УДК 517.972/974

В.С. САЖЕНЮК

НАБЛИЖЕНИЙ МЕТОД РОЗВ'ЯЗУВАННЯ КЛАСУ НЕЛІНІЙНИХ ВАРІАЦІЙНИХ НЕРІВНОСТЕЙ З ОБМЕЖЕННЯМ НА ГРАНИЦІ ОБЛАСТІ

Abstract: *The method of the numeral solution for the class of nonlinear variational inequalities with restriction on the boundary of domain which is based on application of methods of fictitious region and grids is proposed. Theorems of convergence of the method and estimations of velocity of convergence are given.*
Key words: *variational inequality, method of fictitious regions, difference scheme.*

Анотація: *Для розв'язування класу нелінійних варіаційних нерівностей з обмеженням на границі довільної області пропонується чисельний метод, який базується на застосуванні методів фіктивних областей та сіток. Дається обґрунтування методу у вигляді теорем про збіжність. Отримані оцінки швидкості збіжності.*
Ключеві слова: *варіаційна нерівність, метод фіктивних областей, різницева схема.*

Аннотация: *Для решения класса нелинейных вариационных неравенств с ограничением на границе произвольной области предлагается численный метод, который основан на применении методов фиктивных областей и сеток. Дается обоснование метода в виде теорем о сходимости. Получены оценки скорости сходимости.*
Ключевые слова: *вариационное неравенство, метод фиктивных областей, разностная схема.*

1. Вступ

До необхідності вивчення нерівностей з частинними похідними спонукає багаточисельний клас задач механіки, фізики, математичної фізики, економіки та теорії керування [1, 2]. Являючи собою екстремальні задачі на більш вузькій множині функцій ніж звичайно у випадку крайових задач, варіаційні нерівності можуть бути записані у вигляді крайових задач для операторів з частинними похідними з додатковими обмеженнями на розв'язок у вигляді нерівностей. Саме наявність обмежень не дає змоги прямо застосовувати до таких задач методи дискретизації (скінченно-різницевої апроксимації або методу скінченних елементів), які з успіхом використовуються при розв'язуванні крайових задач. Те ж саме стосується і методу фіктивних областей, який є досить ефективним і широко застосовується при побудові різницевих схем для крайових задач у випадку областей складної геометрії. З другого боку, пряме використання стандартних методів нелінійного програмування не завжди є ефективним з точки зору використання машинного часу [2]. Це спонукає до розробки чисельних методів, орієнтовних на розв'язування варіаційних нерівностей, які об'єднували у собі простоту, ефективність та універсальність методів скінченно-різницевої апроксимації та фіктивних областей.

Автором, спільно з Гаврилюком І.П. та Войцеховським С.О. [3], було запропоновано наближений метод розв'язування варіаційних нерівностей, який базується на застосуванні разом з методами скінченно-різницевої апроксимації та фіктивних областей методу штрафу. На протязі певного відрізку часу цей метод було вивчено щодо деяких класів еліптичних та параболічних нерівностей з обмеженнями в середині та на границі області [3 – 6]. Використання комбінації методів штрафу та фіктивних областей дає можливість будувати ефективні чисельні алгоритми, зокрема, за методом сіток, для розв'язування класів варіаційних нерівностей у випадку складної геометрії області. В той же час клас еліптичних нелінійних варіаційних нерівностей з обмеженням на границі області з цього погляду раніше не досліджувався. Прикладами практичних задач, що зводяться до варіаційних нерівностей з обмеженням на границі області, є задачі про рух рідини в області, обмеженій напівпроникною мембраною, та деякі задачі оптимального керування. Основними складнощами, з якими доводиться стикатися при побудові та обґрунтуванні різницевих схем, отриманих за допомогою методів штрафу, фіктивних областей та сіток, є побудова дискретної задачі та дослідження збіжності послідовності наближених розв'язків і отримання оцінок швидкості збіжності. Це викликано, перш за все, наявністю обмежень у вигляді нерівностей, приналежністю розв'язків задач з обмеженнями класу узагальнених функцій та присутністю в різницевій схемі двох або трьох малих параметрів, які потребують узгодження. Питання побудови різницевих схем та отримання узгоджених оцінок швидкості збіжності для крайових задач з узагальненими розв'язками детально досліджені у книзі [7].

2. Постановка задачі

Нехай $\Omega \in R^2$ – обмежена, однозв'язна область з границею Γ.

$$a(v_1, v_2) = \int\limits_{\Omega} (\sum_{i=1}^{2} a_i(x) \frac{\partial v_1}{\partial x_i} \frac{\partial v_2}{\partial x_i} + a_0(x) v_1 v_2) dx ,$$

$$(v_1, v_2) = \int\limits_{\Omega} v_1 \cdot v_2 dx , \ \forall v_1 v_2 \in W_2^1(\Omega), \ \ a_i(x) \in W_\infty^1(\Omega) , \ a_i(x) \ge a_i > 0 , \ \ i = 0,1,2 ,$$

$$\exists \mu > 0 : a(v \ \ , v \ \ ) \ge \mu \|v\|^2_{W_2^1(\Omega)} , \forall v \in W_2^1(\Omega) .$$

Крім того, $\exists M_1 > 0$, така, що

$$|a(v_1, v_2)| \le M_1 \|v_1\|_{W_2^1(\Omega)} \cdot \|v_2\|_{W_2^1(\Omega)} , \forall v_1, v_2 \in W_2^1(\Omega) ,$$

(через $M_i \ (i = 1,2...)$ будемо позначати додатні сталі, які не залежать від h та δ).

Розглянемо варіаційну нерівність:

$$u \in \mathrm{K} , \ a(u, v - u) + (F(x,u), v - u) \ge 0, \qquad \forall v \in \mathrm{K} , \tag{1}$$

де $\mathrm{K} = \{v \mid v \in W_2^1(\Omega), v \ge 0 , \mathrm{x} \in \Gamma\}$, функція $F(x,u)$ – вимірна, $\exists f(x) \in L_2(\Omega) \Rightarrow$

$$|F(x,u)| \le M_2 f(x) , \ \exists M_3 > 0 : \left| \frac{\partial F}{\partial u} \right| \le M_3 ,$$

$$(F(x, v_1) - F(x, v_2))(v_1 - v_2) \ge 0, \forall v_1, v_2 \in W_2^1(\Omega). \tag{2}$$

При виконанні умов (2) задача (1) має єдиний розв'язок, що належить простору $W_2^2(\Omega)$ [1]. Варіаційна нерівність (1) еквівалентна наступній крайовій задачі з обмеженнями на границі області:

$$Au = -F(x,u), \quad x \in \Omega \ , \tag{3}$$

$$u \ge 0, \quad \frac{\partial u}{\partial \vartheta} \ge 0, \quad u \cdot \frac{\partial u}{\partial \vartheta} = 0, \quad x \in \Gamma \ ,$$

де $Av = -\sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} a_i(x) \frac{\partial v}{\partial x_i} + a_0(x)v$ – оператор, зв'язаний з формою $a(u,v)$;

$$\frac{\partial u}{\partial \vartheta} = \sum_{j=1}^{2} a_j \frac{\partial u}{\partial x_j} \cos(n, x_j) \ .$$

3. Основні результати

Апроксимуємо задачу (1) за методом фіктивних областей. Доповнимо область Ω деякою областю Ω_1 до прямокутника Ω_0 з границею Γ_0. В області Ω_0 розглянемо задачу:

знайти функцію $u_\delta \in \overset{0}{W}{}_2^1(\Omega_0)$ таку, що

$$a_\Omega(u_\delta, v) + \int_\Omega a_0 u_\delta v dx + \delta \int_{\Omega_1} (\sum_{i=1}^{2} \frac{\partial u_\delta}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i}) dx - \frac{1}{\delta^2} \int_\Gamma u_\delta^- \cdot v dx + + \int_\Omega F(x, u_\delta) v dx = 0, \quad \forall v \in \overset{0}{W}{}_2^1(\Omega_0), \tag{4}$$

де функції $a_0(x)$ та $F(x, u_\delta)$ – продовжені в область Ω_1 нулем;

$$a_\Omega(v_1, v_2) = \int_\Omega (\sum_{i=1}^{2} a_i(x) \frac{\partial v_1}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial v_2}{\partial x_i}) dx \,,\ u_\delta^- = 0{,}5 u_\delta (signu_\delta - 1) \,,\ \delta > 0 \,.$$

Використовуючи результати робіт [8, 9], можна довести, що мають місце нерівності

$$\|u_\delta\|_{W_2^2(\Omega)} \le M_4 \|f\|_{L_2(\Omega)} \,,\ \|u_\delta\|_{W_2^2(\Omega_1)} \le M_5 \delta^{-\frac{1}{2}} \|f\|_{L_2(\Omega)} \,.$$

Крім того, [10] $u_\delta \in \overset{0}{W}{}_2^{\frac{3}{2}}(\Omega_0)$ і

$$\|u_\delta\|_{W_2^{\frac{3}{2}}(\Omega_0)} \le M_6 \delta^{-\frac{1}{2}} \|f\|_{L_2(\Omega)} \,. \tag{5}$$

Теорема 1. Розв'язок задачі (4) збігається при $\delta \to 0$ до розв'язку варіаційної нерівності (1), при чому має місце оцінка

$$\|u - u_\delta\|_{W_2^1(\Omega)} \le M_7 \delta \|f\|_{L_2(\Omega)} \,. \tag{6}$$

Доведення. Позначимо через $\varphi(x)$ функцію, яка є розв'язком наступної крайової задачі

$$A\varphi = -F(x, \varphi), \quad x \in \Omega \,, \tag{7}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \vartheta} - \frac{1}{\delta^2} \varphi^- = 0, \quad x \in \Gamma \ .$$

Узагальнена постановка задачі (7) має вигляд:

$$a_{\Omega}(\varphi,v)+\int_{\Omega}a_0\varphi v dx-\frac{1}{\delta^2}\int_{\Gamma}\varphi^- v dx=-\int_{\Omega}F(x,\varphi)v dx\,,\quad \forall v\in \overset{0}{W}{}_2^1(\Omega_0)\,. \tag{8}$$

Оскільки $\varphi\in W_2^2(\Omega)$, то з (7) можна отримати оцінку

$$\left\|\varphi^-\right\|_{L_2(\Gamma_T)}\leq M_8\delta^2\cdot\left\|f\right\|_{L_2(\Omega_T)}. \tag{9}$$

Віднімемо (3) з (7). Тоді для функції $w(x)=\varphi\ (x)-u\ (x)$ матимемо задачу:

$$Aw=-(F(x,u)-F(x,\varphi)),\qquad x\in\Omega\,;$$

$$w\cdot\frac{\partial w}{\partial\vartheta}=\varphi\cdot\frac{\partial w}{\partial\vartheta}-\frac{\partial\varphi}{\partial\vartheta}\cdot u,\qquad x\in\Gamma\,.$$

Звідси, з урахуванням умов (2), випливає нерівність

$$\|w\|^2_{W_2^1(\Omega\ )}\leq\ M_9\int_{\Gamma}(\varphi\cdot\frac{\partial w}{\partial\vartheta}-\frac{\partial\varphi}{\partial\vartheta}\cdot u)dx\,. \tag{10}$$

Оскільки $\int\limits_{\Gamma\backslash}\frac{\partial\varphi}{\partial\vartheta}\cdot udx=\frac{1}{\delta^2}\int\limits_{\Gamma}\varphi^- udx\geq 0$, то

$$\int_{\Gamma}(\varphi\cdot\frac{\partial w}{\partial\vartheta}-\frac{\partial\varphi}{\partial\vartheta}\cdot u)dx\leq\int_{\Gamma}\varphi\cdot\frac{\partial w}{\partial\vartheta}dx=\int_{\Gamma}(\varphi\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial\vartheta}-\frac{\partial u}{\partial\vartheta}\cdot\varphi\ )dx=\frac{1}{\delta^2}\int_{\Gamma}\varphi^-\varphi dx-$$

$$-\int_{\Gamma}\varphi\ \cdot\frac{\partial u}{\partial\vartheta}dx\leq-\int_{\Gamma}\varphi\cdot\frac{\partial u}{\partial\vartheta}dx=-\int_{\Gamma}\varphi^+\cdot\frac{\partial u}{\partial\vartheta}dx+\int_{\Gamma}\varphi^-\cdot\frac{\partial u}{\partial\vartheta}dx\leq\int_{\Gamma}\varphi^-\cdot\frac{\partial u}{\partial\vartheta}dx\leq$$

$$\leq\left\|\frac{\partial u}{\partial\vartheta}\right\|_{L_2(\Gamma\ )}\cdot\left\|\varphi^-\right\|_{L_2(\Gamma\ )}$$

(ми скористались очевидними нерівностями $\varphi\cdot\varphi^-\leq 0$, $u\ \cdot\varphi^-\geq 0$ та формулою $\varphi^+=\varphi\ +\varphi^-$).

Враховуючи приналежність функції $u(x)$ простору $W_2^2(\Omega)$, в силу якої $\left\|\frac{\partial u}{\partial\vartheta}\right\|_{L_2(\Gamma)}\leq M_{10}\cdot\left\|f\right\|_{L_2(\Omega)}$, а також оцінку (10) , тепер знайдемо

$$\left\|u-\varphi\right\|_{W_2^{1,0}(\Omega\ )}\leq M_{11}\delta\cdot\left\|f\right\|_{L_2(\Omega)}\ . \tag{11}$$

Розглянемо $\overline{\varphi}(x)$, яка визначається таким чином:

$$\overline{\varphi}(x)=\begin{cases}\varphi(x),x\in\Omega\\ \psi(x),x\in\Omega_1\end{cases},$$

де $\psi(x)\in W_2^2(\Omega_1)$ – єдиний розв'язок задачі Діріхле;

$$\Delta\psi = 0, x\in \Omega_1,$$

$$\psi(x)=0, x\in \Gamma_0,\ \psi(x)=\varphi(x), x\in \Gamma\ . \qquad (12)$$

Зрозуміло, що для функції $\psi(x)$ має місце оцінка

$$\|\psi\|_{W_2^2(\Omega_1)} \le M_{12}\|\varphi\|_{W_2^2(\Omega)} \le M_{13}\cdot\|f\|_{L_2(\Omega)}.$$

У подальшому будемо використовувати узагальнену постановку задачі (12):

$$\int_{\Omega_1}\left(\sum_{i=1}^{2}\frac{\partial\psi}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_i}\right)dx - \int_{\Gamma}\frac{\partial\psi}{\partial n}vdx = 0,\quad \forall v \in \overset{0}{W}{}_2^1(\Omega_0). \qquad (13)$$

Визначимо функцію $\omega=\overline{\varphi}-u_\delta$. Очевидно, $\overline{\varphi}\in \overset{0}{W}{}_2^1(\Omega_0)$, а, значить, $\omega\in \overset{0}{W}{}_2^1(\Omega_0)$.

Помножимо рівняння (13) на δ, додамо його до (8), а потім віднімемо з (4). Для функції ω отримаємо таке співвідношення:

$$a_\Omega(\omega,v)+\int_\Omega a_0\omega v dx+\delta\int_{\Omega_1}(\sum_{i=1}^{2}\frac{\partial\omega}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial v}{\partial x_i})dx+\int_\Omega(F(x,\varphi)-F(x,u_\delta))vdx+$$
$$+\frac{1}{\delta^2}\int_\Gamma(\varphi^- - u_\delta^-)vdx = -\delta\int_\Gamma\frac{\partial\psi}{\partial n}vdx,\ \forall v \in \overset{0}{W}{}_2^1(\Omega_0).$$

Покладемо в останній нерівності $v=\omega$ та скористаємось монотонністю функцій $F(x,v)$ та $\varphi^-(x)$. Після нескладних перетворень знайдемо

$$\|\omega\|^2_{W_2^1(\Omega)}+\delta|\omega|^2_{W_2^1(\Omega_1)} \le M_{14}\ \delta\left\|\frac{\partial\psi}{\partial\vartheta}\right\|_{L_2(\Gamma)}\|\omega\|_{L_2(\Gamma)}\ . \qquad (14)$$

У подальшому скористаємось нерівностями

$$\|\omega\|_{L_2(\Gamma)} \le M_{15}\|\omega\|_{W_2^2(\Omega)},\ \left\|\frac{\partial\psi}{\partial\vartheta}\right\|_{L_2(\Gamma)} \le M_{16}\cdot\|\psi\|_{W_2^2(\Omega_1)}.$$

З урахуванням цього з (14) випливає $\|\omega\|_{W_2^1(\Omega)} \le M_{17}\delta\cdot\|f\|_{L_2(\Omega)}$, а, значить, справедлива оцінка

$$\|\varphi-u_\delta\|_{W_2^1(\Omega)} \le M_{18}\delta\|f\|_{L_2(\Omega)}. \qquad (15)$$

Користуючись оцінками (11) та (15), отримаємо (6). Теорему доведено.

Розглянемо питання різницевої апроксимації варіаційної нерівності з обмеженням на границі області (3). У прямокутнику $\overline{\Omega}_0$ введемо рівномірну сітку $\overline{\omega}_0=\omega_0\cup\gamma_0$, де ω_0 – множина внутрішніх, а γ_0 – множина граничних вузлів відповідно. Позначимо: $g_\delta(v) = -\delta^{-2}v^-$. Задачу (4) апроксимуємо такою різницевою схемою:

$$-\sum_{i=1}^{2}(c_i y_{\bar{x}_i})_{x_i} + T_1T_2(\bar{a}_0)y + \int\limits_{\Gamma\cap e(x)} g_\delta(\tilde{y})\sigma_0\mu(x)dx = T_1T_2\bar{F}(\cdot,\tilde{y}),\ \mathrm{x}\in\omega_0, \qquad (16)$$

$$y(x) = 0, \qquad \mathrm{x}\in\gamma_0,$$

де $c_i(x) = P_iT_{3-i}(a_i^\delta(\cdot))$,

$$a_i^\delta(x) = \begin{cases} a_i(x), & x\in\Omega \\ \delta, & x\in\Omega_1 \end{cases}, \quad \bar{a}_0(x) = \begin{cases} a_0(x), & x\in\Omega \\ 0, & x\in\Omega_1 \end{cases}, \quad \bar{F}(x,\tilde{y}) = \begin{cases} F(x,\tilde{y}), x\in\Omega \\ 0, \qquad x\in\Omega_1 \end{cases},$$

$$P_\alpha v(\cdot) = \int_{-1}^{0} v(x_1 + (2-\alpha)th_1, x_2 + (\alpha-1)th_2)dt,$$

$$T_\alpha v(x) = \int_{-1}^{1}(1-|t|)v(x_1 + (2-\alpha)th_1, x_2 + (\alpha-1)th_2)dt,\ \alpha = 1,2$$

– усереднюючі оператори, $\tilde{y}(\varsigma)$ – полілінійне поповнення сіткової функції $y(x)$, $\sigma_0\mu(x)$ – слід ядра оператора $T = T_1\cdot T_2$ на границю, $e(x)$ – комірка сітки. Справедлива така теорема.

Теорема 2. Розв'язок різницевої схеми (16) $(\delta = h^{\frac{1}{5}})$ збігається при $h\to 0$ до розв'язку варіаційної нерівності (3), при цьому має місце оцінка

$$\|\tilde{y} - u_\delta\|_{W_2^1(\Omega)} \le M_{19}h^{\frac{1}{5}}\|f\|_{L_2(\Omega)}\ . \qquad (17)$$

Доведення. З (16), враховуючи (4), для похибки $z = y - u_\delta$ отримаємо задачу:

$$-\sum_{i=1}^{2}(c_i z_{\bar{x}_i})_{x_i} + T_1T_2(\bar{a}_0)z + \int\limits_{\Gamma\cap e(x)}(g_\delta(\tilde{y}) - g_\delta(\tilde{u}_\delta))\sigma_0\mu(x)dx + T_1T_2\bar{F}(\cdot,\tilde{y}) - T_1T_2\bar{F}(\cdot,\tilde{u}_\delta) =$$

$$= -\sum_{i=1}^{2}\eta_{ix_i}(x) + \eta_0(x) + \eta_1(x) + \eta_2(x), \qquad \mathrm{x}\in\omega_0; \qquad (18)$$

$$z(x) = 0, \qquad \mathrm{x}\in\gamma_0,$$

де

$$\eta_i(x) = P_iT_{3-i}(a_i^\delta(\cdot)(\frac{\partial u_\delta(\cdot)}{\partial x_i} - u_{\delta\bar{x}_i})), i = 1,2,\ \ \eta_0 = T_1T_2(\bar{a}_0(\cdot)(u_\delta(\cdot) - u_\delta(x)));$$

$$\eta_1(x) = \int\limits_{\Gamma\cap e(x)}(g_\delta(u_\delta(\cdot)) - g_\delta(\tilde{u}_\delta(\cdot)))\sigma_0\mu(x)dx\ ,\ \eta_2(x) = T_1T_2\bar{F}(\cdot,u_\delta(\cdot)) - T_1T_2\bar{F}(\cdot,\tilde{u}_\delta(\cdot))\ .$$

За допомогою методу енергетичних нерівностей, враховуючи монотонність функції $g_\delta(v)$, з (18) можна отримати оцінку

$$\|z\|^2_{W_2^1(\omega_0)}+(T_1T_2\overline{F}(\cdot,\tilde{y})-T_1T_2\overline{F}(\cdot,\tilde{u}_\varepsilon),z)_{\omega_0}\le$$

$$\le M_{19}\delta^{-1}[(\sum_{i=1}^{2}\|\eta_i\|_{L_2(\omega_0\cup\gamma_{+j})}+\|\eta_0\|_{L_2(\omega_0)}+\|\eta_2\|_{L_2(\omega_0)})\|z\|_{W_2^1(\omega_0)}+\left|(\eta_1,z)_{\omega_0}\right|].$$

Скориставшись очевидною рівністю

$$\sum_{x\in\omega}h_1h_2(T_1T(F(\cdot,\tilde{v}_1)-F(\cdot,\tilde{v}_2)))(v_1-v_2)=\int_\Omega(F(\cdot,\tilde{v}_1)-F(\cdot,\tilde{v}_2))(\tilde{v}_1-\tilde{v}_2)\mathrm{dx}$$

та монотонністю функції $F(x,v)$, отримаємо оцінку

$$\|z\|^2_{W_2^1(\omega_0)}\le M_{20}\delta^{-1}[(\sum_{i=1}^{2}\|\eta_i\|_{L_2(\omega_0\cup\gamma_{+j})}+\|\eta_0\|_{L_2(\omega_0)}+\|\eta_2\|_{L_2(\omega_0)})\|z\|_{W_2^1(\omega_0)}+\left|(\eta_1,z)_{\omega_0}\right|]. \qquad (19)$$

Доданки у правій частині останньої нерівності оцінимо за допомогою леми Брембла-Гільберта та умов (2):

$$\|\eta_i\|_{L_2(\omega\cup\gamma_{+j})}\le M_{21}\sqrt{h}\|u_\delta\|_{W_2^{\frac{3}{2}}(\Omega_0)},i=1,2;\quad \|\eta_0\|_{L_2(\omega_0)}\le M_{22}h\|u_\delta\|_{W_2^{\frac{3}{2}}(\Omega_0)},$$

$$\|\eta_2\|_{L_2(\omega_0)}\le M_{23}h^{\frac{3}{2}}\|u_\delta\|_{W_2^{\frac{3}{2}}(\Omega_0)}, \qquad (20)$$

$$|(\eta_1,z)_{\omega_0}|=|(\int_{\Gamma\cap e(x)}(g_\delta(u_\delta(\cdot))-g_\delta(\tilde{u}_\delta(\cdot)))\sigma_0\mu(x)dx,z)_{\omega_0}|\le\delta^{-2}\|u_\delta-\tilde{u}_\delta\|_{L_2(\Gamma)}\cdot\|z\|_{L_2(\omega_0)}. \qquad (21)$$

Позначимо через Ω_h – смугу завширшки h вздовж границі Γ. Тоді

$$\|u_\delta-\tilde{u}_\delta\|^2_{L_2(\Gamma)}\le M_{24}(\frac{1}{h}\|u_\delta-\tilde{u}_\delta\|^2_{L_2(\Omega_h)}+h\,\|u_\delta-\tilde{u}_\delta\|^2_{L_2(\Omega_h)})\le$$

$$\le M_{25}(\frac{1}{h}\|u_\delta-\tilde{u}_\delta\|^2_{L_2(\Omega_0)}+h\,\|u_\delta-\tilde{u}_\delta\|^2_{L_2(\Omega_0)}).$$

Функціонал $u_\delta(x)-\tilde{u}_\delta(\cdot)$ – лінійний, обмежений у $W_2^{\frac{3}{2}}(e)$ та обертається в нуль на множині многочленів першої степені, тому

$$\|u_\delta-\tilde{u}_\delta\|_{L_2(\Omega_0)}\le M_{26}h^{\frac{3}{2}}\|u_\delta\|_{W_2^{\frac{3}{2}}(\Omega_0)},\quad \|u_\delta-\tilde{u}_\delta\|_{W_2^1(\Omega_0)}\le M_{27}h^{\frac{1}{2}}\|u_\delta\|_{W_2^{\frac{3}{2}}(\Omega_0)}.$$

Звідси та з (21) знаходимо

$$|(\eta_1,z)_{\omega_0}|\le M_{28}h\delta^{-\frac{5}{2}}\|f\|_{L_2(\Omega)}\cdot\|z\|_{W_2^1(\omega_0)}. \qquad (22)$$

Підставляючи оцінки (20), (22) у співвідношення (19), отримаємо

$$\|z\|_{W_2^1(\omega_0)}\le M_{29}\left(\sqrt{h}\delta^{-\frac{3}{2}}+h\delta^{-\frac{3}{2}}+h^{\frac{3}{2}}\delta^{-\frac{3}{2}}+h\delta^{-\frac{7}{2}}\right)\|f\|_{L_2(\Omega)}. \qquad (23)$$

У подальшому скористаємось нерівністю трикутника та оцінками (5), (6), (23):

$$\|\tilde{y}-u\|_{W_2^1(\Omega)} \le \|\tilde{y}-u_\delta\|_{W_2^1(\Omega)} + \|u_\delta - u\|_{W_2^1(\Omega)} \le \|u_\delta - \tilde{u}_\delta\|_{W_2^1(\Omega)} + \|\tilde{u}_\delta - \tilde{y}\|_{W_2^1(\Omega)} + \|u_\delta - u\|_{W_2^1(\Omega)} \le$$

$$\le M_{30}(\|u_\delta - \tilde{u}_\delta\|_{W_2^1(\Omega_0)} + \|u_\delta - y\|_{W_2^1(\omega_0)} + \|u_\delta - u\|_{W_2^1(\Omega)});$$

$$\|\tilde{y}-u\|_{W_2^1(\Omega)} \le M_{30}\left(h^{\frac{1}{2}} + \delta + \sqrt{h}\delta^{-\frac{3}{2}} + h\delta^{-\frac{3}{2}} + h^{\frac{3}{2}}\delta^{-\frac{3}{2}} + h\delta^{-\frac{7}{2}}\right)\|f\|_{L_2(\Omega)}.$$

Найкраща за порядком h оцінка має місце при $\delta = h^{\frac{1}{5}}$. Поклавши в останній нерівності $\delta = h^{\frac{1}{5}}$ та відкинувши доданки більш високого порядку малості, отримаємо оцінку (17). Теорему доведено.

4. Висновки

Сформулюємо основні результати статті. Запропоновано метод побудови різницевих схем на рівномірній сітці для нелінійних варіаційних нерівностей з обмеженнями на границі області довільної форми. Побудовано та досліджено різницеву схему (16), що апроксимує варіаційну нерівність у прямокутнику. Отримано оцінку швидкості збіжності (17) полілінійного поповнення розв’язку різницевої схеми до розв’язку вихідної задачі порядку $h^{\frac{1}{5}}$ в нормі $W_2^1(\Omega)$. Розглянуто задачу методу фіктивних областей (4) та отримано оцінки (15) і (6) швидкості збіжності наближеного розв’язку у прямокутнику відповідно до розв’язків задачі зі штрафом (7) та варіаційної нерівності в області з границею Γ класу C^2, які не покращуються за порядком параметра δ.

Наприкінці зупинимось на практичній реалізації запропонованої різницевої схеми. Оскільки різницева схема (16) містить малий параметр δ, то для чисельної реалізації схеми доцільно використовувати модифікований попеременно-трикутний метод, швидкість збіжності якого слабко залежить від δ.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Бенсусан А., Лионс Ж.-Л. Импульсное управление и квазивариационные неравенства / Пер. с франц. – М.: Наука, 1987. – 600 с.
2. Гловински Р. и др. Численное исследование вариационных неравенств / Р. Гловински, Ж.-Л. Лионс, Р. Тремольер / Пер. с франц. – М.: Мир, 1979 – 574 с.
3. Войцеховский С.А. и др. Оценка скорости сходимости разностных схем для вариационных эллиптических неравенств второго порядка в произвольной области / С.А. Войцеховский, И.П. Гаврилюк, В.С. Саженюк // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 1986. – Т. 26. – С. 827 – 836.
4. Войцеховський С.О. и др. Оцінка швидкості збіжності методу сіток для варіаційних еліптичних нерівностей другого порядку з обмеженням усередині області / С.О. Войцеховський, В.С. Саженюк, П.О. Сущенко // Вісник Київського університету. Серія фізико-математичні науки. – 2005. – № 2. – С. 171 – 176.
5. Саженюк В.С. Алгоритм чисельного розв’язування одного класу варіаційних параболічних нерівностей // Математичні машини і системи. – 2007. – № 2. – С.19 – 25.
6. Саженюк В.С., Бруснікін В.М. Застосування методу сіток до чисельного розв’язування одного класу задач імпульсного керування // Математичні машини і системи. – 2006. – № 4. – С. 99 – 106.
7. Самарский А.А. и др. Разностные схемы для дифференциальных уравнений с обобщенными решениями / А.А. Самарский, Р.Д. Лазаров, В.Л. Макаров. – М.: Высшая школа, 1987. – 296 с.
8. Копченов В.Д. Метод фиктивных областей для второй и третьей краевых задач // Труды МИ АН СССР. – 1974. – Т. 131. – С. 119 – 127.
9. Лионс Ж.-Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. – М.: Мир, 1972. – 587 с.
10. Буренков В.И. Об аддитивности классов $W_p^k(\Omega)$ // Труды математического института АН СССР. – 1964. – Т. 89. – С. 31 – 65.

Стаття надійшла до редакції 26.05.2008