УДК 519.8

В.М. ГОРБАЧУК, В.В. БОЙКО, И.А. РУСАНОВ

ПРОЕКТИРОВАНИЕ КОНТРАКТОВ В УСЛОВИЯХ РИСКА

Проведен анализ двухуровневой проблемы управления и построены соответствующие задачи оптимизации. Предложены условия существования решений таких задач и связанности ограничений.

Введение. При моральном риске рыночные размещения в условиях неопределенности могут не быть всегда безусловно Парето-оптимальными [4, 12] (К. Эрроу – Нобелевский лауреат 1972 г.) Пример такого рыночного размещения второго наилучшего дает игра двух лиц, в которой один игрок (принципал) не может наблюдать действия другого (агента), но от этих действий зависит суммарный выигрыш игроков. Оптимальное действие агента зависит от распределения риска между игроками.

Приложениями задачи принципал-агент являются: страхование, когда страховщик не может наблюдать уровень осторожности застрахованого лица; землепользование, когда землевладелец не может наблюдать исходное решение фермера-арендатора; управление, когда собственник фирмы не может наблюдать уровень усилий менеджера или работника [1–3, 8, 9, 11, 14, 15].

Принципал выбирает контракт распределения рисков (схему стимулирования), максимизирующий его ожидаемую полезность при ограничениях: ожидаемая полезность агента не ниже некоторой заданной; полезность агента достигает стационарной точки, где удовлетворяются условия первого порядка относительно действий. Условия второго порядка также существенны для глобальной максимизации полезности агента [11].

В данном анализе задачи принципал-агент применим подход, избегающий сложностей условий оптимальности второго порядка за счет разделения целевой функции принципала на составляющие выигрыша и затрат [7].

В стандартном примере приложения задачи принципал-агент владелец фирмы (принципал) делегирует ведение дел фирмы менеджеру (агенту) и не отслеживает действия менеджера, но наблюдает результат таких действий – валовую прибыль фирмы. В ряде ситуаций у принципала есть возможности несовершенного мониторинга действий менеджера [8, 9, 14, 15]. Пусть эта прибыль зависит от действий менеджера, а также от других факторов вне власти менеджера – случайных факторов. Тогда, если дела фирмы идут хорошо, то владельцу не вполне ясно, что является причиной успеха фирмы – действия менеджера или удачное стечение обстоятельств.

Предположим, что принципал

наблюдает лишь конечное количество уровней валовой прибыли фирмы: q_1, $q_2,\ldots,$ q_n;

заинтересован только в чистой прибыли фирмы, т. е. валовой прибыли минус оплата менеджера;

нейтрален к риску;

множество A действий (actions) менеджера является непустым компактным подмножеством конечномерного евклидова пространства R^n;

$$S = \{x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in R^n : \ x \geq 0, \ \sum_{i=1}^{n} x_i = 1\};$$

существует некоторая непрерывная вектор-функция $\pi : A \to S$, где $\pi(a) = (\pi_1(a), \pi_2(a), \ldots, \pi_n(a))$ задает вероятности исходов q_1, $q_2,\ldots,$ q_n при выборе действия $a \in A$;

$\forall a \in A$ менеджер знает значение функции $\pi(a)$, но не знает результирующего исхода $q_i \in \{q_1,\ q_2,\ldots,\ q_n\}$;

менеджер имеет функцию $U(a, I)$ полезности (utility) фон Неймана–Моргенштерна (von Neumann–Morgenstern), где I – вознаграждение менеджеру от принципала;

$$\text{A1. } U(a, I) = G(a) + K(a)V(I),$$

где: $G(a)$, $K(a)$ – вещественнозначные, непрерывные функции, определенные на A, причем $K(a)$ – строго положительная функция;

$V(I)$ – вещественнозначная, непрерывная, строго возрастающая, вогнутая функция, определенная на некотором открытом интервале $\mathrm{I} = (\underline{I}, \infty)$ вещественной прямой, причем $V(I) \to -\infty$ при $I \to \underline{I}$, допуская случай $\underline{I} = -\infty$ (предпочтения менеджера по лотереям дохода проявляют несклонность к риску);

если $U(a_1, I_1) \geq U(a_2, I_1)$, то $U(a_1, I_2) \geq U(a_2, I_2)$ для любых a_1, $a_2 \in A$ и I_1, $I_2 \in \mathrm{I}$ (предпочтения менеджера по лотереям дохода не зависят от его действий; ранжирование менеджером по совершенно определенным действиям не зависит от дохода, однако предпочтения менеджера по лотереям действий могут зависеть от дохода).

Если предпочтения менеджера по лотереям дохода не зависят от действий, то $U(a,I) = G(a) + K(a)V(I)$ для некоторых функций $G(a)$, $K(a)$, $V(I)$ [10].

Если $K(a)$ не является постоянной, то $V(I)$ ограничена сверху;

если $K(a)$ постоянна, то $U(a,I)$ аддитивно сепарабельна по a, I.

Если $G(a) = 0$, то $U(a,I)$ мультипликативно сепарабельна по a, I;

если при этом $K(a)$ не является постоянной, то $V(I)$ неположительна.

Если $K(a)$ является константой или $G(a) = 0$, то предпочтения (менеджера) по лотереям действий не зависят от дохода, а предпочтения по лотереям дохода не зависят от действия. Наоборот, если предпочтения по лотереям действий не зависят от дохода или предпочтения по лотереям дохода не зависят от действия, то $U(a,I)$ аддитивно или мультипликативно сепарабельна [10, 13].

Представляет интерес частный случай мультипликативной сепарабельности, когда $V(I) = -\exp(-k\,I)$, $K(a) = \exp(k\,a)$, A – подмножество вещественной прямой. Тогда $U(a,I) = K(a)V(I) = -\exp[k(a-I)]$ уменьшается с ростом a.

Если принципал может наблюдать a, то для него оптимально платить менеджеру соответствующую плату $I(a)$ (в ситуации первого наилучшего).

Предположим также, что

$\overline{U}$ – отправная (reservation) цена менеджера, т. е. ожидаемый уровень полезности, который менеджер может достичь, работая в любом другом месте;

$\Upsilon = V(\mathrm{I}) = \{v : v = V(I)$ для некоторого $I \in \mathrm{I}\}$;

A2. $\dfrac{\overline{U} - G(a)}{K(a)} \in \Upsilon$ для всех $a \in A$;

обратная функция $V^{-1}\left(\dfrac{\overline{U} - G(a)}{K(a)}\right) = C_{FB}(a) : A \to R$ для всех $a \in A$ означает затраты (costs) первого наилучшего (first best) и задает отправную цену $\overline{U}$ менеджера при выборе действия a (в ситуации первого наилучшего принципал, чтобы заставить менеджера выбрать $a \in A$, предлагает ему такой контракт: плата $C_{FB}(a)$ при выборе a и плата, близкая к $\underline{I}$ – в остальных случаях);

ожидаемый выигрыш (benefit) принципала от принуждения менеджера выбрать a равняется $\sum_{i=1}^{n} \pi_i(a) q_i = B(a) : A \to R$;

действие первого наилучшего максимизирует $B(a) - C_{FB}(a)$ по $a \in A$.

В ситуации первого наилучшего функция $C_{FB}(a) : A \to R$ индуцирует полное упорядочение на множестве A: $a_1 \succ a_2$ (действие a_1 для менеджера лучше, чем a_2) тогда и только тогда, когда $C_{FB}(a_1) > C_{FB}(a_2)$ (когда затраты выше). Это упорядочение не зависит от $\overline{U}$, так как $C_{FB}(a_1) > C_{FB}(a_2)$ равносильно

$G(a_1)+K(a_1)v > G(a_2)+K(a_2)v \quad \forall v \in \Upsilon$, откуда следует неравенство $G(a_1)+K(a_1)v > G(a_2)+K(a_2)v = \overline{U}$ для некоторого $v \in \Upsilon$.

В ситуации второго наилучшего принципал не наблюдает a и не может сделать вознаграждение менеджеру, зависящее от a. В то же время принципал будет платить менеджеру соответственно результату его действия, т. е. соответственно прибыли фирмы. Поэтому принципал использует схему стимулирования $\vec{I}=(I_1, I_2, ..., I_n)$, где $I_i \in \mathrm{I}$ – вознаграждение менеджеру в случае исхода q_i, а менеджер выбирает действие $a \in A$, максимизирующее

$$f(a)=\sum_{i=1}^{n}\pi_i(a)U(a, I_i).$$

Пусть принципал полностью информирован о менеджере и производственных возможностях фирмы, т. е. знает функцию $U(a, I)$ полезности менеджера, множество A и функцию $\pi: A \to S$. Итак, данная задача стимулирования возникает только потому, что принципал не может отслеживать действия менеджера. Поскольку задача совместимости стимулов возникает вследствие различий в информированности принципала и менеджера, когда возможен обмен информацией посредством сообщений, то стимулирование и совместимость стимулов – это разные вопросы [16].

Обозначим F допустимое (feasible) множество таких пар $(\vec{I}, a(\vec{I}))$, что

$$f(a(\vec{I})) \ge \max\{f(a); \overline{U}\} \quad \forall a \in A. \tag{1}$$

Тогда принципал может максимизировать по $(\vec{I}, a) \in F$ свою целевую функцию

$$F(a, \vec{I})=\sum_{i=1}^{n}\pi_i(a)(q_i - I_i)=\sum_{i=1}^{n}\pi_i(a)\,q_i-\sum_{i=1}^{n}\pi_i(a)\,I_i\,,$$

минимизируя по $\vec{I}$ свои затраты $C(\vec{I}, a(\vec{I}))=\sum_{i=1}^{n}\pi_i(a(\vec{I}))I_i$ при условиях (1). Если управляющей переменной принципала считать $\vec{v}=(v_1, v_2, ..., v_n)$, где $v_i = V(I_i) \in \Upsilon$, то принципал минимизирует по $\vec{v}$ свои затраты

$$C(\vec{v})=\sum_{i=1}^{n}\pi_i(a(\vec{I}))\,I_i=\sum_{i=1}^{n}\pi_i(a(\vec{v}))V^{-1}(v_i) \tag{2}$$

при линейных по $v_1, v_2, ..., v_n$ ограничениях

$$G(a(\vec{v}))+K(a(\vec{v}))\left(\sum_{i=1}^{n}\pi_i(a(\vec{v}))\,v_i\right)=U(a(\vec{v}), \vec{v}) \ge \max\{U(a, \vec{v}); \overline{U}\} \quad \forall a \in A. \tag{3}$$

Так как функция V вогнутая, то функция V^{-1} – выпуклая, откуда функция C – выпуклая. Поэтому задача (2), (3) является задачей минимизации выпуклой функции при линейных ограничениях (количество этих ограничений зависит от мощности A). Если множество A конечное, то теорема Куна–Такера дает необходимые и достаточные условия оптимальности задачи (2), (3).

Полагаем, что если менеджеру безразличны два действия, то он выбирает действие, предпочтительное для принципала. Если $\vec{I}$ удовлетворяет условиям (1) ($\vec{v}$ удовлетворяет условиям (3)), то говорят, что $\vec{I}$ осуществляет действие $a(\vec{I})$ ($\vec{v}$ осуществляет действие $a(\vec{v})$).

Если множество $W = \{\vec{v} : \ \vec{v}$ осуществляет действие $a(\vec{v})\}$ непустое, то в силу выпуклости V^{-1} функция затрат принципала ограничена снизу на W :

$$C(\vec{v}) = \sum_{i=1}^{n} \pi_i(a(\vec{v}))V^{-1}(v_i) \geq V^{-1}\left(\sum_{i=1}^{n} \pi_i(a(\vec{v}))v_i\right) \geq V^{-1}\left(\frac{\overline{U} - G(a(\vec{v}))}{K(a(\vec{v}))}\right).$$

Тогда, обозначая $C_{SB}(a(\vec{v})) = \inf\{C(\vec{v}) : \vec{v} \in W \neq \varnothing\}$ и $C_{SB}(a(\vec{v})) = \infty$ при $W = \varnothing$, определяем функцию $C_{SB} : A \to R$ затрат второго наилучшего (second best).

Первый шаг задачи принципала состоит в вычислении $C_{SB}(a(\vec{v}))$ $\forall a \in A$, а второй шаг – в выборе действия $a \in A$, максимизирующего целевую функцию $F_{SB} = B(a(\vec{v})) - C_{SB}(a(\vec{v}))$. Функция F_{SB} в общем случае не является вогнутой при вогнутой функции B, так как функция C, вообще говоря, не выпуклая.

Оптимальным действием a_{SB} второго наилучшего называют такое, которое максимизирует F_{SB} по $a \in A$. Оптимальной схемой $\vec{I}_{SB}$ стимулирования второго наилучшего называют такую, что $C(\vec{I}_{SB}, a(\vec{I}_{SB})) = C_{SB}(a_{SB})$.

А3. Для существования a_{SB} и $\vec{I}_{SB}$ предположим, что $\pi_i(a) > 0$ $\forall a \in A$, $i = 1, 2, ..., n$. Тем самым исключаются случаи [6], где к оптимуму можно приближаться, не достигая его, накладывая все большие штрафы на менеджера со все меньшей вероятностью (П. Даймонд и Д. Миррлиз – Нобелевские лауреаты 2010 г. и 1996 г. соответственно).

Лемма 1. Функция $C_{SB}(a)$ является полунепрерывной снизу.

Доказательство. Если множество A конечное, то функция $C_{SB}(a)$ непрерывна по $a \in A$.

Если множество A бесконечное, то возьмем такую последовательность точек a_1, $a_2, \ldots$ из A, что $a_j \to a$ при $j \to \infty$. Не уменьшая общности, пусть $C_{SB}(a_j) \to C_a$ при $j \to \infty$. Если $C_a = \infty$, то $C_{SB}(a) \leq C_a$.

Если $C_a < \infty$, то обозначим $\vec{I}_j = (I_{j1}, I_{j2}, ..., I_{jn})$ схему стимулирования, являющуюся решением задачи минимизации $C(\vec{I}, a(\vec{I}))$ при условиях (1) и $a = a_j$. Тогда, учитывая предположение А3, последовательность $\{\vec{I}_j\}$ ограничена (иначе $C_{SB}(a_j) \to \infty$) [5] и имеет некоторую предельную точку $\vec{I}_0$, осуществляющую a, откуда

$$C_{SB}(a) \le C(\vec{I}_0, a(\vec{I}_0)) \leftarrow C_{SB}(a_j).$$

Теорема 1. В предположениях А1–А3 существуют a_{SB} и $\vec{I}_{SB}$.

Доказательство. Пусть функция V линейна. Обозначим a_V решение задачи максимизации $B(a) - C_{FB}(a)$ по $a \in A$. Тогда при схеме стимулирования $I_i = q_i - B(a_V) + C_{FB}(a_V)$ значение чистой прибыли принципала составляет $q_i - I_i = B(a_V) - C_{FB}(a_V)$, т. е. равна чистой прибыли ситуации первого наилучшего при любом действии менеджера. С другой стороны, менеджер получает ожидаемую полезность $\overline{U}$, выбирая $a = a_V$.

Пусть функция V нелинейна. Значение функции $C(\vec{v}) = \sum_{i=1}^{n} \pi_i(a(\vec{v}))V^{-1}(v_i)$ стремится к бесконечности на неограниченном допустимом множестве W, учитывая А3 и выпуклость V^{-1} [5] (аналог дисперсии v_i стремится к бесконечности, а аналог среднего v_i ограничен снизу). Тогда выберем непустое замкнутое ограниченное (bounded) подмножество $W_b \subseteq W \ne \varnothing$, на котором функция $C(\vec{v})$ ограничена снизу и достигается $\inf\{C(\vec{v}) : \vec{v} \in W_b\}$ в силу теоремы Вейерштрасса.

Из леммы 1, компактности A и теоремы Вейерштрасса следует, что задача максимизации $F_{SB} = B(a) - C_{SB}(a)$ по $a \in A$ имеет решение, если $C_{SB}(a) < \infty$ для некоторого $a \in A$. Заметим, что $C_{SB}(\overline{a}) = C_{FB}(\overline{a}) = \inf\{C_{FB}(a) : a \in A\} < \infty$, поскольку схема стимулирования $I_i = C_{FB}(\overline{a})$ осуществляет действие $\overline{a}$.

Таким образом, существует оптимальное действие a_{SB} второго наилучшего при нелинейной функции V. Поскольку, как было показано, при нелинейной функции V и $W \ne \varnothing$ задача (2), (3) имеет решение, то существует $\vec{I}_{SB}$.

В общем случае ограничение $f(a) \ge \overline{U}$ не является связывающим в оптимуме второго наилучшего, так как принципалу может быть выгодна схема стимулирования, приводящая к $f(a) > \overline{U}$. В то же время имеет место

Теорема 2. В предположениях А1, А2 и мультипликативной или аддитивной сепарабельности функции U выполняется $\sum_{i=1}^{n} \pi_i(a_{SB})U(a_{SB}, I_{SBi}) = \overline{U}$.

Доказательство. Если $\sum_{i=1}^{n} \pi_i(a_{SB})U(a_{SB}, I_{SBi}) > \overline{U}$, то затраты принципала в задаче (2), (3) можно снизить, удовлетворяя всем ограничениям (3): заменяем $V(I_{SBi})$ на $V(I_{SBi}) - \varepsilon$ при аддитивной сепарабельности и на $V(I_{SBi})(1+\varepsilon)$ при мультипликативной сеапарбельности, где $\varepsilon > 0$ – достаточно малое число. Другими словами, действие a_{SB} можно осуществить с меньшими затратами.

В.М. Горбачук, В.В. Бойко, І.А. Русанов

ПРОЕКТУВАННЯ КОНТРАКТІВ В УМОВАХ РИЗИКУ

Проведено аналіз дворівневої проблеми управління та побудовані відповідні задачі оптимізації. Запропоновані умови існування розв'язків таких задач і зв'язності обмежень.

V.M. Gorbachuk, V.V. Boyko, I.A. Rusanov

CONTRACT DESIGN UNDER RISK

The analysis of bilevel management problem has been conducted, and the corresponding optimization programs have been constructed. The solution existence and constraint binding conditions for such problems are developed.

1. *Горбачук В.М.* Методи індустріальної організації. – К.: А. С. К., 2010. – 224 с.
2. *Горбачук В.М., Конакова Е.Н., Русанов И.А.* Модернизация и частные компании, дополняющие государственные функции // Моделювання та інформатизація соціально-економічного розвитку України. – 2010. – Вип. 11. – С. 233–244.
3. *Горбачук В.М., Русанов И.А.* Регулирование монополии при асимметричной информации // Компьютерная математика. – 2010. – № 1. – С. 3–10.
4. *Arrow K.* Insurance, risk and resource allocation // Essays in the theory of risk bearing. – Chcago: Markham, 1971. – P. 134–143.
5. *Bertsekas D.* Necessary and sufficient conditions for existence of an optimal portfolio // J. of economic theory. – 1974, June. – P. 235–247.
6. *Diamond P. A., Mirrlees J. A.* A model of social insurance with variable retirement // Journal of public economics. – 1978. – 10. – P. 295–336.
7. *Grossman S., Hart O.* An analysis of the principal agent problem // Econometrica. – 1983, January. – P. 7–45.
8. *Harris M., Raviv A.* Optimal incentive contracts with imperfect information // J. of economic theory. – 1979. – 20. – P. 231–259.
9. *Holmstrom B.* Moral hazard and observability // Bell journal of economics. – 1979. – 10. – P. 74–91.
10. *Keeney R.* Risk independence and multiattributed utility functions // Econometrica. – 1973. – 41. – P. 27–34.
11. *Mirrlees J.* The theory of moral hazard and unobservable behaviour: part I // Review of economic studies. – 1999, January. – P. 3–21.
12. *Pauly M.* The economics of moral hazard: comment // American economic review. – 1968. – 58. – P. 531–536.
13. *Pollak R.* The risk independence axiom // Econometrica. – 1973. – 41. – P. 35–39.
14. *Shavell S.* On moral hazard and insurance // Quarterly journal of economics. – 1979. – 93. – P. 541–562.
15. *Shavell S.* Risk sharing and incentives in the principal agent relationship // Bell journal of economics. – 1979. – 10. – P. 55–73.
16. *Symposium* on incentive compatibility // Review of economic studies. – 1979, April.

Получено 12.04.2010