УДК 62 – 192.003

В.П. СТРЕЛЬНИКОВ, С.В. ЕГОРОВ

ИССЛЕДОВАНИЕ СВОЙСТВ СТАТИСТИКИ, ПРИМЕНЯЕМОЙ ДЛЯ ОЦЕНКИ ВЕРОЯТНОСТИ БЕЗОТКАЗНОЙ РАБОТЫ

Abstract: *On the basis of statistical modeling it is shown, that the most effective for the description of researched statistics diffusion distributions are represented which are recommended to use at planning tests for non-failure operation.*
Key words: *reliability function, reliability, failure, relative mistake.*

Анотація: *На підставі статистичного моделювання показано, що найбільш ефективними для опису досліджуваної статистики представляються дифузійні розподіли, які й рекомендується використовувати при плануванні випробувань на безвідмовність.*
Ключові слова: *імовірність безвідмовної роботи, безвідмовність, відмова, відносна помилка.*

Аннотация: *На основании статистического моделирования показано, что наиболее эффективными для описания исследуемой статистики представляются диффузионные распределения, которые и рекомендуется использовать при планировании испытаний на безотказность.*
***Ключевые слова*:** *вероятность безотказной работы, безотказность, отказ, относительная ошибка.*

1. Введение

Экспериментальная оценка показателей надежности является практически основным способом установления реальных количественных показателей надежности в процессе разработки и серийного производства технических систем. В связи с этим вопросы планирования и обработки результатов испытаний на надежность, в том числе для оценки вероятности безотказной работы $R(t)$, являются весьма важными в общей проблеме обеспечения надежности технических систем.

В настоящей работе выполнено исследование характеристик статистики типа $\vartheta = \frac{r}{N}$, представляющей собой статистическую оценку вероятности появления отказа $F(t)$ за фиксированное время (наработку) t. При этом r – число отказавших образцов за наработку t из N образцов, поставленных на испытание (наблюдаемых при эксплуатации), а вероятность безотказной работы вычисляется по формуле $R(t) = 1 - \vartheta$.

2. Моделирование исследуемой статистики

С целью проверки свойств исследуемой статистики методом Монте-Карло моделировалось по сто выборок (m), каждая из которых содержала по сто элементов (n), с использованием известных экспериментальных данных (генеральных совокупностей) об отказах [1]. Суть моделирования методом Монте-Карло в данном случае заключается в следующем. Вначале для конкретного уровня безотказной наработки $R(t)$ (или отказа $F(t)$) устанавливают предельное значение порядкового номера x_{F_j}, которое соответствует заданной вероятности отказа F_j генеральной совокупности. В данном исследовании приняты следующие уровни вероятности отказа:

ISSN 1028-9763. Математичні машини і системи, 2008, № 3

$F_1 = 0{,}1;\ F_2 = 0{,}2;\ F_3 = 0{,}3;\ F_4 = 0{,}5$. Значение x_{F_j} определяют из следующего соотношения: $x_{F_j} = INT[N \cdot F_j]$, здесь $INT[z]$ – целая часть числа z. В данном случае полагают N – количество элементов (отказов) используемой генеральной совокупности. Например, если объём (количество элементов) первой выборки $N = 463$, то для принятого значения $F_1 = 0{,}1$ определяем $x_{F_1} = INT[463 \cdot 0{,}1] = 46$. Это означает, что все случайно моделируемые числа менее $x_{F_1} = 46$ моделируют отказ. Для $F_4 = 0{,}5$ значение $x_{F_4} = INT[463 \cdot 0{,}5] = 231$, т.е. все случайно моделируемые числа менее $x_{F_4} = 231$ моделируют отказ.

Далее, с помощью генератора случайных чисел определяют значения порядковых номеров в диапазоне от 0 до N (нужно сгенерировать всего сто элементов n) и фиксируют числа, которые менее x_{F_j}. Количество чисел менее x_{F_j} равно количеству отказов (r_k). Таким образом, моделируют m выборок по n элементов. При этом моделируемая статистика $\vartheta_k = \frac{r_k}{n}$, где $k = 1, 2, ..., m$. Обработка получаемой статистики сводится к определению выборочного среднего $s = \frac{\sum_{k=1}^{m} \vartheta_k}{m}$, дисперсии $D = \frac{1}{m-1}\sum_{k=1}^{m}(\vartheta_k - s)^2$, коэффициента вариации $V = \frac{\sqrt{D}}{s}$. Полученные статистические характеристики исследуемой статистики далее используются для оценки параметров гипотетических теоретических функций распределения.

С целью более широкого исследования в качестве генеральных совокупностей были приняты выборки отказов из [1], имеющие существенно отличающиеся формы распределений. В частности, использовалась выборка № 4 из [1], имеющая значения $N = 463$ и коэффициент вариации $V = 0{,}56$, выборка № 5, имеющая значения $N = 504$ и коэффициент вариации $V = 0{,}73$, выборка № 10, имеющая значения $N = 309$ и коэффициент вариации $V = 1{,}49$.

В указанном выше порядке было выполнено моделирование исследуемой статистики для принятого ряда уровней F_j и использования упомянутых генеральных совокупностей. Всего было смоделировано и обработано 1200 выборок, объем каждой выборки составлял 100 значений наработок до отказа.

3. Конкурирующие теоретические функции для описания распределения исследуемой статистики

В качестве гипотетических теоретических функций распределения изучаемой статистики были приняты следующие известные функции распределения.

DN -распределение (DN):

$$F(\vartheta) = DN(\vartheta;\mu,\nu) = \Phi\left(\frac{\vartheta-\mu}{\nu\sqrt{\vartheta\mu}}\right) + \exp\left(\frac{2}{\nu^2}\right)\Phi\left(-\frac{\vartheta+\mu}{\nu\sqrt{\vartheta\mu}}\right), \qquad (1)$$

где $\mu = s$ – параметр масштаба DN -распределения исследуемой статистики ϑ; $\nu = V$ – параметр формы DN -распределения, совпадающий со значением коэффициента вариации исследуемой статистики; Φ(·) – нормированное нормальное распределение.

DM -распределение (DM):

$$F(\vartheta) = DM(\vartheta;\mu,\nu) = \Phi\left(\frac{\vartheta-\mu}{\nu\sqrt{\vartheta\mu}}\right), \qquad (2)$$

где $\mu = \dfrac{5s^2 - D}{4s + \sqrt{s^2+3D}}$ – параметр масштаба DM -распределения; $\nu = \left(\dfrac{2\left(s\sqrt{s^2+3D} + D - s^2\right)}{5s^2 - D}\right)^{\frac{1}{2}}$ – параметр формы *DM*-распределения.

Нормальное распределение (N):

$$F(\vartheta) = N(\vartheta;\theta,\sigma) = \Phi\left(\frac{\vartheta-\theta}{\sigma}\right), \qquad (3)$$

где $\theta = s$ – параметр масштаба N -распределения; $\sigma = \sqrt{D}$ – параметр формы N -распределения (среднеквадратическое отклонение исследуемой статистики).

Логарифмически нормальное распределение (LN):

$$F(\vartheta) = LN(\vartheta;\alpha,\beta) = \Phi\left(\frac{\ln\vartheta-\alpha}{\beta}\right), \qquad (4)$$

где $\alpha = \ln s - \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{D}{s^2}+1\right)$ – параметр масштаба LN -распределения; $\beta = \left[\ln\left(\dfrac{D}{s^2}+1\right)\right]^{\frac{1}{2}}$ – параметр формы LN -распределения.

Распределение Вейбулла (W):

$$F(\vartheta) = W(\vartheta;a,b) = 1 - \exp\left[-\left(\frac{\vartheta}{a}\right)^b\right], \qquad (5)$$

где $a = \left(\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\vartheta_i^b\right)^{\frac{1}{b}}$ – параметр масштаба W -распределения; $b \cong \dfrac{1}{V}$ – параметр формы W -распределения.

С целью проверки гипотез согласия теоретической модели с эмпирическим распределением использовались следующие критерии согласия.

Критерий Пирсона χ^2:

$$\chi^2 = \sum_{j=1}^{r'} \frac{\left(m_j - n_{p_j}\right)^2}{n_{p_j}},$$

где r' – количество интервалов после их объединения; m_j – число элементов статистики ϑ, попавших в j-й интервал; $n_{p_j} = p_j n$ (здесь p_j – вероятность попадания экспериментальных данных в j-й интервал по теоретическому распределению; n – количество элементов в выборке).

Критерий омега-квадрат w^2:

$$\Omega_N^2 = -n - 2\sum_{j=1}^{n} \left\{ \frac{2j-1}{2n} \ln F\left(\vartheta_j\right) + \left(1 - \frac{2j-1}{2n}\right) \ln\left[1 - F\left(\vartheta_j\right)\right] \right\},$$

где $F(\vartheta_j)$ – теоретическое значение вероятности отказа для всех упорядоченных значений ϑ_j $(j = 1, 2, ..., n)$.

4. Сводные таблицы наблюдаемых значений критериев согласия

Таблица 1. Наблюдаемые значения χ^2 и соответствующие им уровни значимости ρ (генеральная совокупность № 4)

F_j	DN		DM		N		LN		W	
	χ^2	ρ	χ^2	ρ	χ^2	ρ	χ^2	ρ	χ^2	ρ
$F = 0{,}1$	5,5399	0,2	5,3789	0,2	5,5179	0,2	5,5048	0,2	6,3297	0,15
$F = 0{,}2$	10,6711	0,1	10,5973	0,1	8,5541	0,2	10,7178	0,05	8,6744	0,15
$F = 0{,}3$	1,2819	0,5	1,281	0,5	2,5923	0,5	1,2619	0,5	9,0081	0,1
$F = 0{,}5$	2,5526	0,5	2,5529	0,5	3,8008	0,5	2,5855	0,5	8,975	0,1

Примечание. Согласно [1] уровень значимости ρ необходимо выбирать из ряда 0,01; 0,05; 0,1; 0,15; 0,2; 0,3; 0,5.

Таблица 2. Наблюдаемые значения χ^2 и соответствующие им уровни значимости ρ (генеральная совокупность № 5)

F_j	DN		DM		N		LN		W	
	χ^2	ρ	χ^2	ρ	χ^2	ρ	χ^2	ρ	χ^2	ρ
$F = 0{,}1$	5,92	0,2	5,787	0,3	6,7836	0,05	5,85	0,2	5,7573	0,05
$F = 0{,}2$	2,177	0,5	2,1678	0,5	4,99158	0,2	2,2165	0,5	8,8093	0,05
$F = 0{,}3$	5,5633	0,3	5,5471	0,3	5,9920	0,3	5,5891	0,3	9,4391	0,15
$F = 0{,}5$	4,9131	0,3	4,902	0,3	10,3724	0,01	4,8742	0,3	10,1739	0,01

Таблица 3. Наблюдаемые значения χ^2 и соответствующие им уровни значимости ρ (генеральная совокупность № 10)

F_j	DN		DM		N		LN		W	
	χ^2	ρ	χ^2	ρ	χ^2	ρ	χ^2	ρ	χ^2	ρ
$F=0{,}1$	7,046	0,05	8,54	0,05	6,04	0,2	8,026	0,05	13,51	0,05
$F=0{,}2$	6,8546	0,2	6,8061	0,2	6,0367	0,3	6,6664	0,2	11,6712	0,01
$F=0{,}3$	3,0054	0,3	3,0153	0,3	6,4558	0,05	3,0086	0,3	8,137	0,1
$F=0{,}5$	3,5151	0,5	3,5122	0,5	2,5103	0,5	3,4988	0,5	7,8221	0,15

Таблица 4. Наблюдаемые значения ω^2 и соответствующие им уровни значимости ρ (генеральная совокупность № 4)

F_j	DN		DM		N		LN		W	
	Ω_N^2	ρ	Ω_N^2	ρ	Ω_N^2	ρ	Ω_N^2	ρ	Ω_N^2	ρ
$F=0{,}1$	1,148	0,2	1,123	0,3	0,95	0,3	1,12	0,3	1,16	0,2
$F=0{,}2$	1,046	0,3	1,038	0,3	0,608	0,5	1,054	0,3	0,786	0,3
$F=0{,}3$	0,3943	0,5	0,3935	0,5	0,471	0,5	0,39	0,5	1,369	0,2
$F=0{,}5$	0,3186	0,5	0,3183	0,5	0,3459	0,5	0,3204	0,5	0,9933	0,3

Таблица 5. Наблюдаемые значения ω^2 и соответствующие им уровни значимости ρ (генеральная совокупность № 5)

F_j	DN		DM		N		LN		W	
	Ω_N^2	ρ	Ω_N^2	ρ	Ω_N^2	ρ	Ω_N^2	ρ	Ω_N^2	ρ
$F=0{,}1$	1,137	0,3	1,1183	0,3	0,943	0,3	1,1177	0,3	1,186	0,2
$F=0{,}2$	0,461	0,5	0,455	0,5	0,61	0,5	0,457	0,5	0,13	0,3
$F=0{,}3$	0,6241	0,2	0,6235	0,5	0,806	0,3	0,622	0,5	1,556	0,15
$F=0{,}5$	0,9827	0,3	0,9819	0,3	0,6	0,5	0,9808	0,3	1,139	0,2

Таблица 6. Наблюдаемые значения ω^2 и соответствующие им уровни значимости ρ (генеральная совокупность № 10)

F_j	DN		DM		N		LN		W	
	Ω_N^2	ρ	Ω_N^2	ρ	Ω_N^2	ρ	Ω_N^2	ρ	Ω_N^2	ρ
$F=0{,}1$	2,426	0,05	2,399	0,05	0,937	0,3	2,384	0,05	1,344	0,2
$F=0{,}2$	0,558	0,5	0,556	0,5	0,676	0,5	0,549	0,5	1,421	0,2
$F=0{,}3$	0,34653	0,5	0,34697	0,5	0,657	0,5	0,345	0,5	1,815	0,1
$F=0{,}5$	0,4694	0,5	0,4692	0,5	0,434	0,5	0,467	0,5	1,534	0,15

5. Выводы

Анализируя достаточно объемные результаты моделирования для различных видов эмпирических распределений наработок объектов, можно констатировать, что исследуемая статистика достаточно хорошо описывается практически всеми двухпараметрическими функциями распределения (DM, DN, N, LN, W). Сравнительно худшие результаты описания исследуемой статистики получаются при использовании распределения Вейбулла. Поскольку исследуемая статистика имеет, как правило, малый коэффициент вариации, наиболее эффективно использование в данном случае распределений DM, DN, N. Однако с практической точки зрения, несомненно представляется, что более эффективно использование диффузионных распределений (DM, DN), поскольку их использование позволяет получить выражение для функции распределения исследуемой статистики с учетом априорной информации о распределении первичной статистики (наработки до отказа). В частности, параметр формы распределения исследуемой статистики связан с параметром формы распределения первичной статистики [2]. Например, при использовании DN-распределения: $F(\vartheta) = DN(\vartheta; s, \nu_\vartheta)$, где s – среднее выборочное значение исследуемой статистики ϑ, $\nu_\vartheta = \nu / \sqrt{s}$ (ν – коэффициент вариации первичной статистики, т.е. наработки до отказа). Знание коэффициента вариации позволяет планировать объем испытаний, используя известные соотношения для диффузионных распределений. В частности, число отказов r, необходимое для удовлетворения задаваемой точности (δ) и достоверности (q) при известном параметре ν, определяют по следующей формуле: $r = \left(\frac{\nu_\vartheta U_q}{\delta}\right)^2 \frac{\left(1+\sqrt{1+\delta^2}\right)}{2}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. ГОСТ 27.005-97. Надежность в технике. Модели отказов. Основные положения. – Введ. 01.01.99. – 43 с.
2. Стрельников В.П., Федухин А.В. Оценка и прогнозирование надежности электронных элементов и систем. – К.: Логос, 2002. – 486 с.

Стаття надійшла до редакції 11.08.2008