

УДК 551.465.5

КИНЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ТЕЧЕНИЯ ГОЛЬФСТРИМ**Т. С. КРАСНОПОЛЬСКАЯ, В. Н. ИЛЬЧЕНКО***Институт гидромеханики НАН Украины, Киев**Получено 15.11.2007*

Предложена математическая модель и найдена функция тока, аппроксимирующие течение Гольфстрима. Аппроксимирующая функция тока представляет собой модифицированную функцию тока, описывающую вихревую дорожку Кармана. Модифицированная функция позволяет описывать течение Гольфстрима в подвижной системе координат, характеризующееся следующими когерентными структурами: среднее извивающееся (меандрирующее) течение в восточном направлении; две системы циркуляционных зон между вершинами и подошвами меандров и обрамляющее прямолинейное течение в западном направлении.

Запропоновано математичну модель і знайдено функцію течії, що апроксимують течію Гольфстріма. Апроксимуюча функція течії являє собою модифіковану функцію течії, що описує вихрову доріжку Кармана. Модифікована функція дозволяє описувати течію Гольфстріму в рухомій системі координат, яка характеризується такими когерентними структурами: середня звивиста (меандрова) течія у східному напрямку; дві системи циркуляційних зон поміж вершинами і підніжжями меандрів та оточуюча прямолинійна течія у західному напрямку.

The mathematical model is proposed and a stream function approximated a meandering jet of Gulf Stream is found. This function is a modification of the stream function describing the Karman's vortex street. The modification which is introduced allows to approximate main patterns in a meandering jet of Gulf Stream. This stream characterizes by the following coherent structure elements in a coordinate frame moving with a speed of the meander: 1) an eastward-propagating meandering jet; 2) regions of recirculating fluid below and above meander crests and troughs; 3) regions of westward-propagating fluid below and above the jet and recirculation regions.

ВВЕДЕНИЕ

Парадигма хаотической адвекции (впервые предложена Х. Арефом в 1982-1984 гг.) является на сегодня одним из самых перспективных и успешных подходов при изучении проблем перемешивания и массопереноса в геофизических течениях [1–4]. Известно, что в океанологии перемешивание представляет собой обменное движение объемов воды, происходящее во всех горизонтальных направлениях и по толщине моря или океана. При этом объемы воды переносят свои параметры, а именно, температуру, соленость и плотность. Перенос теплой воды через холодные плотные воды континентального склона – таково наиболее общее классическое описание Гольфстрима. Естественно, течение Гольфстрима оставляет свои следы в виде отрывающихся от основного потока и движущихся теплых объемов воды в окружающих холодных водах. Следует отметить, что массоперенос теплых вод в окружение очень велик, его объем превышает расход всех рек земного шара. Изучение механизмов обмена теплыми и холодными объемами воды, основных закономерностей процесса их перемешивания и переноса является главной целью нашего исследования. Поскольку при соприкосновении вод, значительно различающихся по температурным характеристикам, между ними образуется граничная зона, движение и транспорт кото-

рой определяют процесс перемешивания наиболее четко, то для выполнения этой цели можно применить подход Лагранжа при описании процессов обмена. Если идентифицировать движение граничной зоны с движением отдельных лагранжевых точек, ее составляющих (или пассивных маркеров, другими словами), то процесс перемешивания получает лагранжево описание. Именно переход к использованию лагранжева описания в известном эйлеровом поле течения является ключевым моментом в теории хаотической адвекции и применении других подходов теории динамических систем в гидромеханике. Связь между теорией динамических систем и изучением массопереноса (движения объемов воды) в геофизических течениях обуславливается общими характерными геометрическими когерентными структурами, которые оказываются принципиальными для динамики систем и геофизических течений морей и океанов. Мотивировкой настоящей работы является применение математического аппарата современной теории динамических систем и теории хаотической адвекции в частности к изучению транспортных свойств в идеализированных моделях океанских течений на примере течения Гольфстрим. Напомним, что система Гольфстрима объединяет все течения, переносящие воды в северном и северо-восточном направлении от Флоридского пролива до района его разветвления у входа в Северный Ледовитый океан. Собственно Гольфстримом на-

зывают среднюю часть системы течений между мысом Хаттерас и районом у большой Ньюфаундлендской банки [5]. После мыса Хаттерас Гольфстрим как бы начинает извиваться. На этом извилистом участке своего пути Гольфстрим образует огромные волнообразные меандры. Движение воды в меандрах становится неустойчивым и объемы теплой жидкости отрываются от потока, образуя циклонические вихри к югу и антициклонические к северу от основного течения Гольфстрима. Таким образом, существуют следующие когерентные структуры, связанные с течением Гольфстрима: 1) само извивающееся (меандрирующее) течение на восток; 2) две системы вихрей: одна к югу, другая к северу от основного течения; 3) обрамляющее прямолинейное течение на запад [6–12].

Данная работа посвящена построению математической модели течения Гольфстрима, которая содержит основные указанные выше когерентные структуры. Для этого в первых разделах из основных уравнений геофизических потоков, в условиях, характерных для геострофических течений, получено общее квазигеострофическое уравнение в нетрадиционном виде. Далее на основе обзора работ по анализу и численному решению уравнений течения подтверждается существование указанных выше когерентных структур в течении Гольфстрима. Последний параграф настоящей статьи посвящен анализу эмпирической модели поля течения Гольфстрима, которая содержала необходимые когерентные характеристики.

1. УРАВНЕНИЯ ГЕОФИЗИЧЕСКОЙ ГИДРОДИНАМИКИ

Описание крупномасштабных процессов (порядка сотен и тысяч километров), развивающихся в океане, требует учета кривизны поверхности Земли, что можно сделать, например, путем использования сферической системы координат [13–15]. Вместе с тем, для указанной цели часто используется более простая и наглядная декартова система координат [16–18], связанная с определенной точкой поверхности океана. Для учета сферичности Земли применяется приближение β -плоскости $f = f_0 + \beta y$ (здесь f – параметр Кориолиса; β – его изменение по широте).

Для описания океанических течений используется система уравнений движения несжимаемой неоднородной (стратифицированной) жидкости. Приведем здесь указанную систему уравнений в декартовой системе координат [17, 18], оси x и y которой направлены соответственно на во-

сток и север, ось z – в вертикальном направлении. Используются приближения Буссинеска и квазистатическое [15]. Для действия силы Кориолиса принято традиционное приближение, в соответствии с которым учитывается только проекция вектора углового вращения Земли на местную вертикаль.

Уравнения движения в горизонтальной плоскости будут иметь вид:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} - fv = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x} + \mathcal{F}(u), \quad (1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} + fv = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial y} + \mathcal{F}(v), \quad (2)$$

где u, v, w – составляющие скорости жидкости по направлениям x, y, z соответственно; p – давление; ρ_0 – невозмущенная плотность морской воды; $\mathcal{F}(u), \mathcal{F}(v)$ – диссипативные члены, причем

$$\mathcal{F}() = A_L \nabla^2 + \frac{\partial}{\partial z} A_z \frac{\partial}{\partial z}, \quad \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

– горизонтальный оператор Лапласа; A_L и A_z – соответственно горизонтальный и вертикальный коэффициенты турбулентной вязкости (молекулярная вязкость в океане может быть существенной лишь у твердых границ), зависящие, в общем случае, от z .

В систему уравнений входят также уравнение движения для вертикальной координаты, совпадающее в квазистатическом приближении с уравнением гидростатики (g – ускорение силы тяжести):

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial z} - \rho g; \quad (3)$$

уравнение неразрывности:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (4)$$

и уравнение диффузии плотности:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} + v \frac{\partial \rho}{\partial y} + w \frac{\partial \rho}{\partial z} = K_L \nabla^2 \rho + \frac{\partial}{\partial z} K_z \frac{\partial \rho}{\partial z}, \quad (5)$$

где K_L и K_z – соответственно горизонтальный и вертикальный коэффициенты турбулентной диффузии. Последнее уравнение представляет собой сведенные в одно уравнения переноса тепла и соли, что возможно при линейной зависимости плотности от температуры и солености в приближении Буссинеска [17].

Поскольку $A_L \ll A_z$, в классической теории океанических течений в уравнениях (1)–(2) оставляются только члены, описывающие вертикальное

турбулентное трение [16]. Полагая также, что вертикальный коэффициент турбулентной вязкости не зависит от z , для диссипативных составляющих уравнений (1)–(2) получим

$$\mathcal{F}(u) = A_v \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}, \quad \mathcal{F}(v) = A_v \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}. \quad (6)$$

Полученная система уравнений дополняется граничными условиями. На поверхности океана задается кинематическое граничное условие для свободной поверхности либо используется приближение "твердой крышки"; на дне океана – условие обтекания или условие прилипания [17, 18]. На боковых границах условия задаются, исходя из конкретной постановки задачи.

2. КВАЗИГЕОСТРОФИЧЕСКОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ

Оценка величины членов уравнений (1)–(2) показывает, что для океанических течений с масштабами, соизмеримыми с радиусом Земли (порядка тысячи километров), отношение вклада адвективных членов к кориолисовым (число Россби) много меньше единицы ($Ro \sim 10^{-2}$). Подобная оценка имеет место также для вязких членов, отношение которых к кориолисовым характеризуется горизонтальным и вертикальным числами Экмана ($Ek_h \sim 10^{-5}$, $Ek_v \sim 10^{-4}$) [18]. Таким образом, вклад адвективных составляющих является малой величиной по сравнению с вкладом кориолисовых, вклад вязких членов – величиной еще более высокого порядка малости.

Из данных оценок следует геострофическое приближение, в соответствии с которым горизонтальный градиент давления балансируется силами Кориолиса

$$-fv = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x}, \quad fu = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial y}. \quad (7)$$

Такое приближение хорошо описывает установившиеся течения в открытом океане вдали от прибрежных и фронтальных зон.

Для описания движений в океане с масштабами, много меньшими радиуса Земли (порядка 100 километров), к которым относятся меандры и вихри океанических течений, в уравнениях движения требуется учет адвективных членов. Указанной цели служит так называемое квазигеострофическое приближение. Горизонтальные проекции скорости по-прежнему находятся из условия гео-

строфического баланса

$$u = -\frac{1}{f_0 \rho_0} \frac{\partial p'}{\partial y}; \quad v = \frac{1}{f_0 \rho_0} \frac{\partial p'}{\partial x}; \quad \rho' = -\frac{1}{g} \frac{\partial p'}{\partial z}. \quad (8)$$

Здесь p' , ρ' – возмущения давления и плотности; соотношение, устанавливающее связь между ними, следует из условия гидростатики.

Ввиду того, что характерный масштаб изменения параметра Кориолиса в данном случае существенно больше характерного масштаба изучаемых океанических процессов, значение параметра Кориолиса в выражении (8) считается локально постоянным, т.е. полагается $f = f_0$.

Оценка величины членов уравнения (5) показывает, что вкладом диффузионных членов, стоящих в правой части, можно пренебречь при обязательном учете вклада всех членов левой части [18]. Из уравнения (5) в данном приближении получается уравнение для вертикальной скорости:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} \right) \rho - \frac{\rho_0 N^2}{g} w = 0. \quad (9)$$

Здесь N – частота Вайселя – Брента

$$N^2 = -\frac{g}{\bar{\rho}(z)} \frac{d\rho}{dz}.$$

Для описания движения жидкости используется уравнение завихренности, получаемое путем исключения градиентов давления из уравнений движения (1)–(2) без диссипативных членов в правой части, что достигается перекрестным дифференцированием данных уравнений:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} \right) \left(\frac{1}{f_0 \rho_0} \nabla^2 p' + \beta y \right) - f_0 \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \quad (10)$$

В процессе вывода уравнения (10) учитывалось условие (4) и были опущены некоторые члены, имеющие порядок числа Россби (в частности, произведения горизонтальных производных скорости w).

Уравнения (8)–(10) образуют систему уравнений квазигеострофического приближения [14]. После введения функции тока $\psi = p' / \rho_0 f_0$ выражения для u , v , ρ' могут быть преобразованы к виду

$$u = -\frac{\partial \psi}{\partial y}; \quad v = \frac{\partial \psi}{\partial x}; \quad \rho' = -\frac{\rho_0 f_0}{g} \frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad (11)$$

а уравнение для вертикальной скорости – к виду

$$w = -\frac{f_0}{N^2} \left[\frac{\partial^2 \psi}{\partial t \partial z} + J \left(\psi, \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) \right], \quad (12)$$

где J – якобиан по переменным x, y

$$J(f, g) = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial g}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial g}{\partial x}.$$

Уравнение завихренности (10) с помощью (11) и (12) преобразуется к квазигеострофическому уравнению для функции тока

$$\frac{\partial q}{\partial t} + J(\psi, q) = 0, \quad (13)$$

где

$$q = \nabla^2 \psi + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{f_0^2}{N^2} \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) + \beta y. \quad (14)$$

Величина q называется квазигеострофическим потенциальным вихрем [13, 15]. Для баротропных движений, характеризующихся пренебрежимо малым вертикальным градиентом давления, в выражении (14) можно пренебречь вторым слагаемым. В этом случае уравнение (13) принимает вид

$$\frac{\partial}{\partial t} (\nabla^2 \psi) + J(\psi, \nabla^2 \psi) + \beta \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0. \quad (15)$$

В ряде задач, в частности при моделировании течений с возникновением когерентных структур, необходим также учет вязкости. В этом случае используются уравнения вида (13) или (15) с диссипативным членом \mathcal{D} в правой части, выраженным через функцию тока. Выражение для \mathcal{D} можно получить, выполнив преобразования для вязких членов уравнений движения, аналогичные преобразованиям адвективных членов.

3. ОБЗОР СОВРЕМЕННЫХ МОДЕЛЕЙ ТЕЧЕНИЯ ГОЛЬФСТРИМА

Изучение процессов обмена теплой и холодной воды в Северной Атлантике получило качественный скачок в последние десятилетия в связи с возможностью применения современных методов космического наблюдения. Поскольку течение Гольфстрима характеризуется резким градиентом температур между водами течения и окружающими, то это позволяет четко очертить контуры самого течения и следить за обменными процессами. Экспериментальное изучение транспортных свойств течения и его теплых вод проводится в основном с помощью дрейфующих буев, содержащих электронную аппаратуру, позволяющую со спутников отслеживать их перемещение.

Американские ученые Боуэр и Россби [6, 7], проводившие впервые экспериментальные работы, проследили передвижение 37 таких буев в течение 30–45 дней. Они показали, что сначала буи,

запущенные на главном термоклине Гольфстрима у мыса Хаттерас, следуют по течению, но затем начинают дрейфовать самым непредсказуемым образом. Боуэр и Россби построили график совокупности траекторий отдельных буев, который получил название “спагетти”, ставшее довольно популярным в научной литературе. Рисунок “спагетти” представляет собой клубок запутанных траекторий, причем каждая траектория имеет участки как прямолинейного движения, так и кругового вращения вокруг центров, которые произвольно расположены около Гольфстрима и движутся как бы с ним. Рисунок “спагетти” образно отражает суть движения лагранжевых (или, другими словами, отдельных поплавков-маркеров в поле течения Гольфстрима). Они чувствуют сильно направленное течение только в начале пути, затем отходят от главного русла, кружатся в циркуляционном движении и удаляются от течения. Рисунок совокупности траекторий поплавков выглядит так, будто кто-то выронил вареные спагетти на карту северной части Атлантического океана [19].

Объяснение такой сложной картины запутанных траекторий Боуэр и Лозье [8] пытались найти в образовании отдельных вихрей соседними меандрами и отрыве этих вихрей в точках, где меандры могли бы соприкоснуться. Однако образование и отрыв таких вихрей – довольно редкое явление (до 10-20 раз в году). А эксперименты с буями показывают, что траектория каждого из них (т. е. траектория из произвольной начальной точки на Гольфстриме) может иметь несколько областей вращения, причем каждая – вокруг только своих центров вращения. Поэтому механизм образования и отрыва вихрей не может быть объяснением, так как появление центров таких вихрей возникает редко.

Вид запутанных траекторий буев Боуэр также пыталась объяснить, построив упрощенную кинематическую модель [7] течения Гольфстрим. На основе этой модели с аналитически заданной функцией тока предполагалось объяснить сложность траекторий, применяя парадигму хаотической адвекции, когда сложное хаотическое движение лагранжевых частиц возникает даже в простом эйлеровом поле течения.

Эми Боуэр предложила при двумерной аппроксимации Гольфстрима, когда компоненты вектора скорости

$$\vec{V}(x, y, t) = u(x, y, t)\vec{i} + v(x, y, t)\vec{j} \quad (16)$$

связаны с функций тока ψ соотношениями

$$u = -\frac{\partial\psi}{\partial x}; \quad v = \frac{\partial\psi}{\partial y}, \quad (17)$$

функцию тока вида

$$\psi(x, y, t) = \psi_0 \left\{ 1 - \operatorname{th} \left[\frac{y - A \sin k(x - ct)}{\lambda / \cos\{\arctg(Ak \cos k(x - ct))\}} \right] \right\}, \quad (18)$$

где A – амплитуда центральной линии меандрирующего потока; $k = 2\pi/L$ – волновое число; λ – ширина потока. (При расчетах Боуэр использовала следующие параметры: $c = 10$ км/д; $A = 50$ км; $L = 400$ км, где д = 24 часа.) Член, стоящий в знаменателе (18), включен в формулу, чтобы ширина потока была одинаковой на разных участках. Для анализа поля течения Гольфстрима удобнее перейти к подвижной системе координат, которая движется с фазовой скоростью ct . В подвижной системе функция тока будет иметь вид:

$$\psi(x', y') = \psi_0 \left\{ 1 - \operatorname{th} \left[\frac{y' - A \sin kx'}{\lambda / \cos\{\arctg(Ak \cos kx')\}} \right] \right\} + cy'. \quad (19)$$

Из выражения (19) видно, что функция тока в модели Боуэр в подвижной системе координат не зависит от времени. И, следовательно, система уравнений адвекции, построенная с использованием функции тока (19), не будет иметь никаких хаотических режимов и не сможет объяснить спутанность траекторий поплавков следствием их хаотической адвекции. Таков главный недостаток модели Боуэр. Однако она обладает принципиальным достоинством; модель Боуэр описывает главные когерентные структуры Гольфстрима, а именно: меандрирующее струйное течение в восточном направлении; рециркуляционные зоны во впадинах и пиках меандров и окаймляющее течение в западном направлении.

Позднее Самелсон [9] предложил несколько усложнить модель Боуэр. Он ввел дополнительную зависимость амплитуды от времени, предположив, что $A = A_0 + \varepsilon \cos(\omega t)$, где ε – малый параметр (например, $\varepsilon = 0.03$, $\omega = 0.02$). При этом Самелсон использовал для функции тока ψ аппроксимацию вида

$$\psi(x', y') = \psi_0 \left\{ 1 - \operatorname{th} \left[\frac{y' - A \sin kx'}{\lambda(1 + A^2 k^2 \sin^2 kx')^{1/2}} \right] \right\} + cy'. \quad (20)$$

Картина линий тока в меандрирующем течении, соответствующая модели Самелсона при $A = A_0$, приведена на рис. 1. Изолинии построены в безразмерных координатах, причем в качестве параметра обезразмеривания выбрана длина меандра L . На графике хорошо видны когерентные структуры: основная струя (область M), рециркуляционные зоны (области R), окаймляющее встречное течение в областях B . Система линий тока имеет особые точки типа центра в областях рециркуляции R , а также седловые (гиперболические) точки K . Подробный анализ конфигурации особых точек в модели Самелсона проведен в [12].

Следует отметить, что расчет линий тока в настоящей работе проводился для модифицированной модели Самелсона, допускающей фазовый сдвиг φ в аргументе синуса:

$$\psi(x', y') = \psi_0 \left\{ 1 - \operatorname{th} \left[\frac{y' - A \sin(kx' + \varphi)}{\lambda(1 + A^2 k^2 \sin^2 kx')^{1/2}} \right] \right\} + cy'. \quad (21)$$

(При расчетах полагалось, что $\varphi = \pi/2$).

Возможность обмена и хаотической транспортировки объемов теплой воды в холодной присутствия модели Самелсона при $A = A(t)$. Такая возможность объясняется применением теории гетероклинических точек и петлевой динамики [10,11,23]. Временная зависимость, введенная Самелсоном, приводит к тому, что сепаратрисы, ограничивающие рециркуляционные зоны, начинают пересекаться. Так, неустойчивое многообразие одной гиперболической точки пересекается с устойчивым многообразием другой. И таких пересечений будет бесконечное множество. Объем, вернее площадь жидкости, ограниченная отрезками неустойчивого и устойчивого многообразия, должна сохраняться и отображаться (т.е. двигаться) от одной петли к другой [10,11,23]. Что, собственно, и объясняет механизм транспорта теплой жидкости Гольфстрима от центрального течения на периферию.

Следующий значительный вклад в понимание законов транспорта жидкости в Гольфстриме и вокруг него был сделан в работах дель-Кастилло-Негрете и Моррисона [20], а также Пратта, Лозье и Беляковой [21]. В каждой из этих работ были разработаны динамические модели течения, описывающие его поведение подобно моделям Боуэр и Самелсона. Динамические модели были построены путем наложения на струйное течение нормальных мод, которые определяются из линейризованных баротропных уравнений. Главная идея состоит в том, что при аппроксимации можно

взять две первые моды и наложить их на струйное течение с коэффициентами разной величины. Первая мода с большой амплитудой снабжает струйное течение меандрами, а вторая с меньшей амплитудой делает его зависимым от времени. Если обе моды имеют несоизмеримые частоты, то у совокупной модели будет сложная временная зависимость. В частности, меандрирующее струйное течение будет иметь временные вариации, что, как и в модели Самелсона, будет вызывать значительное перемешивание теплых и холодных объемов жидкости и перемещение их по разным участкам струи. Динамические модели, как и кинематическая модель Самелсона, указывают на возможность эффективного хаотического перемешивания объемов жидкости, и более детально описывают этот процесс.

В работе Флерла, Меланотте-Риццоли и Забуски [22] баротропные уравнения для β -плоскости решались численно с целью определить начальные данные, которые бы генерировали меандрирующее течение. В этой работе описаны фундаментальные эффекты по генерированию меандрирующих течений таких как, например, Гольфстрим. Последующие работы Миллера и др. [23], а также Роджерсона и др. [24] были посвящены изучению на основе численного моделирования свойств транспорта жидкости в лагранжевом приближении.

Определяющими уравнениями в этих работах являются баротропные уравнения потенциально-го вихря (см. раздел 2) с диссипативным членом

$$\frac{\partial q}{\partial t} + J(\psi, q) = \mathcal{D}, \quad (22)$$

где ψ – функция тока; $q = \nabla^2 \psi + \beta y$ – потенциальный вихрь; \mathcal{D} – диссипативный член, который выбран в форме $\mathcal{D} = (\text{Re})^{-1} \nabla^4 \psi$ (переменные безразмерны).

Таким образом, уравнение для функции тока имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial t} (\nabla^2 \psi) + J(\psi, \nabla^2 \psi) + \beta \frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{1}{\text{Re}} \nabla^4 \psi. \quad (23)$$

При численном моделировании предполагалось выполнение периодических граничных условий по x и y . Уравнение решалось псевдоспектральным методом в квадратной полости со стороной $L_D = 25.6$ в безразмерных координатах [24, 23].

Начальные данные представляли собой слабо возмущенное струйное течение

$$\psi(x, y, 0) = -\text{erf}(y) + \frac{2y}{L_D} + \delta \exp(-y^2) \sin k_0 x. \quad (24)$$

Волновое число $k_0 = 2\pi n_0 / L_D$, где n_0 – целое число, в большинстве случаев равное 4 ($\text{Re} = 10^4$, $\beta = 0.207$).

Численный счет показал, что решение для функции тока ψ характеризуется доминантным периодическим течением с периодом $T_0 = 38.5$ и со скоростью течения по x (на восток) $c_0 = L_D / n_0 T_0$. Но кроме того, если перейти в подвижную систему координат, которая движется со скоростью c_0 , то картина линий тока в ней повторится и совпадет через временной интервал $T_1 < T_0$ (здесь $T_1 = 30.5$). Таким образом, в подвижной системе координат течение не постоянное и застывшее, а слабоосциллирующее во времени. Но главное, что показало численное моделирование, что решение уравнений баротропной потенциальной завихренности псевдоспектральным методом в подвижной системе координат характеризуется тремя главными элементами когерентной структуры, которые были выявлены и в модели Боуэр, а именно: меандрирующее струйное течение в восточном направлении; рециркуляционные зоны во впадинах и пиках меандров и окаймляющее течение в западном направлении. Кроме того, численное моделирование выявило периодическую модуляцию ("дыхание") амплитуд меандров друг относительно друга.

4. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ПРЕДПОСЫЛКИ ДЛЯ ВОЗНИКНОВЕНИЯ ХАОТИЧЕСКОГО ПЕРЕМЕШИВАНИЯ В ДВУМЕРНЫХ ТЕЧЕНИЯХ

Основная идея, на которой базируются различные подходы, изучающие хаотическое перемешивание в двумерных несжимаемых течениях, заключается в том, что задачу адвекции можно сформулировать, используя формализм гамильтоновых систем. При этом функция тока ψ играет роль гамильтониана. Тогда траектории пассивных частиц, подверженных адвекции, могут быть получены как решения системы

$$\dot{x} = -\psi_y(x, y); \quad \dot{y} = \psi_x(x, y). \quad (25)$$

Хаотическая динамика частиц в жидкости в большинстве рассмотренных случаев [25, 26] связана с существованием гиперболических точек в поле течения. Предположим, что мы имеем такую невозмущенную гамильтонову систему (25), которая характеризуется наличием гиперболических точек. (В нашей модели мы имеем гиперболические точки в точках пересечения сепаратрис, ограничивающих рециркуляционные зоны вверху и внизу

от основного меандрирующего течения). Гиперболические точки связаны друг с другом так называемыми многообразиями. Неустойчивое многообразие – это набор точек траекторий, которые в различные моменты времени стартуют из гиперболической точки, а устойчивое многообразие – это набор точек, которые стремятся к гиперболической точке при $t \rightarrow \infty$. В невозмущенной системе эти многообразия совпадают (как бы один конец сепаратрисы втекает в гиперболическую точку, а другой конец вытекает, но из другой гиперболической точки, являясь неустойчивым многообразием для нее).

Для возмущенной системы функция тока ψ будет иметь вид:

$$\psi = \psi_0(x, y) + \psi_1(x, y, t), \quad (26)$$

где $\psi_0(x, y)$ – невозмущенная составляющая, $\psi_1(x, y, t)$ – периодическое возмущение. Возмущение ψ_1 гамильтониана разделяет многообразие устойчивое и неустойчивое, поскольку "возмущает" любую траекторию. В этом случае они имеют бесконечное число пересечений, так как мы рассматриваем поведение системы в ограниченной области двумерного пространства. Точки их пересечения называются гетероклиническими точками [27].

Многообразия формируют сложную структуру петель, пересекаясь. Петля – это площадь, ограниченная с одной стороны неустойчивым, а с другой стороны – устойчивым многообразием. Площадь петли переходит от одной петли в другую через период возмущения и обуславливает процесс обмена и транспорта объемов жидкости [10, 11].

Из теории динамических систем известно, если устойчивое многообразие гиперболической точки и неустойчивое многообразие другой гиперболической точки имеют точку пересечения, то они будут иметь бесконечно много таких точек пересечения, (так как по определению, многообразия – это наборы точек, которые при $t \rightarrow \infty$ движутся вдоль многообразия к гиперболическим точкам и "уйти" с многообразия не могут). Многообразия являются инвариантными относительно периода возмущения ψ_1 . Таким образом, возмущение ψ_1 переносит гетероклиническую точку многообразия как на устойчивое, так и неустойчивое многообразие. Это означает, что образ гетероклинической точки снова будет гетероклинической точкой. Петли становятся длиннее и тоньше, когда они приближаются к гиперболической точке. Это происходит потому, что система (25) является отображением, сохраняющим площадь, поскольку дивергенция системы равна нулю. Петли

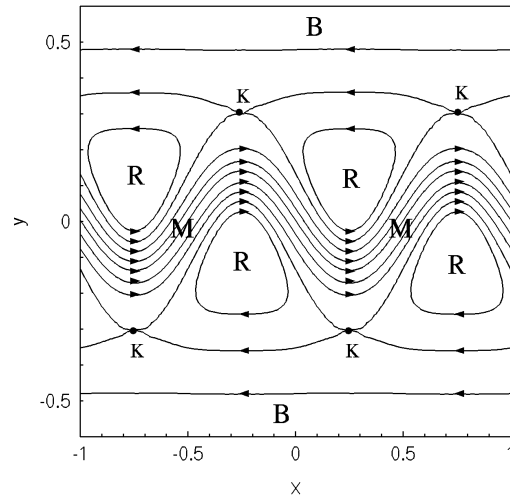


Рис. 1. Картина линий тока в модели Самелсона

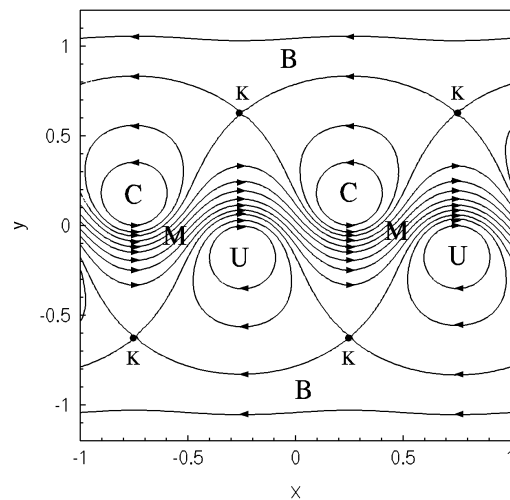


Рис. 2. Картина линий тока в вихревой модели

растут параллельно неустойчивому многообразию гиперболической точки. Петлевая динамика очень важна для понимания перемешивания и обменного процесса в течениях. Так, около центральной гетероклинической точки материал переносится из одной рециркуляционной зоны (ячейки) в другую. Количество материала (жидкости), транспортируемого из одной зоны в другую в течение одного периода действия возмущения, равно площади петли.

5. НОВАЯ КИНЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ МЕАНДРИРУЮЩЕГО ТЕЧЕНИЯ

В разделе 3 показано, что при использовании динамической модели течения Гольфстрим (баротропного уравнения потенциальной завихренности) численное моделирование подтвердило наличие трех главных элементов когерентной структуры и позволило выявить временную модуляцию структур в подвижной системе координат. Учитывая это, для объяснения механизмов транспортировки и процессов обмена в течении Гольфстрим предлагается новая кинематическая модель течения, которая обладает как свойствами, характерными для динамической модели, так и только ей присущим преимуществом. Это преимущество заключается в том, что предлагаемая кинематическая модель – модификация лабораторно наблюдаемого и очень известного явления. А именно, она служит обобщением функции тока дорожки Кармана [28]. Как известно, такая функция тока описывает систему вихрей за бесконечным цилиндром, который движется с постоянной скоростью в плоскопараллельном потоке параллельно оси Ox . В подвижной системе координат, перемещающейся вместе с вихрями, вихри будут стационарными. Для их описания можно применить функцию тока

$$\psi(x, y) = \Psi(x, y) + cy, \quad \Psi = -\frac{\Gamma}{4\pi} \ln \frac{P(x, y)}{Q(x, y)}, \quad (27)$$

где c – скорость перемещения системы вихрей по направлению оси Ox ; Γ – интенсивность вихрей;

$$P(x, y) = \operatorname{ch} \frac{2\pi}{l} \left(y + \frac{h}{2} \right) + \sin \frac{2\pi x}{l};$$

$$Q(x, y) = \operatorname{ch} \frac{2\pi}{l} \left(y - \frac{h}{2} \right) - \sin \frac{2\pi x}{l}.$$

Функция тока $\Psi(x, y)$ описывает течение, которое содержит два первых элемента когерентных структур: меандрирующее течение и два набора вихрей.

После перехода к безразмерным переменным $\tilde{x} = x/l, \tilde{y} = y/l$ выражения (27) примут вид

$$\tilde{\psi}(\tilde{x}, \tilde{y}) = -\frac{1}{2k} \ln \frac{P(\tilde{x}, \tilde{y})}{Q(\tilde{x}, \tilde{y})} + \tilde{c} \tilde{y}, \quad (28)$$

где

$$P(\tilde{x}, \tilde{y}) = \operatorname{ch} k(\tilde{y} + b) + \sin k\tilde{x};$$

$$Q(\tilde{x}, \tilde{y}) = \operatorname{ch} k(\tilde{y} - b) - \sin k\tilde{x};$$

$\tilde{\psi} = \psi/\Gamma; \tilde{c} = cl/\Gamma; b = h/2l; k = 2\pi$. На рис. 2 представлено поле течения, задаваемое предлагаемой моделью. Символом M отмечено меандрирующее течение – первый главный элемент когерентной структуры течения Гольфстрим в подвижной

системе координат. Области U и S есть области циркуляционного движения циклонического S и антициклонического вращения U . Движение жидкости в отрицательном направлении на границах области течения обозначено как B .

Как видно из сравнения рис. 1 и 2, расположение областей M меандрирующего потока, областей циркуляционного движения (обозначенных как R в модели Самелсона и S, U для вихревой модели) и областей B – обрамляющего движения в отрицательном направлении, качественно подобны. Роль особых точек типа центров, находящихся в рециркуляционных зонах R модели Самелсона, здесь выполняют точечные вихри в областях S, U . Координаты точечных вихрей (для положительных x) следующие: $x_1 = l/4, y_1 = h/2; x_2 = 3l/4, y_2 = -h/2$.

Следует отметить, что в окрестностях точечных вихрей величина скорости стремится к бесконечности (что, конечно же, не имеет места в реальных течениях). Поэтому, при использовании данной модели в практических целях (например, для расчетов массопереноса в меандрирующих течениях) окрестности указанных точек должны быть исключены из рассмотрения.

Как и поле течения модели Самелсона, поле течения вихревой модели обладает гиперболическими (седловыми) точками. Для определения координат гиперболических точек подставим выражение для функции тока (28) в (25). Вычислив производные по \tilde{x} и \tilde{y} , получим

$$\dot{\tilde{y}} = -\frac{\operatorname{ch} kb}{PQ} \cos k\tilde{x} \operatorname{ch} k\tilde{y}; \quad (29)$$

$$\dot{\tilde{x}} = \frac{\operatorname{ch} kb}{PQ} (\operatorname{sh} kb - \sin k\tilde{x} \operatorname{sh} k\tilde{y}) - \tilde{c}, \quad (30)$$

(здесь аргументы функций P и Q опущены). Приравняв нулю выражение (29), находим, что $\dot{\tilde{y}}$ обращается в нуль в области положительных \tilde{x} при $k\tilde{x} = \pi/2$ или при $k\tilde{x} = 3\pi/2$, т. е. в точках с размерными координатами $x_3 = l/4, x_4 = 3l/4$. Подставляя указанные значения $k\tilde{x}$ в выражение (30) и приравняв его нулю, получаем:

$$\frac{\operatorname{ch} kb (\operatorname{sh} kb \mp \operatorname{sh} k\tilde{y})}{(\operatorname{ch} k(\tilde{y} + b) \pm 1) (\operatorname{ch} k(\tilde{y} - b) \mp 1)} = \tilde{c}. \quad (31)$$

В выражениях (31), а также (32) – (34) верхние знаки соответствуют случаю $k\tilde{x} = \pi/2$, нижние – случаю $k\tilde{x} = 3\pi/2$.

Преобразуя левую часть (31) в соответствии с правилами операций над гиперболическими функциями [29], приходим к соотношению

$$\frac{\operatorname{ch} kb}{\operatorname{sh} kb \pm \operatorname{sh} k\tilde{y}} = \tilde{c}, \quad (32)$$

из которого находим, что

$$\tilde{y}_{3,4} = \mp \frac{1}{k} \operatorname{Arsh} \left(\frac{1}{c} \operatorname{ch} kb - \operatorname{sh} kb \right), \quad (33)$$

или, возвращаясь к размерным переменным:

$$y_{3,4} = \mp \frac{l}{2\pi} \operatorname{Arsh} \left(\frac{\Gamma}{cl} \operatorname{ch} \frac{\pi h}{l} - \operatorname{sh} \frac{\pi h}{l} \right). \quad (34)$$

Функция тока в рассматриваемой модели может быть модифицирована таким образом, чтобы вихри в подвижной системе координат не являлись стационарными, а "дышали" друг относительно друга. Для этого достаточно предположить, что в выражении (27) для функции тока ψ имеет место возмущение вида

$$\Gamma = \Gamma_0 + \varepsilon \cos(\omega t),$$

где Γ_0 – постоянная величина; ε – малый параметр; ω – частота изменения амплитуды вихрей.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

На основе использования физической модели дорожки Кармана построена математическая модель, позволяющая качественно и количественно описать течение Гольфстрим в подвижной системе координат, характеризующееся следующими когерентными структурами: среднее извивающееся (меандрирующее) течение в восточном направлении; две системы циркуляционных зон между вершинами и подошвами меандров и обрамляющее прямолинейное течение в западном направлении.

1. Aref H. Stirring by chaotic advection // Journ. Fluid Mech.– 1984.– v.143, N 1.– P. 1–24.
2. Aref H. Chaotic advection of fluid particles // Phil. Trans. R. Soc. London.– 1990.– v.333.– P. 273–289.
3. Aref H. Stochastic particle motion in laminar flows // Phys. Fluids.– 1991.– v.3.– P. 1009–1016.
4. Aref H. The development of chaotic advection // Phys. Fluids.– 2002.– v.14.– P. 1315–1325.
5. Стоммел Г. Гольфстрим.– М.: ИЛ, 1963.– 227 с.
6. Bower A. S., Rossby H. T. Evidence of cross-frontal exchange in the Gulf Stream based isopycnal RAFOS float data // Journ. of phys. oceanography.– 1989.– v.19, N 9.– P. 1177–1190.
7. Bower A. S. A simple kinematic mechanism for mixing fluid parcels across a meandering jet // Journ. of phys. oceanography.– 1991.– v.21, N 1.– P. 173–180.
8. Bower A. S., Lozier M. S. A closer look at particle exchange in the Gulf Stream // Journ. of phys. oceanography.– 1994.– v.24.– P. 1399–1418.
9. Samelson R. M. Fluid exchange across a meandering jet // Journ. of phys. oceanography.– 1992.– v.22, N 4.– P. 431–440.
10. Samelson R., Wiggins S. Lagrangian transport in geophysical jets and waves.– New York: Springer, 2005.– 148 p.
11. Wiggins S. The dynamical system approach to Lagrangian transport in oceanic flows // Ann. Rev. Fluid Mech.– 2005.– v. 37.– P. 295–328.
12. Будянский М. В., Пранц С. В., Улейский М. Ю. Хаотическая адвекция в меандрирующем струйном потоке // Нелинейная динамика.– 2006.– т.2, N 2.– С. 165–180.
13. Педлоски Дж. Геофизическая гидродинамика, т.1.– М.: Мир, 1984.– 400 с.
14. Каменкович В. М., Кошляков М. Н., Монин А. С. Синоптические вихри в океане.– Л.: Гидрометеоздат, 1982.– 264 с.
15. Каменкович В. М., Монин А. С. Основные положения термогидромеханики океана // Физика океана, т.1.– М.: Наука, 1978.– С. 85–112.
16. Зырянов В. Ф. Теория установившихся океанических течений.– Л.: Гидрометеоздат, 1985.– 248 с.
17. Кочергин В. П. Теория и методы расчета океанических течений.– М.: Наука, 1978.– 128 с.
18. Саркисян А.С. Численный анализ и прогноз морских течений.– Л.: Гидрометеоздат, 1977.– 183 с.
19. Jones C. K. R. T., Winkler S. Invariant manifold and Lagrangian dynamics in the ocean and atmosphere // Handbook of Dynamical Systems, v.2.– Nort-Holland: Amsterdam, 2002.– P. 55–92.
20. del-Kastillo-Negrete D., Morison P. J. Chaotic transport by Rossby waves in shear flow // Phys. Fluids A.– 1993.– v.5, N 4.– P. 948–965.
21. Pratt L. J., Lozier M. S., Beliakova N. Parcel trajectories in barotropic jet: Neutral modes // Journ. of phys. oceanography.– 1995.– v.25.– P. 1451–1466.
22. Flierl G. R., Malanotte-Rizzoli P., Zabusky N. J. Nonlinear waves and coherent vortex structure in barotropic β -plane jets // Journ. of phys. oceanography.– 1987.– v.17, N 9.– P. 1408–1438.
23. Miller P. D., Jones C. K. R. T., Rogerson A. M., Pratt L. J. Quantifying transport in numerically-generated velocity field // Physica D.– 1997.– v.110, N 1-2.– P. 105–122.
24. Rogerson A. M., Miller P. D., Pratt L. J., Jones C. K. R. T. Lagrangian motion and fluid exchange in barotropic meandering jets // Journ. of phys. oceanography.– 1999.– v.29.– P. 2635–2665.
25. Meleshko V.V., Aref H. A blinking rotlet model for chaotic advection // Phys. Fluids.– 1996.– v. 8.– P. 3215–3217.
26. Meleshko V.V., van Heijst G.J.F. Interacting two-dimensional vortex structures: point vortices, contour kinematics and stirring properties // Chaos, Solitons & Fractals.– 1994.– v.4.– P. 977–1010.
27. Кузнецов С. П. Динамический хаос.– М.: Физматлит, 2001.– 295 с.
28. Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В. Теоретическая гидромеханика, ч.1.– М.: ГИФМЛ, 1963.– 584 с.
29. Янпольский А. Р. Гиперболические функции.– М.: Физматгиз, 1960.– 196 с.