УДК 534

О поперечных колебаниях шасси самолета

Н. П. Плахтиенко[а]**, Б. М. Шифрин**[б]

[а] Институт механики им. С. П. Тимошенко НАН Украины, Киев, Украина

[б] Государственная летная академия Украины, Кировоград, Украина

В рамках гипотезы нелинейного увода теоретически изучены поперечные упругофрикционные колебания шасси относительно корпуса бесконечной массы при движении самолета по взлетно-посадочной полосе с большой скоростью. Получены приближенные амплитудно-фазовые уравнения, описывающие колебания в одномерных механических системах при произвольных аналитических характеристиках зависящего от скорости трения.

Ключевые слова: самолет, шасси, колебания, увод, рыскание, автоколебания.

Многие поломки элементов отсека шасси самолетов происходят в значительной мере из-за воздействия нерасчетных поперечных, т.е. направленных поперек продольной оси фюзеляжа, циклических нагрузок. В [1, 2] представлены результаты анализа причин поломки главной стойки шасси и отрыва узла крепления шлиц-шарнира высокоресурсного самолета F100. Возможными причинами признаны совместные поперечные и крутильные колебания стойки шасси, возникающие при пробеге самолета по взлетно-посадочной полосе (ВПП). Ранее [3] предложена нелинейная модель для изучения поперечных упругофрикционных колебаний опор шасси и самолета в целом. При ее построении приняты следующие основные допущения:

самолет представлен механической системой двух тел (корпус и главные опоры), которые соединены связью, обладающей податливостью лишь при поперечном относительном смещении тел механической системы;

продольная скорость самолета и угол рыскания продольной оси фюзеляжа постоянны;

поперечная составляющая сил трения на катящихся колесах описана в рамках гипотезы нелинейного увода [4].

В настоящей работе в дополнение к [3] принято допущение об отсутствии колебаний корпуса самолета и с помощью математической модели изучены поперечные упругофрикционные колебания опор шасси в околокритическом диапазоне углов увода. Допущение об отсутствии колебаний корпуса принимается также при рассмотрении явления шимми колес, оно равносильно требованию бесконечно большой массы корпуса по сравнению с массой опор шасси. При изучении этой технической проблемы получены некоторые результаты, касающиеся произвольных одномерных механических систем с нелинейным трением.

Аппроксимация характеристики трения. Нелинейность модели обусловлена нелинейностью зависимости эффективного коэффициента поперечной составляющей силы трения на катящемся колесе от угла увода φ:

$$\mu_*(\varphi) = \mu_{\max} f(\varphi), \tag{1}$$

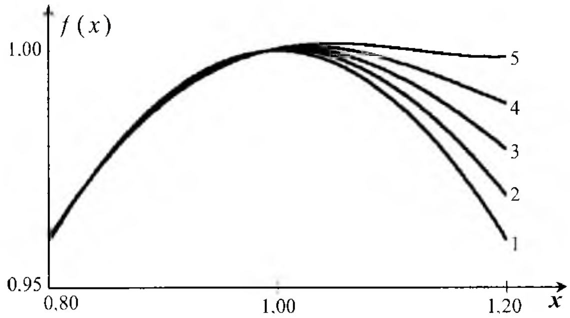

Рис. 1. Характеристики трения.

где μ_* и μ_{max} – эффективный коэффициент трения и его максимальное значение; $f(\varphi)$ – нечетная нелинейная функция эффективного коэффициента трения, $f \in [-1, 1]$. До значения критического угла φ_* она монотонно увеличивается, далее либо остается постоянной, либо уменьшается. Исследуем колебания при положительных углах увода вблизи его критического значения и в выражении (1) перейдем к переменной $x = \varphi/\varphi_*$. Положим $x \in [x_1 = 0{,}8,\ x_2 = 1{,}2]$, и в указанном диапазоне относительных углов увода рассмотрим пять характеристик трения $f(x)$ (на рис. 1 кривые *1–5*), первую из которых опишем квадратичной функцией

$$f(x) = 2x - x^2, \tag{2}$$

остальные – полиномами пятой степени:

$$f(x) = \sum_{i=0}^{5} \mu_i x^i. \tag{3}$$

В таблице приведены коэффициенты μ_i и среднее значение C_0 функции $f(x)$ на вышеуказанном отрезке,

$$C_0 = (x_2 - x_1)^{-1} \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx.$$

Для характеристики трения *1* (рис. 1) имеем $C_0 = C_{01} = 0{,}9867$. Характеристики трения показаны на рис. 1 и соответствуют теоретико-экспериментальным данным [5–8]. (Цифры на кривых рис. 3–5 соответствуют номерам характеристик трения.) Заметим, что полиномы (3) являются аппроксимациями четырех кривых однопараметрического семейства кусочно-параболических кривых:

$$f = \kappa + (1 - \kappa)(2x - x^2), \tag{4}$$

где κ – постоянный параметр,

$$\kappa = 0 \quad \text{при} \quad x \in [x_1, 1] \quad \text{и} \quad 0 \le \kappa \le 1 \quad \text{при} \quad x \in [1, x_2].$$

Коэффициенты характеристик трения

№ характеристики на рис. 1	μ_0	μ_1	μ_2	μ_3	μ_4	μ_5	C_0
2	0,5071	0,1417	1,3237	−0,8632	−0,3600	0,2509	0,9883
3	0,3662	0,5430	1,0705	−1,0252	−0,1873	0,2330	0,9899
4	0,3433	0,5912	1,0490	−0,9552	−0,3514	0,3235	0,9916
5	0,2954	0,6863	1,0877	−1,0931	−0,3427	0,3669	0,9932

Для характеристик *2*, *3*, *4*, *5* параметр κ равен соответственно 0,25; 0,5; 0,75 и 1,0. Заметим также, что если в выражении (4) положить $\kappa = 0$, то получим формулу (2). Таким образом, в докритическом диапазоне углов увода все пять кривых близки к параболе. При $\kappa = 1$ характеристика $f(x)$, описываемая уравнением (4), на втором участке вырождается в прямую, параллельную оси относительных углов. Характеристика *1* состоит из двух симметричных ветвей, остальные – из несимметричных.

Механическая модель колебаний шасси самолета. Рассмотрим самолет как систему двух разновеликих тел. Большее тело (корпус) совершает равномерное прямолинейное поступательное движение с постоянными и равными углами рыскания продольной оси ψ и скоростного рыскания ψ_a (рис. 2). Оси *OXYZ* являются неподвижными земными осями. Плоскость *OXZ* есть плоскость полотна ВПП. Угол ψ таков, что оси *OX* и *OZ* параллельны продольной и поперечной осям корпуса самолета соответственно, и путевая скорость корпуса на всем участке движения совпадает с линией заданного пути – осью ВПП, которая на рис. 2 показана штриховой линией.

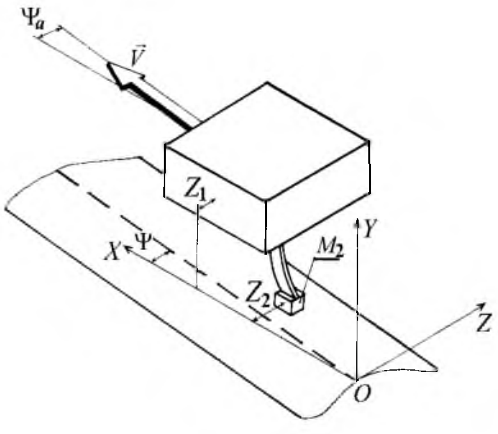

Рис. 2. Механическая модель колебаний шасси самолета.

Запишем уравнение поперечного движения меньшего тела – опоры шасси:

$$M_2 \ddot{Z}_2 + C(Z_2 - Z_1) = -R\,\mathrm{sgn}(\dot{Z}_2). \tag{5}$$

Здесь M_2 – масса опоры шасси; Z_1, Z_2 – координаты корпуса и опоры шасси соответственно; C – жесткость внутренней связи между корпусом и опорой; точка указывает на дифференцирование по времени t; R – поперечная составляющая трения между колесами и полотном ВПП,

$$R = \mu_{\max} f(\varphi) N,$$

где N – нормальная реакция полотна ВПП. Функция $Z_1(t)$ известна, $Z_1 = \dot{Z}_1 t$, $\dot{Z}_1 = \text{const}$. Перепишем уравнение (5) как систему двух дифференциальных уравнений первого порядка и введем в рассмотрение безразмерные фазовые переменные:

$$d\varphi/d\tau = z - Ef(\varphi); \quad dz/d\tau = W - \varphi. \tag{6}$$

Фазовыми переменными являются угол увода колес шасси φ и безразмерная поперечная деформация опор z:

$$\varphi = \dot{Z}_2/V; \quad z = \omega(Z_1 - Z_2)/V,$$

$V = \text{const}$ – скорость пробежки, или путевая скорость самолета (рис. 2); $\omega = (C/M_2)^{1/2}$ – собственная частота колебаний опоры шасси. В (6): E, W – постоянные положительные параметры задачи; $\tau = \omega t$ – безразмерное время. Параметр E прямо пропорционален $\mu_{\max}$ и стремится к нулю при приближении V к скорости отрыва:

$$E = (\mu_{\max} N)/(M_2 \omega V). \tag{7}$$

Параметр $W = \text{arctg}(\dot{Z}_1/V) \approx \dot{Z}_1/V = \psi$.

Предположим, что самолет выполняет пробежку в течение времени $\Delta t = 5...10$ с на скорости V, близкой к скорости отрыва. (В [1] установлено, что поломка произошла после колебаний, длившихся 6 с.) Для удобства оценки порядка параметра E перепишем формулу (7) в виде

$$E = (\mu_{\max} Ng)/(mG\omega V),$$

где $g = 9{,}8$ м/с^2; G – вес самолета; m – отношение массы опоры шасси к массе самолета. При $m = 0{,}03$, $\omega = 10$ Гц, $V = 55{,}6$ м/с получим

$$E = 0{,}1 \mu_{\max} N/G. \tag{8}$$

Максимальное значение эффективного коэффициента трения зависит от состояния полотна ВПП и имеет порядок ≤ 1. При скоростях, близких к скорости отрыва (вторая половина разбега или первая пробега), отношение $N/G << 1$, откуда следует, что $E << 1$. Этот вывод допускает использование метода усреднения [9] для получения аналитических решений системы (6). Как показывают расчеты, для каждого типа самолета можно указать такую скорость пробежки V_*, близкую к скорости отрыва, при которой безразмерная деформация численно равна размерной, выраженной в метрах. Это позволяет по значениям z судить о степени поперечного нагружения опор шасси.

Уравнения (6), дополненные зависимостями (2) или (3), являются нелинейной математической моделью упругофрикционных поперечных колебаний опор шасси относительно корпуса бесконечной массы. В данной работе с помощью указанной модели исследуются колебания в околокритическом диапазоне углов увода с целью выяснения причин, снижающих ресурс деталей самолетов.

Амплитудно-фазовые уравнения. Функцию $f(x)$ на отрезке $x \in [x_1, x_2]$ представим рядом Фурье:

$$f(x) = C_0 + \sum_{k=1}^{n} [C_k \cos(b_k x) + S_k \sin(b_k x)], \tag{9}$$

где C_0, C_k, S_k, b_k – известные постоянные. Значения C_0 приведены в таблице, остальные постоянные могут быть найдены по известным формулам теории рядов Фурье, однако для дальнейших расчетов важна лишь принципиальная возможность представления (9). Перепишем исходные уравнения (6) в виде

$$dx/d\tau = y - \varepsilon\Delta(x); \qquad dy/d\tau = w - x, \tag{10}$$

где $\varepsilon = E/\varphi_*$; $w = W/\varphi_*$; $y = z/\varphi_* - \varepsilon C_0$; $\Delta(x) = f(x) - C_0$. Заметим, что w является параметром поперечной скорости корпуса $\dot{Z}_1$.

Положим $\varepsilon = 0$ и найдем порождающее решение системы уравнений (10):

$$x = a \sin\theta + w; \quad y = a\cos\theta, \quad \theta = \tau + \vartheta, \tag{11}$$

где a, ϑ – некоторые постоянные. Заметим, что амплитудное значение деформации z равно $A = a\varphi_*$. Решение системы (10) ищем в виде (11), но при этом под символами a, ϑ будем понимать искомые функции времени. Подставив (11) и (9) в (10), после известных элементарных преобразований получим

$$\begin{aligned} \frac{da}{d\tau} &= -\varepsilon \sin\theta \sum_{k=1}^{n} \{C_k \cos[b_k(w + a\sin\theta)] + S_k \sin[b_k(w + a\sin\theta)]\}; \\ \frac{a d\vartheta}{d\tau} &= -\varepsilon \cos\theta \sum_{k=1}^{n} \{C_k \cos[b_k(w + a\sin\theta)] + S_k \sin[b_k(w + a\sin\theta)]\}. \end{aligned} \tag{12}$$

Выражение в фигурных скобках равно

$$\{\ldots\} = C_{*k} \cos(b_k a \sin\theta) + S_{*k} \sin(b_k a \sin\theta), \tag{13}$$

где

$$C_{*k} = C_k \cos(b_k w) + S_k \sin(b_k w); \qquad S_{*k} = -C_k \sin(b_k w) + S_k \cos(b_k w).$$

Что касается полноты математической модели, то системы (10) и (12) – эквивалентны. Усредним правые части уравнений (12) по полному фазовому углу θ. При этом учтем (13) и то, что для произвольных a, θ справедливы разложения [10]:

$$\begin{aligned} &\cos(a\sin\theta) = J_0 + 2J_2(a)\cos(2\theta) + 2J_4(a)\cos(4\theta) + \ldots; \\ &\sin(a\sin\theta) = 2J_1\sin(\theta) + 2J_3(a)\sin(3\theta) + 2J_5(a)\sin(5\theta) + \ldots . \end{aligned} \tag{14}$$

Здесь и далее J_k – функция Бесселя первого рода порядка “k”.

После усреднения получим приближенные амплитудно-фазовые уравнения:

$$\frac{da}{d\tau} = -\varepsilon\sum_{k=1}^{n} S_{*k}J_1(b_k a); \qquad \frac{d\vartheta}{d\tau} = 0. \tag{15}$$

Второе из уравнений (15) указывает на постоянство угла ϑ. Остановимся на первом уравнении. Запишем функцию Бесселя в виде ряда [10]:

$$J_1(b_k a) = b_k a/2 - (b_k a/2)^3/(1^2\cdot 2) + (b_k a/2)^5/(1^2\cdot 2^3\cdot 3) - \ldots . \tag{16}$$

Подставив (16) в рассматриваемое уравнение, получим

$$da/d\tau = -\varepsilon\Phi(a); \qquad \Phi(a) = \mu_1^*(a/2) + \mu_3^*(a^3/16) + \mu_5^*(a^5/384) - \ldots , \tag{17}$$

где

$$\mu_1^* = \sum_{k=1}^{n} S_{*k}b_k, \quad \mu_3^* = -\sum_{k=1}^{n} S_{*k}b_k^3, \quad \mu_5^* = \sum_{k=1}^{n} S_{*k}b_k^5, \ \ldots . \tag{18}$$

Сравнение выражений (9) и (18) показывает, что

$$\mu_i^* = \partial^i f/\partial x^i\big|_{x=w}, \quad i = 1, 3, 5, \ldots . \tag{19}$$

Таким образом, при $\varepsilon << 1$ и произвольной аналитической функции $f(x)$ уравнение амплитуд имеет вид (17), где коэффициенты μ_i^* определяются выражениями (19).

Определение параметров автоколебаний шасси. Колебания опор шасси исследуем с помощью уравнения (17). Автоколебания возможны, если уравнение

$$\Phi(a) = 0 \tag{20}$$

имеет ненулевые вещественные корни. Графики функций $\Phi(a)$ для $w = 0{,}95$ (штриховые линии) и $w = 1{,}05$ (сплошные линии) построены на рис. 3.

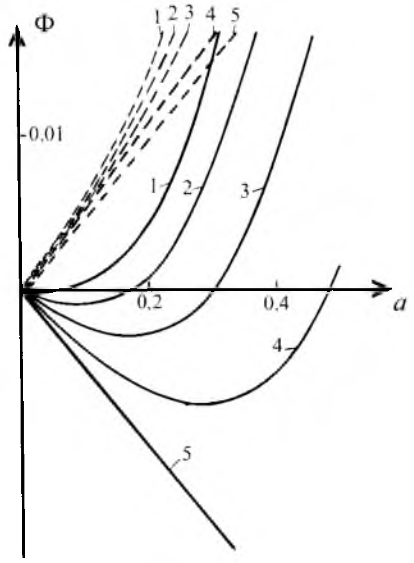

Рис. 3. Графики функций Ф(a).

Устойчивость предельного цикла оценим по знаку производной $d\Phi/da$ при $a = a_*$, где a_* – ненулевой вещественный корень уравнения (20). Если производная положительна, то предельный цикл устойчив, и a_* есть амплитуда автоколебаний [11]. Таким образом, можно заключить, что автоколебания имеют место, если характеристика $f(x)$ не является параболой и $w > 1$. С учетом отношения скорости предельно допускаемого строго бокового ветра к скорости отрыва приходим к выводу, что параметр поперечной скорости корпуса w может превышать единицу.

Остановимся на определении корней a_*. Перепишем уравнение (20) в ином виде:

$$\Phi(a) = aF(a^2)/2, \quad F = pa^4 + qa^2 + c, \tag{21}$$

где $p = \mu_5^*/192$; $q = \mu_3^*/8$; $c = \mu_1^*$. Для нахождения амплитуд автоколебаний a_* необходимо решить биквадратное уравнение $F = 0$. Если характеристика $f(x)$ является параболой, то $p = q = 0$. На рис. 4 приведены графики $a_*(w)$, при построении которых требовалось выполнение системы неравенств:

$$a_* + w \le 1{,}2; \quad -a_* + w \ge 0{,}8.$$

Переходные процессы. Поскольку при выполнении штатного разбега (пробега) время движения самолета на большой скорости невелико, особую важность приобретает вопрос о продолжительности переходных процессов. Для их изучения обратимся к уравнению (17). С учетом (21) после разделения переменных получим

$$d(a^2)/[a^2F(a^2)] = -\varepsilon d\tau. \tag{22}$$

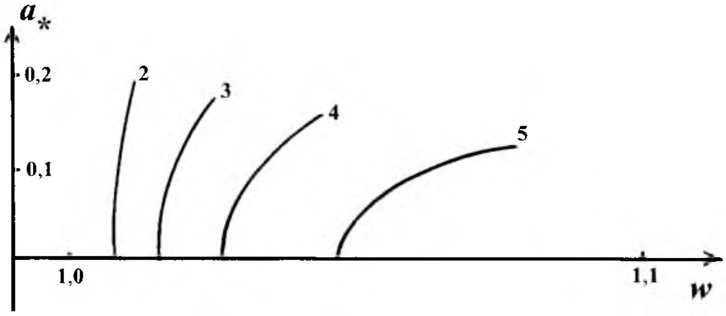

Рис. 4. Зависимость амплитуды автоколебаний шасси a_* от параметра поперечной скорости корпуса w.

Далее после интегрирования для параболы (на рис. 1 характеристика *1*) получим

$$a_1(T) = a_0 \exp(-cT/2); \qquad T_1 = (2/c)\ln(a_0/a_k). \tag{23}$$

Здесь и далее a_i – амплитуда для соответствующей характеристики (рис. 1); a_0, a_k – начальная и конечная амплитуды колебаний; $T = \varepsilon\tau$ – параметр времени; T_i – время выхода на амплитуду a_k. Из соотношений (23) видно, что при $c > 0$ (восходящая ветвь параболы) колебания затухают, при $c = 0$ – амплитуды неизменны, при $c < 0$ (нисходящая ветвь) – колебания нарастают. Для характеристик *2–5* (рис. 4) получим [12]

$$\begin{cases} T_i = T_{i1} + T_{i2}, \ i = 2, 3, 4, 5; \\ T_{i1} = (0{,}5/c)\ln[(a_0/a_k)^4 |F_k/F_0|]; \\ T_{i2} = -[p/(2cD)]\ln[|(F_{10}/F_{1k})(F_{2k}/F_{20})|]; \\ F_k = F(a^2 = a_k^2); \quad F_0 = F(a^2 = a_0^2); \quad D = [(q^2 - 4pc)]^{1/2}; \\ F_{1k} = 2pa_k^2 + q - D; \quad F_{2k} = 2pa_k^2 + q + D; \\ F_{10} = 2pa_0^2 + q - D; \quad F_{20} = 2pa_0^2 + q + D. \end{cases} \tag{24}$$

Заметим, что при $p = q = 0$ имеем $T_{i1} = T_1$.

С помощью формул (23), (24) найдем значения $w_i = w_{i*}$ $(i = 2, 3, 4, 5)$, при которых амплитуды автоколебаний a_{i*} будут равны заданному значению. (Первое приближение искомых параметров можно установить по рис. 4.) Пусть $a_{i*} = 0{,}1$. Тогда получим $w_{2*} = 1{,}00866$, $w_{3*} = 1{,}01856$, $w_{4*} = 1{,}03357$, $w_{5*} = 1{,}06461$. С использованием формулы (24) построим графики переходных процессов для автоколебаний с установившейся амплитудой $a_{i*} = 0{,}1$ (рис. 5). На рис. 5 для сравнения по формуле (23) построены графики раскачки системы в случае параболической характеристики трения.

С учетом формулы (8) оценим интервал параметра безразмерного времени ΔT, соответствующего интервалу реального времени Δt. В развернутом виде

$$\Delta T = \left(0{,}1\mu_{\max}\omega \frac{N}{G\varphi_*}\right)\Delta t.$$

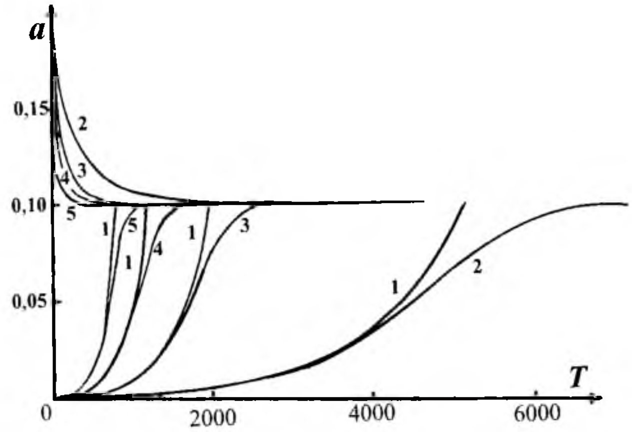

Рис. 5. К установлению заданной амплитуды автоколебаний шасси.

Угол φ_* имеет порядок 0,1...0,2 рад; коэффициент $\mu_{\max}$ в зависимости от наличия влаги на ВПП составляет 0,1...1,0. Пусть $\Delta t = 1$ с, $\varphi_* = 0{,}15$ рад, $\mu_{\max} = 0{,}5$, $\omega = 10$ Гц. При этом получим, что реализуемый интервал параметра безразмерного времени ΔT составит примерно $7\pi N/G$, где $N/G << 1$.

С помощью численного интегрирования методом Рунге-Кутта уравнений (10) оценим порядок величины ε, при которой амплитудное уравнение (17) дает приемлемые результаты. Начальные значения переменных x, y обозначим через x_0, y_0 соответственно. Положим $w = w_*$, $x_0 = w$, $y_0 = 1{,}2 - w$. Данные численного интегрирования сопоставим с полученными по формулам (24). Проверка показала, что даже при $\varepsilon = 1$ результаты, полученные с помощью уравнения (17), верны.

Таким образом, в данной работе изучены упругофрикционные колебания опор шасси самолета относительно корпуса бесконечно большой массы, совершающего равномерное движение с большой скоростью. Установлено (рис. 4), что вероятно возникновение автоколебаний с амплитудами деформаций до 4 см. Такие колебания являются опасными и могут привести к усталостным разрушениям деталей отсека шасси. Кроме того, при учете конечности массы корпуса указанные колебания обусловливают интенсивный характер поперечных колебаний частей самолета, парциальная частота которых близка к собственной частоте колебаний опор шасси. Если начальное значение a несколько отличается от амплитуды a_*, то реализуется малый участок переходного процесса, подобный изображенным на рис. 5.

Обнаружено, что в ходе первой половины пробега либо второй половины разбега возникают условия, при которых поперечные упругофрикционные колебания опор шасси протекают аналогично колебаниям в линейной системе без затухания. Теоретически изучено поведение одномерной механической системы при нелинейном немонотонном трении, которое зависит от скорости. Для произвольной аналитической функции трения получены амплитудно-фазовые уравнения. Показано различие в поведении систем в околокритическом диапазоне скоростей при симметричных и несимметричных участках характеристики трения до и после критического значения скорости.

Резюме

У рамках гіпотези нелінійного відведення теоретично вивчено поперечні пружнофрикційні коливання шасі відносно корпусу нескінченної маси при русі літака по злітно-посадочній смузі з великою швидкістю. Отримано наближені амплітудно-фазові рівняння, які описують коливання в одновимірних механічних системах при довільних аналітичних характеристиках тертя, що залежить від швидкості.

1. *Den Hertog R.* Problem solved // Aircraft Eng. – 1990. – **62**, No. 12. – P. 2 – 4.
2. *Van der Valk R. and Pacejka H. B.* An analysis of a civil main gear shimmy failure // Vehicle System Dynamics. – 1993. – **22**. – P. 97 – 121.
3. *Плахтиенко Н. П., Шифрин Б. М.* Поперечные упруго-фрикционные вибрации движущегося по взлетно-посадочной полосе самолета // Прикл. механика. – 2001. – **37**, № 5. – С. 136 – 143.
4. *Левин М. А., Фуфаев Н. А.* Теория качения деформируемого колеса. – М.: Наука, 1989. – 272 с.
5. *Лигум Т. И., Скрипченко С. Ю., Шишмарев А. В.* Аэродинамика самолета Ту-154Б. – М.: Транспорт, 1985. – 263 с.
6. *Бычков Ю. Л.* Определение величины коэффициента сцепления авиашин с искусственной взлетно-посадочной полосой: Тр. ГосНИИГА. – 1985. – Вып. 233. – С. 34 – 38.
7. *Санников В. А.* Определение характеристик боковой сцепляемости колес по результатам летных испытаний // Там же. – 1980. – Вып. 192. – С. 111 – 119.
8. *Davis P. A., Martinson V. J., Yager T. J.,* and *Stubbs S. M.* 26×6,6 radial-belted aircraft tire performance // SAE Techn. Pap. Ser. – 1991. – No. 912157. – 9 p.
9. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. – М.: Физматгиз, 1963. – 412 с.
10. *Dwight H. B.* Tables of Integrals and Other Mathematical Data. – New York: The Macmillan company, 1961. – 228 p.
11. *Обморшев А. Н.* Введение в теорию колебаний. – М.: Наука, 1965. – 276 с.
12. *Брычков Ю. А., Маричев О. И., Прудников А. П.* Таблицы неопределенных интегралов. – М.: Наука, 1986. – 192 с.

Поступила 26. 12. 2000