УДК 519.8

Т.А. БАРДАДЫМ, В.В. ГОЛИКОВА

ИССЛЕДОВАНИЕ ЗАВИСИМОСТЕЙ МЕЖДУ ФИНАНСОВЫМИ ИНДЕКСАМИ*

Изучение зависимостей между нестационарными временными рядами рассмотрено как пример задачи матричной оптимизации. На основе подхода Йохансена построены коинтеграционные модели для фондовых индексов Швейцарии, России и Украины.

Введение. Как указывалось в [1], задачи матричной оптимизации, связанные с оптимизацией различных функций от матриц (определителей, собственных чисел и пр.), имеют многочисленные приложения в математической статистике, планировании экспериментов и во многих других областях. В данной работе будет приведен пример модели матричной оптимизации для проверки гипотез при построении коинтеграционных моделей. Эти модели используются для исследования зависимостей между нестационарными временными рядами [2].

Термин "spurious regressions" (ложная регрессия) в названии статьи [2] относится к замеченному еще Дж. Юлом в 1926 г. факту, что полученные с помощью обычной регрессии зависимости между экономическими показателями иногда крайне плохо согласуются с их последующим поведением. Причины этого явления связывают с нестационарностью временных рядов, когда такие их характеристики как среднее или ковариации, зависят от времени. К этому типу относится большое количество временных рядов, названных интегрируемых с порядком d (что обозначается как $I(d)$). Это ряды, которые становятся стационарными после дифференцирования (т.е. составления нового ряда из разностей соседних элементов исходного ряда), проведенного d раз (см. [3]). Ряды, имеющие разный порядок интегрируемости,

*Работа выполнена при частичной поддержке SNSF (Швейцария), проект № IZ73ZO_127962.

могут проявлять существенно разную скорость изменения. Поэтому неудивительно, что попытки воспользоваться линейной регрессией для находжения зависимостей между ними давали неудовлетворительные результаты. Подход, названный коинтегрированием, предложен Р. Энглом и Дж. Грейнджером [4] и фактически сводится к предложению сравнивать между собой только ряды с одинаковым порядком интегрированности (и, следовательно, сравнимой скоростью изменения).

Коинтегрирование. Элементы вектора $x_t = (X_{1,t},..., X_{n,t})^T$ называют коинтегрированными порядка d, b и обозначают $x_t \sim CI(d,b)$, если они представляют интегрированные процессы $I(d)$ порядка d, и существует отличный от нуля вектор β, такой что линейная комбинация $x_t\beta$ есть интегрированный процесс порядка $(d-b)$. Вектор β называют коинтегрирующим вектором.

Векторную авторегрессионную модель для вектора x_t можно записать в виде системы n уравнений:

$$x_t = A_0 + \sum_{j=1}^{p} A_j x_{t-j} + \varepsilon_j, \quad t = 1,...,T, \qquad (1)$$

где A_0 – вектор констант; $A_j = (\alpha_{ik}(j))$; $i,k = 1,...,n$, $j = 1,..., p$ – матрицы коэффициентов; $\varepsilon_t = (\varepsilon_{1t},...,\varepsilon_{nt})^T$ – вектор ошибок оценивания (остатков); p – порядок модели. Для исследования вопроса о наличии коинтеграции представим соотношение (1) в соответствии с методом Йохансена [5] в виде

$$\Delta x_t = A_0 + \Pi x_{t-1} + \sum_{j=1}^{p-1} \Pi_j \Delta x_{t-j} + \varepsilon_t, \quad t = 1,...,T,$$

где $\Pi = I - A_1 - A_2 - ... - A_p$. Ранг матрицы Π равен r – числу коинтегрирующих векторов. Если матрица Π имеет нулевой ранг, то не существует стационарных линейных комбинаций векторного процесса x_t. Если матрица Π имеет полный ранг, то любая комбинация x_t стационарна, т.е. все составляющие многомерного процесса являются стационарными. Если ранг Π лежит между 0 и n $(0 < m < n)$, существует m коинтегрирующих векторов.

Нулевую гипотезу об отсутствии коинтеграции между случайными процессами можно проверять при помощи статистики следа (LR^{trace}) и статистики максимального собственного значения ($LR^{\max}$) [5]. Статистика следа для проверки нулевой гипотезы о том, что ранг коинтеграции равен r, против альтернативной гипотезы о равенстве ранга k (количеству параметров), имеет вид

$$LR^{trace}(r,k) = -T \sum_{i=r+1}^{k} \ln(1-\lambda_i).$$

Статистика максимального собственного значения для проверки нулевой гипотезы о том, что ранг равен r, против альтернативной гипотезы о том, что ранг равен $r+1$, равна

$$LR^{\max}(r, r+1) = -\ln(1-\lambda_{r+1}),$$

где T – количество использованных наблюдений, r – количество коинтегрирующих векторов, λ_i – оцененные собственные значения (перенумерованные в порядке убывания). Статистики рассчитываются для значений r от 0 до k (табл. 1) и сравниваются с критическими значениями LR_{α}^{trace} и $LR_{\alpha}^{\max}$ с соответствующим уровнем значимости α. При этом, если матрица Π является симметрической, оценку собственных значений и проверку гипотезы о количестве коинтегрирующих векторов можно представить как задачу матричной оптимизации. Действительно, по теореме Куранта–Фишера (см. [6]) для любых линейно независимых векторов $a_1,..., a_r$, $r = 0,1,..., n-1$ из R^n

$$\lambda_{r+1}(\Pi) = \min_{B^{n-r}} \max_{B^{n-r}} \frac{\langle x, \Pi x\rangle}{\| x \|^2},$$

где B^{n-r} – подпространство всех векторов из R^n, ортогональных $a_1,..., a_r$, причем минимум определен по всем множествам линейно независимых векторов $a_1,..., a_r$ из R^n и достигается, когда они равны соответствующим собственным векторам матрицы Π. Сравнение с критическими значениями можно рассматривать как ограничения модели, например, для статистики максимального собственного значения ограничение выглядит как

$$LR^{\max} \le LR_{90\%}^{\max} .$$

Построение коинтеграционной модели было проведено для нестационарных рядов индексов фондовых рынков: украинского – ПФТС, российского – РТС, швейцарского рыночного индекса SMI (Swiss Market Index), который вычисляется на основе цен самых ликвидных акций наиболее крупных предприятий на швейцарской фондовой бирже и швейцарского индекса продуктивности SPI (Swiss Performance Index), который характеризует швейцарский фондовый рынок в целом. Рассматривался период с января 2004 до декабря 2010 г. Для проверки стационарности данных рядов использовались тесты Дикки–Фюллера и Филлипа–Перрона [3], из результатов которых следовало, что все рассмотренные временные ряды интегрированы с порядком 1.

Данные табл. 1 свидетельствуют о наличии одного коинтегрирующего вектора, а коинтеграционная модель выглядит следующим образом:

$$\hat{S}PI_t = -0.5PFTS_t + 2RTS_t + 3108 . \quad (2)$$

Коэффициент при SMI_t оказался равным нулю. Если изначально рассмотреть модель для трех индексов (табл. 2), получится аналогичное выражение:

$$\hat{S}PI_t = -0.5PFTS_t + 2RTS_t + 3073 . \quad (3)$$

ТАБЛИЦА 1. Определение ранга коинтеграции для четырех индексов

λ_i	$LR^{\max}$	LR^{trace}	$H_{0`}:$	$LR^{\max}_{90\%}$	$LR^{trace}_{90\%}$
0,0203	32,25	55,54	0	18,03	49,91
0,0083	13,16	23,29	1	14,09	31,88
0,0045	7,09	10,13	2	10,29	17,79
0,0019	3,04	3,04	3	7,50	7,50

ТАБЛИЦА 2. Определение ранга коинтеграции для трех индексов

λ_i	$LR^{\max}$	LR^{trace}	$H_{0`}:$	$LR^{\max}_{90\%}$	$LR^{trace}_{90\%}$
0,0202	32,09	45,01	0	14,09	31,88
0,0065	10,32	12,92	1	10,29	17,79
0,0016	2,60	2,60	2	7,50	7,50

На рисунке показаны графики реальных данных индекса SPI и вычисленых с помощью коинтеграционной зависимости (2). Коинтеграционные модели попарных зависимостей рассмотренных индексов описаны в [7–8].

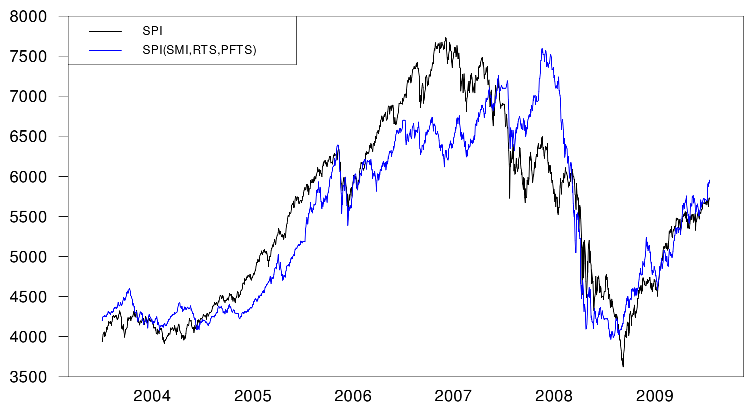

РИСУНОК. Расчетные и реальные данные индекса SPI

Выводы. Задача проверки гипотезы о существовании коинтегрирующего вектора приводит к исследованию собственных значений матрицы Π в соотношении (6), и если эта матрица оказывается симметричной, задача формулируется как матричная оптимизационная модель. Последующее сравнение с критическими значениями может рассматриваться как введение дополнительных ограничений.

Полученные коинтеграционные зависимости финансовых индексов Швейцарии, России и Украины показывают, что все эти индексы в период кризиса проявляли сходное поведение, что может объясняться глобальным влиянием мировой финансовой системы на национальные фондовые рынки. Аппарат, разработанный в [4–5] для линейных моделей, не охватывает все многообразие реально существующих зависимостей, что дает основания ожидать более широкого применения методов нелинейной регрессии (см., например, [9]).

Т.О. Бардадим, В.В. Голікова

ДОСЛІДЖЕННЯ ЗАЛЕЖНОСТЕЙ МІЖ ФІНАНСОВИМИ ІНДЕКСАМИ

Вивчення залежностей між нестаціонарними динамічними рядами розглянуто як задачу матричної оптимізації. Побудовані коінтеграційні моделі для фондових індексів Швейцарії, Росії та України.

T.O. Bardadym, V.V. Golikova

INVESTIGATION OF DEPENDENCIES BETWEEN FINANCIAL INDICES

The problems of finding dependencies between non-stationary time series are discussed as matrix optimization problems. Cointegration models for Swiss, Russian and Ukrainian stock indices are built.

1. *Шор Н.З.* Задачи минимизации матричных функций и недифференцируемая оптимизация // Обозрение прикладной и промышленной математики. – 1995. – **2**, вып. 1. – С. 113–138.
2. *Granger C.W.J., Newbold P.* Spurious Regressions in Econometrics // J. of Econometrics, **2**, North-Holland Publishing Company, 1974. – P. 11–120.
3. *Hamilton J.D.* Time Series Analysis. – Princeton, New Jersey: Princeton University Press, 1994. – 799 p.
4. *Engle R.E., Granger C.W.J.* Cointegration and Error Correction: Representation, Estimation and Testing // Econometrica. – 1987. – **55**. – P. 251–276.
5. *Johansen S., Juselius K.* Maximum Likelyhood Estimation and Inference on Cointegration with Application to the Demand for Money // Oxford Bulletin of Economics and Statistics. – 1990. – **52**. – P. 169–209.
6. *Ланкастер П.* Теория матриц. – М.: Наука, 1978. – 280 с.
7. *Домрачев В.М., Емменеггер Ж.-Ф., Бардадим Т.О., Лаптін Ю.П.* Моделі коінтегрування як засіб розробки ринкових стратегій // Проблеми і перспективи розвитку банківської системи України: збірник наукових праць. – Суми, УАБС НБУ, 2009. – Вип. 25. – С. 104–111.
8. *Emmenegger J.-F., Domrachev V.M., Bardadym T.A., Laptin Yu.P.* Cointegration models for some market indices // Пр. Міжнар. симп. "Питання оптимізації обчислень (ПОО-XXXV)", смт. Кацивелі, Україна, 24–29 вересня 2009 р. – **I. –** С. 216–220.
9. *Dufrenot G., Mignon V.* Recent Developments in Nonlinear Cointegration with Application to Macroeconomics and Finance. – Boston / Dordrecht / London: Kluwer Academic Publishers, 2002. – 299 p.

Получено 06.04.2011