненого диференціального рівняння (1) профілю вільної поверхні хвилеподібних білякритичних течій описані відповідно співвідношеннями для кноїдальних хвиль – (10), (30), (18), усталеного рівномірного потоку – (8), (12), (18), самотньої хвилі – (9), (12), (21) і виражаються через три параметри – квадрат модуля k^2 еліптичних функцій Якобі, коефіцієнт негідростатичності s_1 в початковому перерізі розглядуваних явищ та число Фруда Fr_1 в тому самому перерізі. І якщо контроль фактичних значень параметрів Fr_1 та s_1 при проведенні експериментальних досліджень легко здійснювати шляхом вимірювань таких характеристик потоку, як q , h_1 , h_{nd1} , то дотримання в потрібних межах квадрата модуля k^2 еліптичних функцій Якобі здійснюється за рахунок підбору необхідних граничних і початкових умов. При цьому досягається певна відповідність всіх характеристик білякритичних течій – питомої витрати q , глибин h_1 , h_2 , h_v , коефіцієнта негідростатичності s_1 , числа Фруда Fr_1 і квадрата модуля k^2 з тим, щоб вони задовольняли диференціальному рівнянню (1).

Взагалі фактор відповідності реальних граничних і початкових умов прийнятій теоретичній схемі, математичній моделі та диференціальним рівнянням, що описують досліджуване явище, далеко не завжди береться до уваги при виконанні експериментальних досліджень білякритичних течій та при аналізі отримуваних результатів. Відсутність контролю за відповідністю фактичних гра-

ничних і початкових умов теоретичним, прийнятим при розробці математичної моделі розгляданого явища, може призвести до неправильного трактування одержаних експериментальних даних та помилковості зроблених висновків.

Наскільки важливим є вплив граничних умов у початковому і кінцевому перерізах білякритичних течій на формування розглядуваних явищ прекрасно ілюструє рис. 5, взятий з роботи [2], з якого видно, що зміна кінцевої глибини (яку в певній мірі характеризує друга спряжена глибина h_2), а відповідно і коефіцієнта негідростатичності s_1 в перерізі з першою спряженою глибиною впливають не тільки на основні характеристики досліджуваного явища, а навіть і на його тип. І саме відсутністю контролю за кінцевою глибиною хвилястого стрибка та ступенем викривлення вільної поверхні у вертикальній площині в його початковому перерізі можна пояснити своєрідне трактування А. Н. Мельниковим [19] отриманих експериментальних результатів, яке піддавалося заслуженій критиці, про що вже йшлося в роботі [2].

Необхідно з жалем констатувати, що при вивченні різних типів білякритичних течій далеко не завжди контролюється весь комплекс граничних умов навіть у початковому перерізі досліджуваних явищ. Так, часто вважається, що в початковому перерізі цих явищ розподіл тиску по глибині підпорядковується гідростатичному закону, внаслідок чого ступінь викривлення потоку у вертикальній площині у зазначеному перерізі взагалі не контролюється. Така позиція пояснюється іще побутуючою хибною точкою зору, що всі безнапірні потоки, в тому числі і білякритичні течії, однозначно описуються числом Фруда, через що вплив інших факторів на формування досліджуваних явищ у певній мірі недооцінюється.

Питання про вибір положення кінцевого перерізу та визначення в ньому граничних умов при експериментальних дослідженнях білякритичних течій є непротим і залежить від кількох факторів. По-перше, у більшості випадків глибина потоку по довжині лотка є не постійною, а змінною внаслідок формування на установці кривої спаду певного типу. По-друге, розглядуване питання істотно ускладнюється, якщо вільна поверхня досліджуваних явищ має хвилеподібний характер. По-третє, додаткові хвилі, які впливають на досліджуване явище, можуть утворюватися на кінцевій частині установки у випадках, коли глибина при сході потоку з неї наближається до критичного значення. Труднощі з визначенням положення кінцевого перерізу хвилеподібних білякритичних течій та знаходженням характеристик потоку в

цьому перерізі під час експериментального вивчення гідравлічних опорів зазначених течій описані в [20].

Звичайно вважається, що на даній експериментальній установці певної довжини, із вибраного формою поперечного перерізу, заданими умовами в нижньому б'єфі, назначеною витратою та прийнятою конструкцією досліджуваної споруди отримуване явище (наприклад гідравлічний стрибок – досконалий чи хвилястий) формується автоматично у відповідності з певними закономірностями, властивими для даного явища. На основі вищезгаданої концепції про однозначність описання всіх відкритих потоків числом Фруда при цьому вважається, що глибина нижнього б'єфу, яка безперечно впливає на формування досліджуваних явищ, враховується у використовуваних теоретичних і експериментальних залежностях у неявній формі опосередковано через число Фруда. При такій постановці питання нерідкі випадки, коли положення на установці кінцевого створу та граничні характеристики потоку в ньому взагалі не фіксуються, а вплив кінцевої глибини на формування досліджуваного явища виключається з аналізу.

Яким саме чином впливають у дослідках граничні і початкові умови на формування та основні характеристики досліджуваних явищ, розглянемо на прикладах аналізу постановки експериментів для двох характерних випадків дослідження білякритичних течій відповідно з нерухомими і рухомими явищами.

При проведенні експериментів з нерухомою самотньою хвилею, утворюваною за схемою витікання води з-під затвора в лоток з відносно невеликою довжиною робочої частини установки за затвором [14], одним з визначальних факторів формування досліджуваного явища є довжина робочої частини лотка, від якої залежить весь комплекс граничних умов у кінцевому перерізі самотньої хвилі, в тому числі і її кінцева глибина. В таких експериментах необхідно забезпечити відповідність дійсної довжини робочої частини лотка, на якій формується досліджуване явище, з фактичною довжиною реальної самотньої хвилі, що утворюється на установці при вибраних вихідних характеристиках потоку (глибині, витраті і т.п.). За останню із згаданих глибин у першому наближенні можна приймати теоретичне значення довжини розглядуваного явища.

Тут необхідно підкреслити, що теоретична довжина самотньої хвилі, описуваної залежностями типу (20) з використанням гіперболічного секанса, при глибині $h \rightarrow h_1$ прямує до нескінченності. Через це при розгляді самотньої хвилі зна-

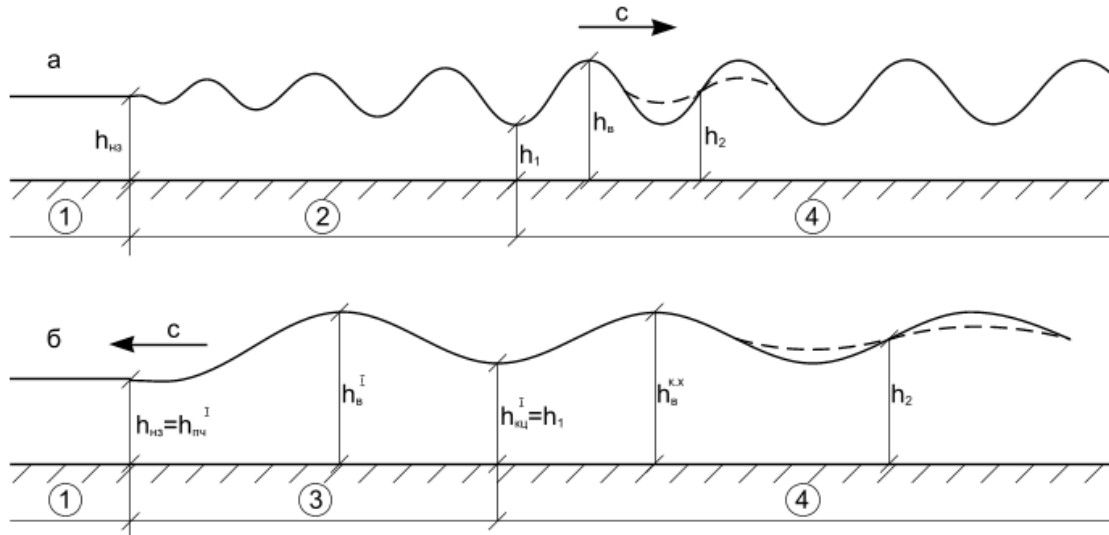


Рис. 5. Випадки утворення рухомих кноїдальних хвиль на поверхні рідини: *a* – при наявності деякого джерела збудження; *b* – при виникненні білякритичних хвиль переміщення; 1 – зона незбуреної рідини; 2 – зона еволюції хвиль; 3 – зона самотньої хвилі; 4 – зона рухомих перманентних хвиль

чення її теоретичної довжини обмежують певним чином. Так, лорд Релей, Г. Ламб, В. В. Смыслов, Л. М. Сретенський [21 – 24] за довжину самотньої хвилі приймають віддаль між її точками вільної поверхні, перевищення яких над рівнем незбуреного потоку дорівнює 10 % від висоти хвилі, а Д. Лайтхілл [25] – відповідну віддаль між точками, перевищення яких над тим же рівнем становить 3 % від висоти хвилі.

Якщо при проведенні експериментів параметри установки, питома витрата q , висота підняття щита $h_{щ}$, а відповідно і початкова глибина h_1 підібрані таким чином (в межах необхідних значень числа Фруда Fr_1), що дійсна довжина робочої частини лотка відповідає необхідній (теоретичній) довжині утворюваної самотньої хвилі, а установка забезпечує потрібні граничні умови в кінцевому перерізі досліджуваного явища ($h_{кц} = h_1$, $s_{кц} = 1$), то в досліді сформується самотня хвиля з гідростатичним розподілом тиску в її початковому перерізі, тобто нерухомий гідродинамічний солітон.

У випадку, коли фактична довжина робочої частини лотка виявиться дещо більшою від необхідного (теоретичного) значення довжини утворюваної самотньої хвилі, то кінцева глибина $h_{кц}$ буде більшою початкової глибини $h_1 = h_{кн}$, а на установці сформується самотня хвиля з хвостом при коефіцієнті негідростатичності $s_1 = 1$. В залежності від довжини робочої частини установки та кінцевих граничних умов коефіцієнт негідростати-

чності s_1 у початковому перерізі досліджуваного явища може виявитися не рівним, а більшим від одиниці. В такому випадку отримане явище необхідно класифікувати як самотню (а не самотню!) хвилю з хвостом.

Якщо фактична довжина робочої частини лотка буде меншою від необхідної теоретичної довжини самотньої хвилі, то на установці сформується “недосконала” самотня хвиля ($Fr_1 > 1$, $s_1 = 1$) неповної довжини, а відповідно і неповної висоти. Лабораторні дослідження самотніх хвиль, утворюваних описаним способом, висвітлені в роботах [1, 14].

Зауважимо, що отримані теоретичні результати про умови існування різних типів хвилеподібних білякритичних течій та висновки про вплив граничних умов на існування нерухомих у просторі явищ знаходяться у повній відповідності з експериментальними даними автора, описаними в роботах [1, 2, 10, 12 – 15, 20].

При проведенні експериментів з білякритичними хвилями переміщення, як неусталеними явищами в часі, необхідно брати до уваги не тільки граничні, а ще й початкові умови. Аналіз результатів дослідів з хвилями переміщення, утворюваними шляхом раптової подачі в лоток додаткової витрати, показує, що для утворення в таких дослідках рухомої самотньої хвилі (рухомого гідралічного солітону) необхідно досягти відповідності таких параметрів, як значення додаткового об’єму

води, що подається в лотік, тривалість часу подачі цього об'єму, значення витрати і глибини незбуреного потоку.

Якщо об'єм води, що додатково подається на установку, перевищує певне значення, необхідне для формування самотньої хвилі, а всі інші параметри залишаються незмінними, то в залежності від значення поданого об'єму води в дослідах може утворитися самотня хвиля з хвостом, самотня хвиля з відірваним хвостом, група хвиль переміщення з хвилястою поверхнею та хвиля переміщення з поверхневим вальцем. У випадку, коли додатковий об'єм води є меншим деякого значення, необхідного для утворення самотньої хвилі, в дослідах формуються похилі хвилі з плавнозмінним рухом.

Описання проведених дослідів з білякритичними хвилями переміщення та вироблені критерії формування різних типів утворюваних рухомих явищ дані в [26, 27].

2.2. Критерії ідентифікації різних типів одиночних хвиль

Умови існування нерухої і рухої перманентної самотньої хвилі, виражені через квадрат модуля еліптичних функцій Якобі – вираз (9), та через характеристики потоку в їх початковому перерізі – залежності (12), (21), а також описаний в п. 2.1 вплив граничних і початкових умов на існування білякритичних течій дозволяють розробити чіткі критерії ідентифікації різних типів одиночних хвиль, дати їх повну класифікацію, а також виділити із різнопланової сукупності нерухомих і рухомих одиночних хвиль (див. [2]) ті явища, які за певними ознаками можна віднести до категорії гідродинамічних солітонів. Це питання має виняткове значення для проблеми вивчення солітонів, а особливо при здійсненні лабораторних досліджень на гідравлічних моделях – аналогах солітонів, що мають різну фізичну природу, але описуються одним і тим самим диференціальним рівнянням Кортвега–де Фріса.

На основі отриманої інформації зображені на рис. 1 роботи [2] нерухої одиночні хвилі можна ідентифікувати за такими ознаками:

- одиночна хвиля в спокійному потоці (рис. 1, а) – $Fr_1 < 1$, $h_{nc} > h_1$, $s_1 > 1$;
- одиночна хвиля в критичному потоці (рис. 1, б) – $Fr_1 = 1$, $h_{nc} = h_k$, $s_1 > 1$;
- одиночна хвиля в бурхливому потоці (рис. 1, в) – $Fr_1 > 1$, $h_{nc} < h_k$, серед хвиль цього

типу можна виділити дві різновидності – з негідростатикою $s_1 > 1$ та з гідростатикою $s_1 = 1$ в початковому перерізі;

- одиночна хвиля з негідростатикою в початковому перерізі (рис. 1, а, б, з) – $Fr_1 \lesseqgtr 1$, $h_{nc} \gtrless h_k$, $s_1 > 1$;
- самотня хвиля в бурхливому потоці з гідростатикою в початковому перерізі, тобто нерухомий гідродинамічний солітон (рис. 1, д) – $Fr_1 > 1$, $h_{nc} = h_{kc} < h_k$, $s_1 = 1$;
- одиночна чи самотня хвиля з хвостом (рис. 1, е) – $Fr_1 \lesseqgtr 1$, $h_{nc} \leq h_{kc}$, $s_1 \geq 1$, наявність хвоста висотою $h'_B < h_B$;
- одиночна хвиля над донною перешкодою (рис. 1, е) – $Fr_1 > 1$, $s_1 \geq 1$, наявність донної перешкоди.

Серед перерахованих типів нерухомих одиночних хвиль лише один, показаний на рис. 1, д роботи [2], відповідає умовам (9), (12), (21) існування самотньої хвилі, описуваної рівнянням (20), і який може бути класифікований як нерухомий гідродинамічний солітон.

Нерухома одиночна хвиля з хвостом, зображена на рис. 1, е роботи [2], може бути класифікована як різновид одиночних хвиль, показаних на рис. 1, а – д, і може бути охарактеризована такими даними: $Fr_1 \lesseqgtr 1$, $s_1 \geq 1$, $h_{nc} \leq h_{kc}$, при цьому висота хвоста $h'_B < h_B$. При виконанні умов (12), (21) явище самотньої хвилі з хвостом не повністю відповідає класичному визначенню самотньої хвилі і може бути віднесене до категорії солітонів лише за умови $h_{nc} = h_{kc}$, коли в точності виконується також і умова (9).

Одиночна хвиля над донною перешкодою (рис. 1, е роботи [2]) якісно відрізняється від всіх інших типів розглядуваних нерухомих одиночних хвиль внаслідок наявності донних водоворотів спереду та позаду перешкоди. Враховуючи, що в межах цих водоворотів рух рідини є обертовим і не відповідає критеріям потенціальності руху [28], а розміри цих водоворотів можуть бути надзвичайно великими (наприклад, в дослідах А. П. Василенко з такою хвилею висота донного порога доходила до 140 % від висоти потоку перед перешкодою [29]), можна зробити висновок, що навіть при виконанні умов (12) і (21) одиночну хвилю над донною перешкодою не можна відносити до категорії самотніх хвиль (солітонів). Зауважимо, що цей висновок не виключає можливості наближеного експериментального вивчення солітонів на

гідрравлічних моделях з використанням донної перешкоди. Але цей прийом можливий лише за умови, що висота такої перешкоди є невеликою і істотно не впливає на потенціальність всього потоку рідини. В таких випадках донний поріг по суті лише сприяє утворенню хвилі на поверхні потоку та фіксує місце утворення цієї хвилі.

Показані на рис. 2 роботи [2] рухомі одиночні хвилі, швидкість переміщення яких $c > c_{\kappa} = \sqrt{gh_1}$, можна ідентифікувати за такими ознаками:

- рухома самотня хвиля, тобто рухомий гідродинамічний солітон (рис. 2, а) – $Fr_1 > 1$, $s_1 = 1$, $h_{nc} = h_{\kappa c}$ (об'єм води у хвилі переміщення дорівнює об'єму, необхідному для формування відповідної самотньої хвилі);
- рухома одиночна хвиля з хвостом (рис. 2, б) – $Fr_1 > 1$, $s_1 = 1$, $h_{nc} \leq h_{\kappa c}$, висота хвоста $h'_b < h_b$ (об'єм води у хвилі переміщення дещо перевищує об'єм, необхідний для формування відповідної самотньої хвилі);
- рухома самотня хвиля з відірваним хвостом (рис. 2, в) – $Fr_1 > 1$, $s_1 = 1$, $h_{nc} = h_{\kappa c}$, $h'_b < h_b$, $c' < c$ (загальний об'єм води у хвилі переміщення перевищує об'єм, необхідний для формування відповідної самотньої хвилі, проте після відриву самотньої хвилі з відповідним об'ємом води від хвоста вся надлишкова вода залишається у хвості).

Необхідно підкреслити, що та частина хвилі переміщення, що відноситься безпосередньо до самотньої хвилі, яка відірвалася від свого хвоста і рухається незалежно від нього, повністю відповідає існуючим вимогам до солітонів і може бути класифікована як рухомий гідродинамічний солітон. Рухома одиночна хвиля з хвостом може бути віднесена до категорії солітонів лише в початковий момент відриву хвоста від основної хвилі, коли $h_{nc} = h_{\kappa c}$. Після цього моменту явище класифікується вже як самотня хвиля з відірваним хвостом.

Отримані дані про умови існування білякритичних течій та критерії ідентифікації різних типів одиночних хвиль необхідно враховувати як при фізичному (гідрравлічному), так і математичному моделюванні зазначених явищ [30–32].

2.3. Умови існування рухомих кноїдальних хвиль

Як відомо [1, 33–37], круті хвилі переміщення, до яких відносяться також і рухомі кноїдальні хвилі, утворюються при числах Фруда $Fr = c^2/gh > 1$,

де $h = h_{nc}$ – глибина незбуреного потоку. Цей факт знаходиться у повній відповідності з умовою (18).

Розглянемо тепер питання про можливість виконання умови (30) для випадку утворення рухомих кноїдальних хвиль, описуваних системою (3) при $0 < k^2 < 1$. В процесі вивчення хвиль переміщення за початковий переріз цього явища звичайно приймається переріз, розміщений перед хвилями переміщення, в якому потік іще незбурений, і саме за яким починається істотне викривлення та підйом вільної поверхні. Для незбурених потоків у відкритих руслах значної протяжності (саме в таких руслах і формуються розглядувані хвилі переміщення) характерним є те, що рух рідини є плавномінімним, а в частинному випадку рідина до приходу хвилі переміщення взагалі може бути нерухою. В умовах плавномінімного руху або нерухої рідини початковий переріз хвиль переміщення завжди можна вибрати таким чином, що в ньому розподіл тиску по глибині буде гідростатичним, тобто коефіцієнти s_1 , k_1 , β_1 завжди будуть рівними одиниці.

Значить, у розглядуваному випадку обов'язкова для кноїдальних хвиль умова (30) не виконується. Звідси витікає надзвичайно важливий висновок, що рухомі перманентні кноїдальні хвилі, описувані стаціонарною (незалежною від часу) системою рівнянь (3), і початкова глибина h_1 яких дорівнює глибині незбуреного потоку, в природі самостійно існувати не можуть. На перший погляд цей висновок може здатися дещо парадоксальним, адже класичний підхід до вивчення кноїдальних хвиль передбачає їх розгляд саме як рухомого явища [38].

Щоб розібратися у цьому питанні, розглянемо два типові випадки утворення рухомих кноїдальних хвиль (див. рис. 5). Перший випадок (рис. 5, а) передбачає наявність деякого джерела збурення. Утворювані при цьому хвилі відносяться до класу нелінійних хвиль на мілкій воді і описуються нелінійним диференціальним рівнянням у частинних похідних Кортевега–де Фріса [38]:

$$\frac{\partial h}{\partial t} - K_1 h \frac{\partial h}{\partial x} - K_2 \frac{\partial^3 h}{\partial x^3} = 0, \quad (37)$$

де h – глибина довільної точки на вільній поверхні; x – поздовжня координата цієї ж точки; t – час, K_1 ; K_2 – деякі коефіцієнти.

Рівняння (37) описує еволюцію утворюваних хвиль у часі, які в процесі переміщення змінюють конфігурацією вільної поверхні, збільшуючи при цьому свою висоту. Ріст амплітуди рухомих кноїдальних хвиль, описуваних диференціальним

рівнянням (37), в процесі їх еволюції чітко демонструють чисельні досліди на ЕОМ Н. Забуського і М. Крускала [39]. Після певного часу еволюції профілю вільної поверхні настає так званий перманентний (квазіусталений) період існування хвиль, коли вони рухаються в просторі без зміни свого профілю та швидкості переміщення. Саме в цей перманентний період профіль вільної поверхні кноїдальних хвиль описується формулою (13), яка є стаціонарним розв'язком диференціального рівняння (37).

Резюмуючи інформацію про перший випадок, можна сказати, що наявність періоду еволюції хвиль (зона 2 на рис. 5, а) забезпечує формування таких параметрів потоку у відповідній підшві хвиль (глибини h_1 , числа Фруда Fr_1 , коефіцієнта негідростатичності s_1), що забезпечують виконання умови (30), при якій можливе існування кноїдальних хвиль. Переріз потоку, проведений через зазначену підшву, необхідно вважати за початковий переріз рухомих перманентних кноїдальних хвиль.

Другим типовим випадком утворення рухомих кноїдальних хвиль є білякритичні хвилі переміщення (рис. 5, б), які виникають при різкій зміні (збільшенні або зменшенні) витрати рідини на початку чи в кінці каналу [33, 35 – 37]. Негативні прояви таких хвиль переміщення з хвилястою поверхнею та існуючі методи боротьби із такими проявами описані в [40]. Стосовно даного випадку необхідно підкреслити, що зазначені хвилі переміщення не можна класифікувати як кноїдальні на всій їх довжині. Причина такого положення полягає в наступному. Як чітко засвідчують результати експериментальних досліджень [40 – 42], перша хвиля розглядуваного явища має яскраво виражений асиметричний профіль кривої вільної поверхні, причому початкова глибина цієї хвилі h_{nc}^I є меншою за її кінцеву глибину h_{nc}^I . В той сам час кноїдальні хвилі, описувані системою рівнянь (3), є симетричними відносно вертикалей, проведених через вершини хвиль.

У відповідності з цим при розгляді хвиль переміщення за кноїдальні звичайно приймають лише хвилі, розміщені за першою хвилею, яку з певними застереженнями вважають за самотню [18, 26, 27, 33, 43, 44]. При цьому склеювання теоретичних розв'язків самотньої і кноїдальних хвиль для отримання розрахункового профілю вільної поверхні хвиль переміщення здійснюють у перерізі, що проходить через вершину першої хвилі, або через точку перегину кривої вільної поверхні, розміщену за вершиною першої хвилі. При проведенні такого склеювання висоту h_b^{xx} під вершинами кно-

їдальних хвиль приймають рівною висоті h_b^I під вершиною самотньої хвилі. Тут доречно пригадати, що ще Г. Фавр [35] при проведенні своїх експериментальних досліджень хвиль переміщення висловив думку, що першою хвилею досліджуваного явища є самотня хвиля, а наступні хвилі – кноїдальні.

Розглянемо питання про вибір початкового перерізу (тобто перерізу з першого спряженого глибиною) рухомих перманентних кноїдальних хвиль, зображених на рис. 5, б. При цьому глибина в такому перерізі повинна відповідати визначенню першої спряженої глибини, даному в [45] для всього класу білякритичних течій. Враховуючи асиметричність профілю першої хвилі, за першу спряжену глибину кноїдальних хвиль у складі білякритичних хвиль переміщення, показаних на рис. 5, б, необхідно приймати глибину h_1 під підшвою, розміщеною між першою і другою вершинами розглядуваних хвиль переміщення. Наявність асиметричної першої хвилі в складі хвиль переміщення забезпечує виконання обов'язкової умови (30) існування кноїдальних хвиль.

Необхідно підкреслити, що в обох описаних випадках утворення рухомих перманентних кноїдальних хвиль глибина незбуреного потоку (де коефіцієнт негідростатичності $s_{nz} = 1$) не може бути початковою глибиною кноїдальних хвиль, де вільна поверхня повинна бути ввігнутою, а коефіцієнт негідростатичності s_1 – більшим одиниці, тобто $h_1 \neq h_{nz}$.

Для порівняння зауважимо, що при утворенні нерухомих кноїдальних хвиль виконання умови (30) досягається досить просто. В даному випадку викривлення потоку у вертикальній площині спричиняється впливом елементів існуючих гідротехнічних споруд – водозливів, затворів, забральних стінок і т.п., завдяки дії яких у стисненому перерізі, що можна приймати за початковий переріз кноїдальних хвиль, потік є ввігнутим, а коефіцієнт негідростатичності $s_1 > 1$.

ВИСНОВКИ

1. Умови існування різних типів білякритичних течій не можна характеризувати лише одним критерієм – числом Фруда Fr_1 у їх початковому перерізі.

2. Для однозначного описання цих умов необхідно враховувати три критерії – квадрат модуля k^2 еліптичних функцій Якобі, число Фруда Fr_1 в початковому перерізі розглядуваних явищ та коефіцієнт негідростатичності s_1 (чи пов'язані з ним

коефіцієнти гідродинамічного тиску k_1 або потенціальної енергії β_1), який враховує ступінь викривлення потоку у вертикальній площині в зазначеному перерізі.

3. Побудована математична модель хвилеподібних білякритичних течій, виведене диференціальне рівняння (1) профілю їхньої вільної поверхні, а також його загальний (3) та частинні (17) і (20) розв'язки описують умови існування та основні характеристики **сформованих** білякритичних течій з відповідними значеннями квадрата модуля k^2 еліптичних функцій Якобі через параметри потоку в початковому перерізі цих течій – число Фруда Fr_1 та коефіцієнт негідростатичності s_1 .

4. Кноїдальні хвилі, описувані системою рівнянь (3) і утворювані при квадраті модуля еліптичних функцій Якобі

$$0 < k^2 < 1,$$

можуть існувати на поверхні не тільки спокійних, а й критичних та бурхливих потоків, тобто при числах Фруда

$$Fr_1 \leq 1.$$

5. Необхідною умовою існування кноїдальних хвиль, описуваних системою (3) і утворюваних при $0 < k^2 < 1$, є наявність ввігнутої кривої вільної поверхні в їхньому початковому перерізі та відповідно відсутність гідростатичного закону розподілу тиску по глибині в цьому перерізі, коли коефіцієнт негідростатичності

$$s_1 > 1.$$

6. Рухомі перманентні кноїдальні хвилі із стаціонарним профілем вільної поверхні, описуваних системою (3), та постійною швидкістю переміщення $c > c_\kappa = \sqrt{gh}$, утворювані безпосередньо на поверхні незбуреного потоку (чи нерухомої рідини) з глибиною $h = h_{нз}$ та гідростатичним розподілом тиску по глибині в будь-якому перерізі, в природі самостійно існувати не можуть. Для утворення рухомих перманентних кноїдальних хвиль необхідно існування певної перехідної ділянки між незбуреною рідиною та перманентними хвилями (див. зону 2 на рис. 5, а), яка забезпечує виконання умови (30).

7. Зазначені в п. 2.2 характеристики потоку (Fr_1, s_1 та інші) можна рекомендувати як характерні ознаки для проведення ідентифікації окремих типів одиночних хвиль.

8. Серед утворюваних у різних умовах білякритичних течій з хвилястою поверхнею, загальною рисою яких є те, що кількість хвиль у них дорівнює одиниці, гідродинамічним солітоном, описува-

ним рівнянням (20), можна визнати лише нерухому і рухому самотні хвилі, утворювані в бурхливих потоках при наявності гідростатичного закону розподілу тиску по глибині в їх початковому перерізі, тобто при виконанні умов (12), (21):

$$s_1 = 1,$$

$$Fr_1 > 1,$$

причому граничні і початкові умови забезпечують рівність початкової $h_{нч}$ та кінцевої $h_{кч}$ глибин розглядуваного явища.

9. Внаслідок існування донних водоворотів з обертовим рухом рідини спереду та позаду перешкоди (див. рис. 1, є роботи [2]), наявність яких в тій чи іншій мірі виключає можливість застосування теорії потенціального руху при розгляді таких потоків, одиночну хвилю, утворювану при обтіканні донної перешкоди значної висоти, не можна відносити до категорії солітонів навіть при виконанні умов (12), (21) та рівності початкової $h_{нч}$ і кінцевої $h_{кч}$ глибин.

1. Riabenko A. A. Free surface profile of wavelike near-critical flows and solitary solutions of some differential equations // Int. Journ. Fluid Mech. Research.– 2001.– **28**, N 6.– P. 834–856.
2. Рябенко О. А. Математична модель хвилеподібних білякритичних течій рідини з урахуванням можливого викривлення потоку у вертикальній площині в їх початковому перерізі // Прикладна гідромеханіка.– 2006.– **8** (80), N 1.– С. 60–72.
3. Смыслов В. В. Теория водослива с широким порогом.– К.: Изд-во АН УССР, 1956.– 184 с.
4. Serre F. Contribution a l'etude des 'econlements permanents et variables dans les canaux // Houille Blanche.– 1953.– N 3.– P. 374 – 388.
5. Khafagi A., Hammad S. Z. Velocity and Pressure Distribution in Curved Stream – Line Flow // Water and Water Engineering.– 1954, March.– P. 106 – 115.
6. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике.– М.: Наука, 1973.– 832 с.
7. Фильчаков П. Ф. Справочник по высшей математике.– К.: Наукова думка, 1972.– 744 с.
8. Чугаев Р. Р. Гидравлика.– Л.: Энергоиздат, 1982.– 672 с.
9. Бондаренко М. Ф., Дікарев В. А., Мельников О. Ф., Семенець В. В., Шклярів Л. Й. Математика для вступників до вузів.– Харків: “Компанія СМІТ”, 2002.– 1120 с.
10. Riabenko A. A. Types, characteristics and conditions of existence of near-critical flows Hydrotechnical Construction. Translated from Russian // Consultants Bureau, New York.– May–November 1992.– **26**, N 5.– P. 269–275.
11. Chow V. T. Open channel hydraulics.– New York: McGraw – Hill, 1959.– 204 p.

12. Рябенко А. А. Экспериментальные исследования сопряженных глубин околосубкритических течений // Гидравлика и гидротехника.- К.: Техника.- 1977.- **25**.- С. 70–78.
13. Рябенко А. А. Экспериментальные исследования максимальной глубины околосубкритических течений с волнообразной поверхностью // Гидравлика и гидротехника. - К.: Техника.- 1985.- **41**.- С. 45–50.
14. Рябенко А. А. Условия существования уединенной волны // Гидравлика и гидротехника.-К.: Техника.- 1989.- **49**.- С. 35–41.
15. Рябенко А. А. Условия существования кноидальных волн // Гидравлика и гидротехника.- К.: Техника.- 1991.- **53**.- С. 3–9.
16. Littman W. On the existence of periodic waves with near critical speed // Comm. Pure Appl. Math.- **10**.- 1957.- P. 241–269.
17. Веземский В. Г. О прыжке и сужении бурного потока: Автореф. Дис. канд.техн.наук.- МГМИ: М., 1967.- 14 с.
18. Турсунов А. А. Околосубкритическое состояние безнапорных потоков воды // Изв. ВНИИГ.- 1969.- **90**.- С. 201–224.
19. Мельников А. Н. Несовершенный прыжок воды в прямоугольном призматическом русле с горизонтальным дном // Труды НИИИ.- 1958.- **6**.- С. 509– 526.
20. Рябенко А. А. Гидравлические сопротивления околосубкритических течений с волнообразной поверхностью // Гидротехническое строительство.- 2002.- N 4.- С. 27–37.
21. Rayleigh, Lord On waves // Phil. Mag.- 1876.- **5**, N 1.- P. 257–279.
22. Lamb H. Hydrodynamics.- Donver: New York, 1932.- 347 p.
23. Смыслов В. В. Исследование уединенной волны с помощью одномерной теории // Гидравлика и гидротехника.- К.: Техника.- **9**, 1970.- С. 21–25.
24. Сретенский Л. Н. Теория волновых движений жидкости.- М. - Л.: ОНТИ НКТП, 1936.- 303 с.
25. Лайтхилл Д. Волны в жидкостях.- М.: Мир, 1981.- 600 с.
26. Эшмурадов Ю. Исследование процессов формирования положительных волн перемещения в каналах.- Автореф. дис. канд. техн. наук: 05.14.9: Л., 1975.- 21 с.
27. Нышанов Е. Волны перемещения в машинных каналах.- Автореф. дис. канд. техн. наук: 05.14.09: Киевск. инженерно-строит. ин-т.-К., 1988.- 24 с.
28. Рябенко О. А. Умови використання теорії потенціального руху при вивченні біякритичних течій рідини // Вісник УДУВГП, Рівне.- 2004.- **2 (26)**.- С. 203–211.
29. Василенко А. П. Опытные данные об остановившейся волне // Гидравлика. **2**.- К.: Техніка, 1966.- С. 26–36.
30. Riabenko A., Kravets S., Kojouchko L., Hassane M. Modllisation hydraulique des lconlements liquides an voisinage de la profondeur critique // Actes. Colloque International sur l'Eau et l'Environnement.- Alger, 2004.- P. 180–188.
31. Ляпидевский В. Ю., Тешуков В. М. Математические модели распространения длинных волн в неоднородной жидкости.- Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2000.- 420 с.
32. Ильичев А. Т. Уединенные волны в моделях гидромеханики.- М.: Физматгиз, 2003.- 256 с.
33. Смыслов В. В. Об остановившейся волне в бурном потоке жидкости // Изв. вузов. Энергетика.- 1964.- N 3.- С. 104–110.
34. Kodama U., Ablowitz M. J. Perturbation of solitons and solitary waves // Stud. Appl. Math.- 1981.- **64**, N 3.- P. 225–245.
35. Favre H. Etude théorique et expérimentale des ondes de translation dans les canaux découvertes.- Dunod: Paris, 1935.- p.
36. Sandover J. A., Zienkiewicz O. C. Experiments on Surge Waves // Water Power.- 1957.- November.- P. 418–424.
37. Jones L. E. Some observations on the undular jump // Proc. ASCE, HD.- 1964.- **90**, НУЗ.- P. 69–82.
38. Korteweg D. J., de Vries G. On the change of form of long wares advancing in a rectangular canal and on a new type of long stationary waves // Philosophical Magazine and Journal of Science.- 1895.- **39**, ser. 5.- P. 422–443.
39. Zabusky N. J., Kruskal M. D. Interaction of solitons in a collisionless plasma and the recurrence of initial states // Phys. Rev. Lett.- 1965.- **15**.- P. 240–243.
40. Рябенко О. А. Позитивні і негативні прояви біякритичних течій рідини та методи боротьби з їх негативними проявами // Ресурсоекономні матеріали, конструкції, будівлі та споруди.- Рівне: 2004, вип. 11.- 300–308 с.
41. Sandover J. A., Taylor C. Choidal waves and bores // La Houille Blanche.- 1962.- N 3.- P. 443–456.
42. Hammack J. L., Segur H. The Korteweg – de Vries equation and water waves. Part 2, Comparison with experiments // J. of Fluid Mechanics.- 1974.- **65**, N 2.- P. 289–314.
43. Гидравлические расчеты конструкций, управляющих бурными потоками. Рекомендации для проектирования / Под общ. ред. Ф. Г. Гунько.- Л.: Энергия, 1974.- 110 с.
44. Wiegel R. L. A presentation of cnoidal wave theory for practical application // Journal of Fluid Mechanics.- Feb., 1960.- **7**, part 2.- P. 273 – 286.
45. Рябенко О. А. Теоретичні основи і методи розрахунків біякритичних течій рідини з вільною поверхнею.- Дисертація ... докт. техн. наук: 05.23.16: Рівне, 2003.- 393 с.