

# НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИЙ РАЗДЕЛ

УДК 539.376

**Полуаналитический метод конечных элементов в задачах континуальной механики разрушения при ползучести пространственных тел сложной формы и их систем. Сообщение 1. Разрешающие соотношения полуаналитического метода конечных элементов и алгоритмы решения задач континуального разрушения при ползучести**

**В. А. Баженов<sup>а</sup>, А. И. Гуляр<sup>а</sup>, Е. Е. Майборода<sup>б</sup>, С. О. Пискунов<sup>а</sup>**

<sup>а</sup> Киевский Национальный университет строительства и архитектуры, Киев, Украина

<sup>б</sup> Государственный научно-технический центр ядерной и радиационной безопасности, Киев, Украина

*Приведены физические уравнения континуальной механики разрушения при ползучести. Получены разрешающие соотношения для неоднородного кругового незамкнутого конечного элемента. Разработаны алгоритмы решения задачи ползучести с использованием скалярного параметра повреждаемости Качанова–Работнова и моделирования условий взаимодействия в системах пространственных тел.*

**Ключевые слова:** континуальная механика разрушения, ползучесть, повреждаемость материала, пространственные тела, полуаналитический метод конечных элементов.

**Введение.** В современной энергетике, авиации, транспортном машиностроении и других отраслях техники широкое применение получили пространственные элементы конструкций сложной формы и структуры (корпусы, диски, соединения лопаток паровых и газовых турбин, элементы паропроводов, котлов, теплообменников и др.). Большинство рассматриваемых элементов конструкций геометрически могут быть представлены как пространственные тела, полученные движением двумерной поверхности, контур которой соответствует поперечному сечению тела вдоль незамкнутой, в общем случае криволинейной образующей. Конструктивные особенности этих объектов предусматривают произвольный характер закреплений как в поперечных сечениях, так и на торцах. Внешние силовые воздействия могут быть произвольно распределены в пространстве и во времени. Физико-механические характеристики материала предполагаются зависимыми от температуры и пространственных координат. Далее такие тела будем называть неоднородными незамкнутыми круговыми (криволинейная образующая, рис. 1,а) и неоднородными призматическими (прямолинейная образующая, рис. 1,б).

© В. А. БАЖЕНОВ, А. И. ГУЛЯР, Е. Е. МАЙБОРОДА, С. О. ПИСКУНОВ, 2002

ISSN 0556-171X. Проблемы прочности, 2002, № 5

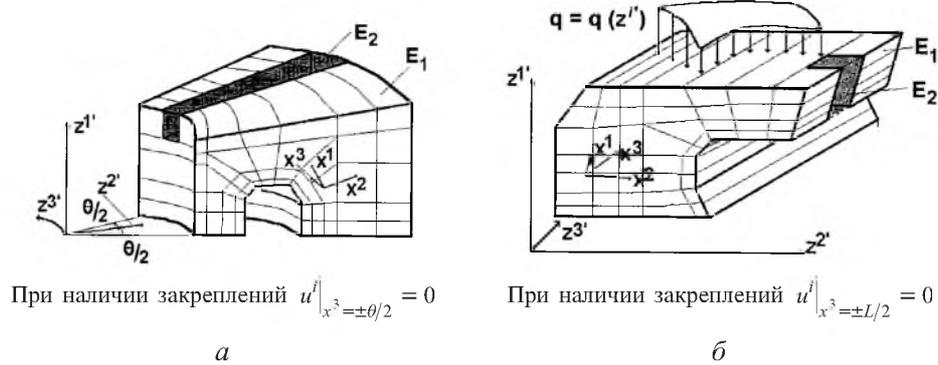


Рис. 1. Неоднородные незамкнутые круговые (а) и призматические (б) тела.

В результате длительных силовых воздействий при высоких температурах в материале конструкций возникают необратимые деформации, в основном деформации ползучести, что сопровождается накоплением несплошностей (повреждений). Одновременное протекание процессов накопления деформаций ползучести и рассеянных повреждений в материале подтверждается результатами экспериментальных исследований [1–3] и др.

В настоящее время для моделирования процесса накопления повреждений в материале используются статистический и феноменологический подходы. Статистический подход, основанный на рассмотрении физической природы ползучести и измерении микроскопических параметров или физико-механических свойств материала, не получил широкого распространения, так как использование для определения повреждаемости прямых или косвенных измерений малоэффективно из-за плохой корреляции результатов, полученных по разным методикам [2, 4]. Феноменологический подход, базирующийся на модели непрерывно-поврежденной среды, позволяет обобщить способы моделирования широкого круга процессов различной физической природы (химические и радиационные воздействия, поверхностное взаимодействие и др.), вследствие которых происходит нарушение сплошности материала. С этой целью в рассмотрение вводится скалярный, векторный или тензорный феноменологический параметр повреждаемости  $\Omega$ , изменение которого во времени описывается кинетическим уравнением, устанавливающим взаимосвязь между скоростью роста повреждаемости и параметрами, характеризующими внешние воздействия [5]. В настоящее время такой подход является преобладающим. На его основе сформировался самостоятельный раздел механики – континуальная механика разрушения [2].

В [5] отмечается, что накопление повреждений – основная причина выработки ресурса. В соответствии с [5, 6] под ресурсом подразумевают время от введения объекта в эксплуатацию до наступления предельного состояния, которое определяется как момент временного или окончательного прекращения эксплуатации, в частности, вследствие снижения показателей безопасности. Для ответственных элементов конструкций в качестве ресурса рассматривается время зарождения дефектов в материале, т.е. время скрытого разрушения [7, 8]. Стандартный подход к определению ресурса сложных элементов конструкций состоит в нахождении времени до разру-

шения по кривым длительной прочности, соответствующим напряжениям в опасной точке конструкции [1, 2, 9]. Однако, как отмечалось в [10–12], процесс деформирования элементов конструкций сопровождается значительным перераспределением напряжений, поэтому напряженное состояние в начальный момент времени, на стадии установившейся ползучести и перед разрушением существенно различается, вследствие чего расположение области разрушения и зоны максимальных упругих напряжений может быть разным [12].

Решение нестационарных задач теории ползучести для тел сложной формы с учетом всех действующих факторов и реальных свойств материала связано со значительными математическими трудностями. Общий подход к разрешимости этой проблемы возможен только с использованием численных методов, наиболее универсальным из которых является метод конечных элементов (МКЭ). К настоящему времени с помощью МКЭ решено большое количество плоских и осесимметричных задач ползучести (например, [6, 9–11] и др.). Применение МКЭ к решению пространственных задач ползучести весьма ограничено. Известно несколько работ, в которых проводятся учет накопления повреждаемости и определение ресурса [13]. Публикации, посвященные решению задач теории ползучести для систем пространственных тел, неизвестны.

Учитывая особенности геометрии рассматриваемого класса пространственных тел, построение соответствующих дискретных моделей целесообразно проводить на основе полуаналитического метода конечных элементов (ПМКЭ) [14]. Использование ПМКЭ позволяет существенно сократить объем вычислений при решении пространственных задач, не снижая точность получаемого решения. Высокая эффективность ПМКЭ показана при решении широкого круга упругих и упругопластических задач пространственных тел [14].

Целью данной работы является разработка на основе ПМКЭ эффективного подхода к решению нестационарных пространственных задач ползучести для неоднородных круговых незамкнутых и призматических тел и их систем с учетом накопления повреждаемости материала и определением ресурса.

Успешное решение поставленной задачи существенно зависит от адекватности используемых уравнений состояния материала рассматриваемым процессам деформирования, рационального выбора системы базисных функций ПМКЭ, эффективности и достоверности применяемых алгоритмов решения нестационарных задач ползучести и моделирования условий взаимодействия на поверхностях сопряжения в системах пространственных тел.

**Исходные соотношения.** Для исследования процессов деформирования неоднородных призматических и незамкнутых круговых тел используются базисная  $z^j$  и местная криволинейная системы координат  $x^i$ , связанные известными компонентами тензора преобразования  $z^i_j$ . Ось  $x^3$  совпадает по направлению с  $z^{3'}$  (рис. 1).

При деформировании в условиях ползучести компоненты тензора полной деформации  $\varepsilon_{ij}$  могут быть представлены суммой упругих деформаций

$\varepsilon_{ij}^e$ , связанных с компонентами тензора напряжений  $\sigma^{ij}$  в соответствии с обобщенным законом Гука, и деформаций ползучести  $\varepsilon_{ij}^c$ :

$$\varepsilon_{ij}^e = \varepsilon_{ij} - \varepsilon_{ij}^c; \quad \sigma^{ij} = C^{ijkl} \varepsilon_{kl}^e. \quad (1)$$

Для описания деформаций ползучести применяется уравнение вида

$$\xi_i^c = \frac{\partial \varepsilon_i^c}{\partial t} = f(\sigma^{ij}, \vartheta_c, \omega, T), \quad (2)$$

где  $\xi_i^c$  – интенсивность скорости деформаций ползучести;  $\vartheta_c = \int_{\varepsilon_{ij}^c} \sqrt{\frac{2}{3}} d\varepsilon_{ij}^c d\varepsilon_{ij}^c$

– параметр Одквиста при ползучести;  $\omega$  – скалярный параметр повреждаемости материала,  $0 \leq \omega \leq 1$ ;  $T$  – температура.

Величина накопленной в процессе деформирования повреждаемости определяется из кинетического уравнения [2]

$$\frac{d\omega}{dt} = C \left[ \frac{\tilde{\sigma}}{1 - \omega^r} \right]^m \frac{1}{(1 - \omega)^q} \omega^\beta, \quad (3)$$

где  $C, m, q, r, \beta$  – константы материала при заданной температуре и условиях нагружения;  $\tilde{\sigma}$  – эквивалентное напряжение.

Величина  $\tilde{\sigma}$  определяется по выбранному критерию прочности, что позволяет учитывать анизотропный характер накопления повреждений при сложном напряженном состоянии, например, на основе модифицированного для данного случая в [15] критерия Писаренко–Лебедева.

**Разрешающие соотношения ПМКЭ.** Для аппроксимации пространственных неоднородных незамкнутых круговых тел используются неоднородные круговые незамкнутые конечные элементы с произвольными граничными условиями на торцах, которые представляют собой сектор кольца, образованный перемещением четырехугольника произвольного очертания вдоль направляющей в виде дуги окружности. Последняя ограничена двумя плоскостями, проходящими через ось вращения. Вдоль окружной оси элемента, в соответствии с требованиями формулы численного интегрирования Гаусса, расположено некоторое количество точек интегрирования  $K_m$ ,  $m = 1, 2, \dots, M$  (рис. 2).

Распределение перемещений в поперечном сечении КЭ описывается билинейным законом:

$$u_{m'} = \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} u_{m'(S_1 S_2)} \left( \frac{1}{2} S_1 x^1 + \frac{1}{2} S_2 x^2 + S_1 S_2 x^1 x^2 + \frac{1}{4} \right), \quad (4)$$

где  $u_{m'}(S_1, S_2)$  – узловые значения перемещений, представленные компонентами в базисной системе координат;  $S_1$  и  $S_2$  – удвоенные координаты, определяющие расположение узлов относительно центра поперечного сечения элемента в местной системе координат  $x^i$ .

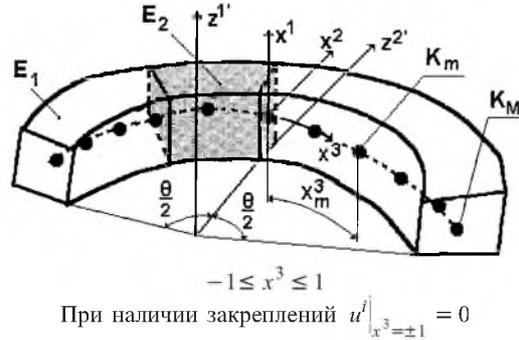


Рис. 2. Неоднородный круговой незамкнутый конечный элемент с произвольными граничными условиями на торцах.

В направлении образующей перемещения аппроксимируются разложением по системе координатных функций  $\varphi^{(l)}$  – полиномам Лагранжа ( $l = 0, 1$ ) и Михлина ( $l = 2, \dots, L$ ):

$$u_{m'} = \sum_{l=0}^L \bar{u}_{m'}^l \varphi^{(l)}, \quad (5)$$

где

$$\varphi^{(0)} = \frac{1}{2}(1 - x^3); \quad \varphi^{(1)} = \frac{1}{2}(1 + x^3);$$

$$\varphi^{(l)} = f^{(l)} p^{(l)} - f^{(l-2)} p^{(l-2)}; \quad f^{(l)} = \sqrt{(4l^2 - l)^{-1}}.$$

Указанная система функций удовлетворяет условиям полноты и линейной независимости и позволяет наиболее просто и эффективно формулировать разные виды граничных условий на торцах тела традиционным для МКЭ способом, т.е. путем исключения соответствующих уравнений [14]. Выражения вектора узловых реакций  $\{R_l\}$  и матрицы жесткости  $[K]_{ln}$  неоднородного кругового незамкнутого конечного элемента получены с использованием моментной схемы конечных элементов [15], предусматривающей разложение компонент тензора полной деформации в поперечном сечении элемента в ряд Маклорена:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\alpha\alpha} &= \varepsilon_{\alpha\alpha} + \varepsilon_{\alpha\alpha,(3-\alpha)} x^{(3-\alpha)}; & \varepsilon_{12} &= \varepsilon_{12}; \\ \varepsilon_{\alpha 3} &= \varepsilon_{\alpha 3} + \varepsilon_{\alpha 3,(3-\alpha)} x^{(3-\alpha)}; & \varepsilon_{33} &= \varepsilon_{33} + \varepsilon_{33,\beta} x^\beta, \end{aligned} \quad (6)$$

где

$$\overset{\circ}{\varepsilon}_{ij} = \varepsilon_{ij} \Big|_{x^\alpha=0}; \quad \overset{\circ}{\varepsilon}_{ij,\beta} = \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial x^\beta} \Big|_{x^\beta=0}.$$

С использованием вариационного принципа возможных перемещений для системы из  $N$  конечных элементов получим

$$\sum_{n=1}^N (\delta W_n - \delta A_n) = \sum_{n=1}^N \int_{x^1=-\frac{1}{2}}^{x^1=\frac{1}{2}} \int_{x^2=-\frac{1}{2}}^{x^2=\frac{1}{2}} \int_{x^3=-1}^{x^3=1} \sigma^{ij} \delta \varepsilon_{ij} \sqrt{g} dx^1 dx^2 dx^3 = 0. \quad (7)$$

Представляя коэффициенты разложения деформаций в (6) с использованием коэффициентов разложения перемещений (5), с учетом аналогичного (6) разложения напряжений после интегрирования в пределах поперечного сечения элемента в замкнутом виде получаем выражение вектора узловых реакций:

$$\begin{aligned} \{R_l\} = & \left[ [B_1]^T \int_{x^3=-1}^{x^3=1} \{\sigma\} \varphi^{(l)} dx^3 + [B_2]^T \int_{x^3=-1}^{x^3=1} \{\sigma\} \varphi_{,3}^{(l)} dx^3 + \right. \\ & \left. + \frac{1}{12} \sum_{\alpha=1}^2 \left( [B_{1,\alpha}] \int_{x^3=-1}^{x^3=1} \{\sigma_{,\alpha}\} \varphi^{(l)} dx^3 + [B_{2,\alpha}] \int_{x^3=-1}^{x^3=1} \{\sigma_{,\alpha}\} \varphi_{,3}^{(l)} dx^3 \right) \right] \sqrt{g}, \quad (8) \end{aligned}$$

где  $[B_1], [B_2], [B_{1,\alpha}], [B_{2,\alpha}]$  – матрицы, определяющие значения коэффициентов разложения компонент деформаций в ряд Маклорена через узловые перемещения и их производные в базисной системе координат.

Принимая взаимосвязь между приращениями напряжений и деформаций в соответствии с законом Гука (1), получаем выражение матрицы жесткости конечного элемента:

$$\begin{aligned} [K]_{ln} = & \int_{x^3=-1}^{x^3=1} \left\{ ([B_1]^T \varphi^{(l)} + [B_2]^T \varphi_{,3}^{(l)}) [D] \sum_{n=0}^L ([B_1] \varphi^{(n)} + [B_2] \varphi_{,3}^{(n)}) + \right. \\ & \left. + \frac{1}{12} \sum_{\alpha=1}^2 \left[ ([B_{1,\alpha}]^T \varphi^{(l)} + [B_{2,\alpha}]^T \varphi_{,3}^{(l)}) [D_\alpha] \times \right. \right. \\ & \left. \left. \times \sum_{n=0}^L ([B_{1,\alpha}] \varphi^{(n)} + [B_{2,\alpha}] \varphi_{,3}^{(n)}) \right] \right\} \sqrt{g} dx^3, \quad (9) \end{aligned}$$

где  $[D], [D_\alpha]$  – матрицы упругих постоянных материала.

Численное интегрирование (8) и (9) по  $x^3$  дает окончательные выражения для вектора узловых реакций и матрицы жесткости неоднородного кругового незамкнутого конечного элемента.

Применяемый для дискретизации неоднородных призматических тел призматический конечный элемент [14] является частным случаем кругового незамкнутого конечного элемента.

**Алгоритм решения задачи континуального разрушения при ползучести.** Моделирование процесса деформирования пространственных тел в условиях ползучести проводится шаговым методом по времени. Выбор величины шага по времени  $\Delta t$  обусловлен сходимостью итерационного процесса решения систем нелинейных уравнений задачи ползучести. При этом значение  $\Delta t$  существенно зависит от характеристик ползучести материала и характера нагрузки.

Решение задачи ползучести с учетом накопления повреждаемости материала проводится по алгоритму, основанному на совмещении метода неявной схемы интегрирования по времени с итерационной процедурой Ньютона–Канторовича.

На каждом шаге по времени  $m$  решение системы уравнений выполняется методом блочных итераций, что обусловлено клеточной структурой системы уравнений ПМКЭ:

$$\{u_l\}_{n+1}^m = \{u_l\}_n^m + \beta[K_{ll}](\{Q_l\}^m - \{R_l\}_n^m), \quad (10)$$

где  $\{u_l\}_n^m, \{u_l\}_{n+1}^m$  – коэффициенты разложения вектора узловых перемещений на итерациях  $n$  и  $n+1$  соответственно;  $\beta$  – параметр релаксации,  $\beta = 1,4 \dots 1,6$  [14];  $[K_{ll}]$  – диагональная подматрица жесткости системы;  $\{Q_l\}^m$  – вектор узловых нагрузок;  $\{R_l\}_n^m$  – вектор узловых реакций на итерации  $n$ .

Формула (10) описывает итерационный цикл, внутри которого содержится цикл по удерживаемым членам разложения. Условием сходимости итерационного процесса на шаге является

$$\left\| \sum_{l=0}^L \{\Delta u_l\}^n \right\| \geq \zeta \left\| \sum_{l=0}^L \{u_l\}^n \right\|, \quad (11)$$

где  $\{\Delta u_l\}^n$  – приращение амплитудных перемещений на итерации  $n$ ;  $\{u_l\}^n$  – полные значения амплитудных перемещений на итерации  $n$ ;  $\zeta$  – заведомо определенный параметр точности решения системы нелинейных уравнений,  $\zeta = 10^{-4} \dots 10^{-6}$ .

В начале каждой итерации  $n$  шага по времени  $m$  напряжения  $\sigma_{ij}$ , входящие в выражение вектора узловых реакций, вычисляются с учетом деформаций ползучести материала по формуле

$$(\overline{\sigma_{ij}})_n^m = \frac{1}{3}[I_1(\sigma)]_n^m g_{ij} + (\overline{S_{ij}})_n^m, \quad (12)$$

где  $\frac{1}{3}[I_1(\sigma)]_n^m g_{ij}$  – компоненты шарового тензора;  $I_1(\sigma) = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}$ ;  $g_{ij}$  – метрический тензор.

Компоненты тензора напряжений  $\overline{\sigma}_{ij}$  определяются, в соответствии с законом Гука, по величине приращения полных деформаций:

$$(\overline{\sigma}_{ij})_n^m = (\sigma_{ij})_{n-1}^m + (\overline{\Delta\sigma}_{ij})_n^m, \quad (13)$$

а компоненты девиатора напряжений  $(S_{ij})_n^m$  зависят от приращений деформаций ползучести:

$$(S_{ij})_n^m = (\overline{S}_{ij})_n^m - G_1(\Delta\varepsilon_{ij}^c)_n^m; \quad (\Delta\varepsilon_{ij}^c)_n^m = (\xi_{ij}^c)_n^m \Delta t_m, \quad (14)$$

где  $G_1 = E/(1 - 2\mu)$ ;  $(\xi_{ij}^c)_n^m = \frac{3}{2} \xi_i^c \frac{(\overline{S}_{ij})_n^m}{\sigma_i}$  – компоненты тензора скоростей деформаций ползучести;  $\Delta t_m$  – величина шага по времени.

Далее по полученным на шаге напряжениям проводится вычисление приращений деформаций ползучести и повреждаемости, накопленных величин деформаций ползучести  $(\varepsilon_{ij}^c)_m$  и повреждаемости  $\omega_m$ :

$$(\varepsilon_{ij}^c)_m = (\varepsilon_{ij}^c)_{m-1} + (\Delta\varepsilon_{ij}^c)_m = (\varepsilon_{ij}^c)_{m-1} + (\xi_{ij}^c)_m \Delta t; \quad (15)$$

$$\omega_m = \omega_{m-1} + (\Delta\omega)_m = \omega_{m-1} + \left(\frac{\partial\omega}{\partial t}\right)_m \Delta t_m. \quad (16)$$

В конце каждого шага для всех точек тела выполняется проверка условия начала разрушения  $\omega > \omega_{кр}$ , где  $\omega_{кр}$  – значение параметра повреждаемости, соответствующее моменту начала разрушения материала. Теоретически имеем  $\omega_{кр} = 1$  [1], однако в численных решениях принимается  $\omega_{кр} \approx 1$ :  $\omega_{кр} = 0,95 \dots 0,96$  [16],  $\omega_{кр} = 0,99$  [17]. В случае выполнения указанного условия фиксируется время начала разрушения конструкции, что определяет ее расчетный ресурс.

При вычислении скоростей деформаций ползучести  $(\xi_{ij}^c)_n^m$  в (14) значения  $\xi_i^c$  и  $\sigma_i$  могут быть определены с использованием напряжений, соответствующих разным точкам временного интервала  $\Delta t$ :

$$\sigma_i = \sigma_i(t_m + \lambda \Delta t_m), \quad 0 \leq \lambda \leq 1. \quad (17)$$

Для исследования возможности применения и сравнения эффективности вариантов алгоритма при различных значениях  $\lambda$  проведено решение тестовой задачи о деформировании толстостенной трубы [17]. Расчет осуществлялся при постоянном шаге по времени  $\Delta t = 0,25; 0,5; 1; 2; 4$ ,  $\lambda = 0$ ;

0,5; 1,  $\omega_{кр} = 0,9$ . В случае  $\lambda = 0,5$  и 1 решения были получены лишь при  $\Delta t = 0,25$ , при больших  $\Delta t$  сходимость итерационного процесса нарушалась до достижения  $\omega_{кр}$ . Анализ точности решения (погрешности определения времени до начала разрушения  $\delta\tau_p$ ) и вычислительных затрат (суммарного числа итераций  $N_i$ , необходимых для решения задачи) в зависимости от величины шага по времени (рис. 3) показывает, что в случае  $\lambda = 0$  уменьшение  $\Delta t$  ( $\Delta t < 4$ ) не приводит к существенному уточнению решения. Рост вычислительных затрат при уменьшении  $\Delta t$  обусловлен увеличением общего числа шагов решения задачи. Таким образом, вариант алгоритма при  $\lambda = 0$ , т.е. при использовании напряжений, вычисленных на предыдущем шаге, является наиболее устойчивым и эффективным.

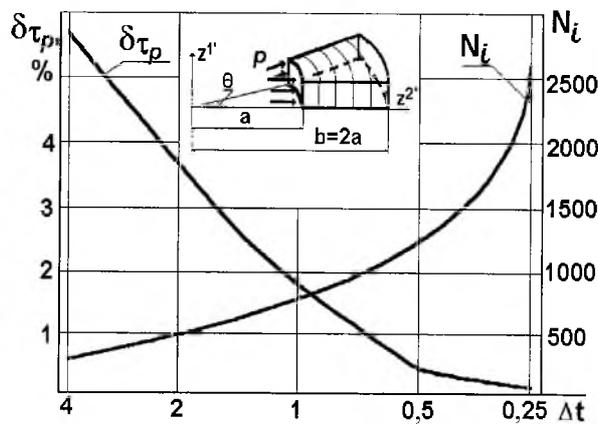


Рис. 3. Исследование сходимости и эффективности алгоритма решения задачи ползучести.

### Моделирование взаимодействия в системах пространственных тел.

Некоторые из рассматриваемых объектов (замковые соединения лопаток, опорные устройства и т.п.) представляют собой системы пространственных тел. В общем случае для моделирования условий их взаимодействия необходимо решать пространственную контактную задачу с учетом трения на поверхностях сопряжения тел. Однако в отдельных случаях размеры площадки контакта могут быть приняты в соответствии с конструктивными особенностями деталей или на основе известных исследований.

Для моделирования взаимодействия тел при построении соответствующей конечноэлементной модели вдоль поверхности сопряжения вводится фиктивный слой материала, в котором реализуются условия их взаимодействия. При моделировании такого слоя применяются специальные конечные элементы, выполнение указанных условий в которых достигается путем использования при вычислении матрицы жесткости скорректированных компонент тензора упругих констант  $C_*^{ijkl}$ . Так, в случае “проскальзывания” деталей фиктивный слой материала не воспринимает действия касательных напряжений. Тогда из условий

$$\sigma^{12} = 2C^{12kl} \varepsilon_{kl} = 0; \quad \sigma^{13} = 2C^{13kl} \varepsilon_{kl} = 0 \quad (18)$$

получим

$$C_*^{ijkl} = C^{ijkl} - \mu \{ g^{i1}(g^{j2} + g^{j3}) + g^{j1}(g^{i2} + g^{i3}) \}. \quad (19)$$

Для оценки эффективности и проверки достоверности моделирования условий взаимодействия в системах пространственных тел на основе коррекции тензора упругих констант рассмотрена задача о взаимодействии системы пространственных призматических тел, сопряженных вдоль поверхности, наклоненной под углом  $45^\circ$  (рис. 4). Решение проведено с использованием специальных конечных элементов и путем непосредственного введения условия (18) в итерационный процесс вычисления напряжений (12)–(15) для элементов, составляющих фиктивный слой материала. Полученные обоими способами распределения нормального напряжения  $\sigma_{11}$  вдоль площадки сопряжения  $AB$  полностью совпадают и хорошо согласуются с известным аналитическим решением [18]. Анализ сходимости результатов в зависимости от точности решения системы нелинейных уравнений  $\zeta$  при реализации условия (11) в итерационном процессе показал, что для достижения точности около 5% по отношению к решению, полученному с применением (19), потребовалось более 300 итераций. Таким образом, более эффективным является реализация условия (18) на основе использования специальных конечных элементов.

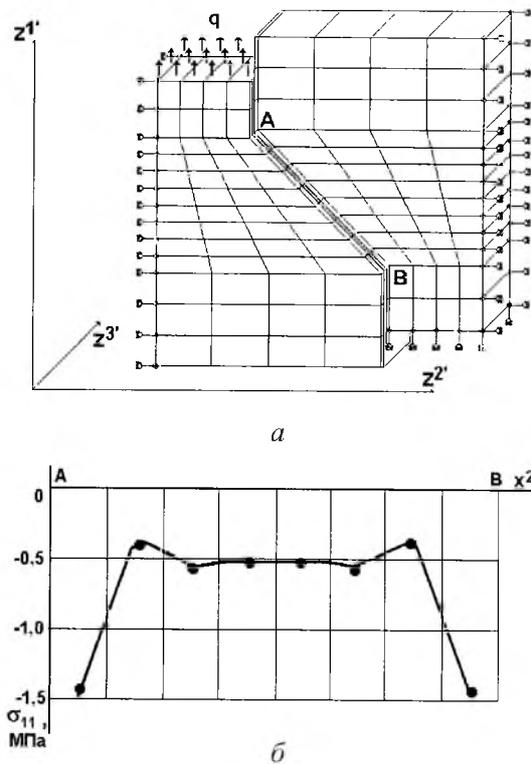


Рис. 4. Система пространственных призматических тел – а и распределение нормальных напряжений вдоль площадки сопряжения – б. (Точки –  $C_*^{ijkl}$  (19),  $\sigma_{12} = 0$ ,  $\sigma_{13} = 0$  (12)–(15); сплошная линия – данные работы [18].)

**Заключение.** Приведены исходные соотношения континуальной механики разрушения при ползучести. Впервые получены разрешающие соотношения ПМКЭ для дискретизации неоднородных круговых незамкнутых тел с произвольными граничными условиями на торцах. Разработаны алгоритмы решения задачи ползучести с учетом повреждаемости материала и моделирования условий взаимодействия в системах тел, что обеспечивает возможность решения широкого круга сложных практических задач.

## Резюме

Наведено фізичні рівняння континуальної механіки руйнування при повзучості. Отримано розв'язувальні співвідношення для неоднорідного кругового незамкненого скінченного елемента. Розроблено алгоритми розв'язання задачі повзучості з використанням скалярного параметра пошкодженості Качанова–Работнова і моделювання умов взаємодії в системах просторових тіл.

1. *Работнов Ю. Н.* Ползучесть элементов конструкций. – М.: Наука, 1966. – 732 с.
2. *Голуб В. П.* Нелинейная механика континуальной поврежденности и ее приложение к задачам ползучести и усталости // Прикл. механика. – 2000. – № 3. – С. 31 – 66.
3. *Колмогоров В. М., Мигалев Б. А.* Феноменологическая модель накопления повреждений и разрушения при различных условиях нагружения. – Екатеринбург, 1994. – 105 с.
4. *Лебедев А. А., Чаусов Н. Г., Недосека С. А.* Комплексная оценка поврежденности материала при пластическом деформировании // Пробл. прочности. – 1996. – № 5. – С. 23 – 30.
5. *Болотин В. В.* Ресурс машин и конструкций. – М.: Машиностроение, 1990. – 448 с.
6. *Биргер И. А., Шорр Б. Ф., Иосилевич Г. Б.* Расчет на прочность деталей машин. Справочник. – М.: Машиностроение, 1979. – 702 с.
7. *Балина В. С., Ланин А. А.* Прочность и долговечность конструкций при ползучести. – СПб.: Политехника, 1995. – 182 с.
8. *Шульженко Н. Г., Гонтаровский П. П.* Анализ термонапряженного и вибрационного состояния роторов турбомашин // Пробл. машиностроения. – 1998. – № 1. – С. 79 – 89.
9. *Подгорный А. Н., Бортовой В. В., Гонтаровский П. П. и др.* Ползучесть элементов машиностроительных конструкций. – Киев: Наук. думка, 1984. – 264 с.
10. *Мавлютов Р. Р.* Концентрация напряжений в элементах авиационных конструкций. – М.: Наука, 1981. – 141 с.
11. *Анищенко Г. О., Бреславский Д. В., Морачковский О. К.* Ползучесть и длительная прочность елочного замкового соединения ГТД при совместном действии статических и циклических нагрузок // Пробл. прочности. – 1998. – № 1. – С. 34 – 41.

12. Качанов Л. М. Основы механики разрушения. – М.: Наука, 1974. – 312 с.
13. Мазур В. Н. Решение пространственных краевых задач термовязкопластичности с учетом повреждаемости материала при ползучести // Изв. вузов. Машиностроение. – 1992. – № 4–6. – С. 41 – 45.
14. Баженов В. А., Гуляр А. И., Сахаров А. С., Топор А. Г. Полуаналитический метод конечных элементов в механике деформируемых тел. – Киев: НИИ строит. механики, 1993. – 376 с.
15. Сахаров А. С., Кислоцкий В. Н., Киричевский В. В. Метод конечных элементов в механике твердых тел. – Киев: Вища шк., 1982. – 479 с.
16. Савченко В. Г., Шевченко Ю. Н. Методы исследования термовязкопластического деформирования трехмерных элементов конструкций // Прикл. механика. – 1993. – № 9. – С. 3 – 18.
17. Boyle J. T. and Spence J. Stress Analysis for Creep. – London; Boston: Butterworths Publishers, 1983. – 360 с.
18. Галин Л. А. Контактные задачи теории упругости и вязкоупругости. – М.: Наука, 1980. – 303 с.

Поступила 25. 12. 2001