

Прецессионные колебания двухлопастного ротора с упругим невесомым валом при сложном вращении

В. И. Гуляев, И. Л. Соловьев, С. Н. Худолий

Национальный транспортный университет, Киев, Украина

Поставлена задача о прецессионных колебаниях жесткого двухлопастного ротора с упругим невесомым валом при сложном вращении, когда его ось совершает дополнительный принудительный поворот. Выведены уравнения колебаний системы, для случая установившегося движения найдены их периодические решения при различных значениях угловой скорости собственного вращения. Установлено резонансное значение этой скорости, построены амплитудно-частотные характеристики в предрезонансном и послерезонансном состоянии.

Ключевые слова: двухлопастный ротор, упругий вал, сложное вращение, колебания, прецессия, резонанс.

При проектировании современных самолетов, вертолетов и ветроэнергетических установок особую актуальность приобретает вопрос учета упругих колебаний их роторов. Решение этого вопроса позволит избежать возникновения резонансных вибраций, а также понизить вероятность усталостного разрушения элементов конструкций и улучшить их динамические характеристики. Особые режимы периодических движений ротора имеют место при сложном вращении, когда несущее его тело совершает маневр переориентации оси вращения. Поскольку ротор закреплен на упругом валу, принудительный поворот всей системы вместе с носителем приводит к возбуждению дополнительных гироскопических сил инерции, вызывающих его упругие прецессионные колебания. Особенность последних состоит в том, что элементы ротора одновременно участвуют в нескольких видах движения и на них действуют как позиционные (центробежные) силы инерции, зависящие от положения элемента, так и гироскопические (кориолисовы), обусловленные взаимодействием вращательных и линейных составляющих движений.

Механизм этих колебаний практически не изучен ввиду их большой сложности. В то же время известно, что подавляющее большинство отказов авиационных двигателей происходит при выполнении самолетом маневров переориентации. Как правило, весьма непродолжительным оказывается и ресурс лопастей ветроэнергетических установок.

К настоящему времени рассмотрены вопросы динамики сложного вращения упругих лопастей [1–3] и тонких оболочек [3–5], жестко связанных с вращающимся основанием. Г. Циглер [6] и А. Тондл [7] изучили устойчивость жесткого диска на упругом валу при простом вращении. Ниже приведены результаты исследования прецессионных колебаний жесткого двухлопастного ротора на упругом невесомом валу при сложном вращении.

Пусть ротор, состоящий из центрального жесткого диска и двух однородных жестких лопастей длиной l , в центре масс S закреплен на одном

конце упругого вала длиной L , вращающегося с угловой скоростью $\bar{\omega}$ (рис. 1). Другой конец вала закреплен в подшипнике на платформе, которая совершает принудительный поворот относительно перпендикулярной валу неподвижной оси с постоянной угловой скоростью $\bar{\omega}_0$.

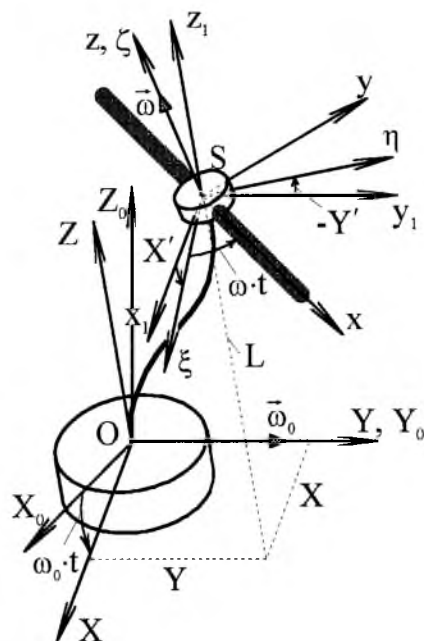


Рис. 1. Схема двухлопастного ротора.

Примем, что геометрические и механические параметры упругого вала позволяют не учитывать его инерционные свойства как континуальной системы и ограничиться рассмотрением ротора с валом как системы с конечным числом степеней свободы, обладающей эквивалентными параметрами упругой податливости при линейных перемещениях и поворотах ротора вместе с валом.

Рассмотрим задачу в линейной постановке, полагая малыми упругие перемещения и вызванные прецессией углы поворота конца вала. Поскольку ось ротора направлена по касательной к кривой прогибов вала, считаем, что его угловая скорость также направлена по касательной к линии прогибов и численно равна ω . Предположим также, что ω намного больше ω_0 .

Введем следующие системы координат: $OX_0Y_0Z_0$ – инерциальная, центр O расположен в подшипнике, плоскость X_0OZ_0 содержит ось вала в его недеформированном состоянии, ось OY_0 направлена вдоль вектора $\bar{\omega}_0$; $OXYZ$ – связана с платформой и поворачивается с ней, ось OY совпадает с осью OY_0 ; $Sx_1y_1z_1$ – связана с центром масс ротора S , оси параллельны соответствующим осям системы $OXYZ$; $S\xi\eta\zeta$ – связана с центром масс ротора S , ось $S\zeta$ направлена вдоль касательной к упругой линии вала в точке S . В принятом приближении при малых перемещениях вала ось $S\xi$ лежит в плоскости x_1Sz_1 , ось $S\eta$ – в плоскости y_1Sz_1 ; $Sxyz$ – связана с ротором, ось Sx направлена вдоль осевой линии лопастей, ось Sz совпадает с осью $S\zeta$.

Положение ротора описывается пятью параметрами: перемещениями X, Y центра масс S ; углами поворотов X', Y' конца вала и углом поворота $\omega \cdot t$ ротора в своей плоскости (штрихом обозначена частная производная от прогибов вала X, Y по переменной Z).

Найдем связь между введенными системами координат. Для вывода матрицы перехода из системы $Sx_1y_1z_1$ в систему $S\xi\eta\zeta$ вводится вспомогательная система координат $Sx_1^*y_1^*z_1^*$ – результат поворота $Sx_1y_1z_1$ относительно оси Sy_1 на угол X' . Система $S\xi\eta\zeta$ получена при повороте системы $Sx_1^*y_1^*z_1^*$ относительно оси Sx_1^* на угол $-Y'$. Поскольку X' и Y' – малые углы, матрица перехода \mathbf{A} из $Sx_1y_1z_1$ в $Sx_1^*y_1^*z_1^*$ и матрица перехода \mathbf{B} из $Sx_1^*y_1^*z_1^*$ в $S\xi\eta\zeta$ имеют вид

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -X' \\ 0 & 1 & 0 \\ X' & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -Y' \\ 0 & Y' & 1 \end{bmatrix}.$$

Матрица перехода \mathbf{C} из системы $Sx_1y_1z_1$ в систему $S\xi\eta\zeta$ равна произведению матриц \mathbf{A} и \mathbf{B} . Матрица перехода \mathbf{D} из системы $S\xi\eta\zeta$ в систему $Sxyz$ определяется равенством

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \cos \omega \cdot t & \sin \omega \cdot t & 0 \\ -\sin \omega \cdot t & \cos \omega \cdot t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

Матрица перехода \mathbf{G} из системы $Sx_1y_1z_1$ в систему $Sxyz$ равна произведению матриц \mathbf{C} и \mathbf{D} , поэтому

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} \cos \omega \cdot t & \sin \omega \cdot t & -X' \cdot \cos \omega \cdot t - Y' \cdot \sin \omega \cdot t \\ -\sin \omega \cdot t & \cos \omega \cdot t & X' \cdot \sin \omega \cdot t - Y' \cdot \cos \omega \cdot t \\ X' & Y' & 1 \end{bmatrix}.$$

Матрица обратного перехода является результатом транспонирования матрицы \mathbf{G} [8].

Для вывода уравнений колебаний ротора рассмотрим его движение в связанной с платформой системе координат $OXYZ$. Пользуясь принципом Даламбера, запишем условия динамического равновесия действующих на ротор сил и моментов:

$$\vec{F}_{ин} + \vec{F}_{упр} = 0; \quad \vec{M}_{ин} + \vec{M}_{упр} = 0, \quad (1)$$

где $\vec{F}_{ин}, \vec{M}_{ин}$ – соответственно главные вектор и момент действующих на элементы ротора сил инерции относительно точки S ; $\vec{F}_{упр}, \vec{M}_{упр}$ – соответ-

ственно главные вектор и момент сил упругости, действующих со стороны вала на ротор. При принятых предположениях $\vec{F}_{\text{упр}}$ и $\vec{M}_{\text{упр}}$ можно найти по формулам [6]

$$\begin{aligned} F_{x_1}^{\text{упр}} &= -\frac{1}{\Delta}(cX - bX'); & F_{y_1}^{\text{упр}} &= -\frac{1}{\Delta}(cY - bY'); \\ M_{x_1}^{\text{упр}} &= -\frac{1}{\Delta}(bY - aY'); & M_{y_1}^{\text{упр}} &= -\frac{1}{\Delta}(-bX + aX'), \end{aligned} \quad (2)$$

где $a = L^3/3EI$, $b = L^2/2EI$, $c = L/EI$ – коэффициенты влияния, определяющие прогиб a и угол наклона b в точке вала $Z_1 = L$, вызванные действующей в точке $Z_1 = L$ единичной силой, а также прогиб b и угол наклона c в точке $Z_1 = L$, вызванные действующим в точке $Z_1 = L$ единичным моментом; E – модуль упругости материала вала; I – момент инерции поперечного сечения вала; $\Delta = ac - b^2$ – детерминант матрицы коэффициентов влияния.

При вычислении сил и моментов, действующих на ротор, выделим элемент лопасти, приложим к нему силы инерции и проинтегрируем их по всем элементам. Будем считать, что угловая скорость упругих поворотных движений вала (прецессии) $\omega_{\text{пр}}$ и угловая скорость поворота системы ω_0 намного меньше ω , поэтому задачу можно исследовать в линейной постановке, и ускорения, вызванные этими движениями, можно вычислять независимо. Тогда полное ускорение элемента будет суммой ускорений, рассчитанных при указанных движениях.

Абсолютное ускорение элемента лопасти при прецессионном движении рассчитывается по формуле [8]

$$\vec{a}^{(1)} = \vec{a}_S + \vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}) + \vec{\varepsilon} \times \vec{r}, \quad (3)$$

где \vec{a}_S – ускорение начала подвижной системы координат $Sxyz$; $\vec{\Omega} = \vec{\omega} + \vec{\omega}_{\text{пр}}$; $\vec{\varepsilon} = d\vec{\Omega}/dt$ – угловая скорость и угловое ускорение указанной системы; $\vec{r} = x\vec{i}$ – радиус-вектор элемента в системе координат $Sxyz$.

Представим эти векторы в системе координат $Sx_1y_1z_1$:

$$\vec{a}_S = \ddot{X} \cdot \vec{i}_1 + \ddot{Y} \cdot \vec{j}_1; \quad \vec{\omega} = \omega X' \cdot \vec{i}_1 + \omega Y' \cdot \vec{j}_1 + \omega \cdot \vec{k}_1; \quad \vec{\omega}_{\text{пр}} = -\dot{Y}' \cdot \vec{i}_1 + \dot{X}' \cdot \vec{j}_1;$$

$$\vec{r} = x \cos \omega t \cdot \vec{i}_1 + x \sin \omega t \cdot \vec{j}_1 + x(-X' \cos \omega t - Y' \sin \omega t) \cdot \vec{k}_1;$$

$$\vec{\varepsilon} = \tilde{d}\vec{\Omega}/dt + \vec{\Omega} \times \vec{\Omega} = (\omega \dot{X}' - \dot{Y}') \cdot \vec{i}_1 + (\omega \dot{Y}' + \dot{X}') \cdot \vec{j}_1.$$

Выполнив векторные операции в (3), получим

$$\vec{a}^{(1)} = (\ddot{X}_1 - \omega^2 x \cos \omega t) \cdot \vec{i}_1 + (\ddot{Y}_1 - \omega^2 x \sin \omega t) \cdot \vec{j}_1 +$$

$$+ [(\omega^2 X_1' - 2\omega \ddot{Y}_1' - \ddot{X}_1')x \cos \omega t + (\omega Y_1' + 2\omega \dot{X}_1' - \ddot{Y}_1')x \sin \omega t] \cdot \vec{k}_1.$$

Таким образом, в прецессионном движении на каждый элемент лопасти действует элементарная сила инерции $d\vec{F}^{(1)} = -\vec{a}^{(1)} \cdot dm$. Интегрируя ее по длине лопастей, рассчитаем соответствующие компоненты результирующего момента:

$$\begin{aligned} M_{lx_1}^{(1)} &= \frac{2}{3} F\rho l^3 [(2\omega \dot{Y}' + \ddot{X}') \sin \omega t \cos \omega t - (2\omega \dot{X}' - \ddot{Y}') \sin^2 \omega t]; \\ M_{ly_1}^{(1)} &= \frac{2}{3} F\rho l^3 [(2\omega \dot{X}' - \ddot{Y}') \sin \omega t \cos \omega t - (2\omega \dot{Y}' + \ddot{X}') \cos^2 \omega t], \end{aligned} \quad (4)$$

где ρ – плотность материала; F – площадь поперечного сечения лопасти.

Вызванный этим движением момент, действующий на диск ротора, имеет составляющие [6]

$$M_{dx_1}^{(1)} = A\dot{Y}' - C\omega\ddot{X}'; \quad M_{dy_1}^{(1)} = -A\dot{X}' - C\omega\dot{Y}', \quad (5)$$

где A, C – экваториальный и осевой моменты инерции диска соответственно. Вторые слагаемые в этих равенствах представляют собой компоненты гироскопического момента $\vec{M}_{\text{гир}}^{(1)} = C\vec{\omega} \times \vec{\omega}_{\text{пр}}$.

При повороте системы с угловой скоростью ω_0 проекции ускорения элемента лопасти на оси системы координат Sx_1, y_1, z_1 представим в виде [1]

$$a_{x_1}^{(2)} = -x(\omega_0^2 + \omega^2) \cos \omega t; \quad a_{y_1}^{(2)} = -x\omega^2 \sin \omega t; \quad a_{z_1}^{(2)} = 2x\omega\omega_0 \sin \omega t.$$

Вычисляя элементарную силу инерции $dF_{z_1}^{(2)} = -a_{z_1}^{(2)} dm$, вызванную этим движением, и суммируя по длине лопасти моменты элементарных сил относительно осей Sx_1, Sy_1 , получаем компоненты главного момента сил инерции, который действует на лопасти:

$$\begin{aligned} M_{lx_1}^{(2)} &= \int_{-l}^l x \sin \omega t dF_{z_1}^{(2)} = -\frac{4}{3} F\rho l^3 \omega\omega_0 \sin^2 \omega t; \\ M_{ly_1}^{(2)} &= \int_{-l}^l x \cos \omega t dF_{z_1}^{(2)} = \frac{4}{3} F\rho l^3 \omega\omega_0 \sin \omega t \cos \omega t. \end{aligned} \quad (6)$$

В этом движении на диск действует гироскопический момент $\vec{M}_{\text{гир}}^{(2)} = C\vec{\omega} \times \vec{\omega}_0$, компоненты которого составляют

$$M_{dx_1}^{(2)} = -C\omega\omega_0; \quad M_{dy_1}^{(2)} = 0. \quad (7)$$

Сила инерции, действующая на ротор, вычисляется по формуле

$$\vec{F}_{ин} = -m\ddot{X} \cdot \vec{i}_1 - m\ddot{Y} \cdot \vec{j}_1, \quad (8)$$

где m – масса ротора.

После суммирования в (1) всех сил (2), (8) и моментов (2), (4)–(7), действующих на ротор, проектирования на оси Sx_1, Sy_1 и замены произведений тригонометрических функций соответствующими функциями двойного угла получаем следующую систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \ddot{X} + c_2 \cdot X - b_2 \cdot X' = 0; \\ \ddot{Y} + c_2 \cdot Y - b_2 \cdot Y' = 0; \\ \sin 2\omega t \cdot \ddot{X}' - 2\omega(1 - \cos 2\omega t + 2\varepsilon) \cdot \dot{X}' + (1 - \cos 2\omega t + 2\varepsilon) \cdot \ddot{Y}' + \\ + 2\omega \sin 2\omega t \cdot \dot{Y}' - 2b_1 \cdot Y + 2a_1 \cdot Y' = 2\omega\omega_0(1 - \cos 2\omega t + 2\varepsilon); \\ (1 + \cos 2\omega t + 2\varepsilon) \cdot \ddot{X}' - 2\omega \sin 2\omega t \cdot \dot{X}' + \sin 2\omega t \cdot \ddot{Y}' + \\ + 2\omega(1 + \cos 2\omega t + 2\varepsilon) \cdot \dot{Y}' - 2b_1 \cdot X + 2a_1 \cdot X' = 2\omega\omega_0 \sin 2\omega t, \end{cases} \quad (9)$$

где $\varepsilon = 3A/2F\rho l^3$; $a_1 = 3a/2F\rho l^3 \Delta$; $b_1 = 3b/2F\rho l^3 \Delta$; $b_2 = b/m\Delta$; $c_2 = c/m\Delta$. Кроме того, учитывалось, что $C = 2A$.

Поскольку в правой части системы (9) содержатся как зависимые, так и независимые от времени слагаемые, ее решение будем строить в виде

$$\begin{aligned} X(t) &= X_c + X_d(t); & X'(t) &= X'_c + X'_d(t); \\ Y(t) &= Y_c + Y_d(t); & Y'(t) &= Y'_c + Y'_d(t). \end{aligned} \quad (10)$$

Подставив (10) в (9) и разделив статические и динамические составляющие решений, получим систему алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} -b_1 X_c + a_1 X'_c = 0; \\ c_2 X_c - b_2 X'_c = 0; \\ -b_1 Y_c + a_1 Y'_c = \omega\omega_0(1 + 2\varepsilon); \\ c_2 Y_c - b_2 Y'_c = 0 \end{cases} \quad (11)$$

и систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \ddot{X}_d + c_2 \cdot X_d - b_2 \cdot X'_d = 0; \\ \ddot{Y}_d + c_2 \cdot Y_d - b_2 \cdot Y'_d = 0; \\ \sin 2\omega t \cdot \ddot{X}'_d - 2\omega(1 - \cos 2\omega t + 2\varepsilon) \cdot \dot{X}'_d + (1 - \cos 2\omega t + 2\varepsilon) \cdot \ddot{Y}'_d + \\ + 2\omega \sin 2\omega t \cdot \dot{Y}'_d - 2b_1 \cdot Y_d + 2a_1 \cdot Y'_d = -2\omega\omega_0 \cos 2\omega t; \\ (1 + \cos 2\omega t + 2\varepsilon) \cdot \ddot{X}'_d - 2\omega \sin 2\omega t \cdot \dot{X}'_d + \sin 2\omega t \cdot \ddot{Y}'_d + \\ + 2\omega(1 + \cos 2\omega t + 2\varepsilon) \cdot \dot{Y}'_d - 2b_1 \cdot X_d + 2a_1 \cdot X'_d = 2\omega\omega_0 \sin 2\omega t. \end{cases} \quad (12)$$

Из (11) следует

$$X_c = 0; \quad X'_c = 0; \quad Y_c = \frac{b_2 \omega \omega_0 (1 + 2\varepsilon)}{a_1 c_2 - b_1 b_2}; \quad Y'_c = \frac{c_2 \omega \omega_0 (1 + 2\varepsilon)}{a_1 c_2 - b_1 b_2}. \quad (13)$$

Система (12) допускает периодическое решение

$$\begin{cases} X_d(t) = S_X \cdot \sin 2\omega t = \frac{\omega \omega_0 b_2}{a_1 c_2 - b_1 b_2 - 4a_1 \omega^2} \sin 2\omega t; \\ Y_d(t) = C_Y \cdot \cos 2\omega t = -\frac{\omega \omega_0 b_2}{a_1 c_2 - b_1 b_2 - 4a_1 \omega^2} \cos 2\omega t; \\ X'_d(t) = S'_X \cdot \sin 2\omega t = \frac{\omega \omega_0 (c_2 - 4\omega^2)}{a_1 c_2 - b_1 b_2 - 4a_1 \omega^2} \sin 2\omega t; \\ Y'_d(t) = C'_Y \cdot \cos 2\omega t = -\frac{\omega \omega_0 (c_2 - 4\omega^2)}{a_1 c_2 - b_1 b_2 - 4a_1 \omega^2} \cos 2\omega t. \end{cases} \quad (14)$$

Анализ решений систем (11), (12), представленных равенствами (10), (13) и (14), позволяет сделать следующие выводы. При установившемся движении вращающегося двухлопастного ротора, ось вращения которого совершает дополнительный принудительный поворот вокруг оси OY , центр масс ротора S в системе координат, жестко связанной с платформой, смещается вдоль этой оси на расстояние $Y_c = b_2 \omega \omega_0 (1 + 2\varepsilon) / (a_1 c_2 - b_1 b_2)$, а ось вращения поворачивается на угол $\beta = -Y'_c = -c_2 \omega \omega_0 (1 + 2\varepsilon) / (a_1 c_2 - b_1 b_2)$. Подчеркнем, что выражение $a_1 c_2 - b_1 b_2 = 3/2 F \rho l^3 m \Delta$ не равно нулю и всегда положительно.

Относительно этого положения ротор совершает дополнительное регулярное прецессионное движение, определяемое равенствами (14). Поскольку $S_X = -C_Y$, можно заключить, что центр масс S ротора движется по окружности радиуса $\omega \omega_0 b_2 / (a_1 c_2 - b_1 b_2 - 4a_1 \omega^2)$ с удвоенной угловой скоростью 2ω в направлении вращения (прямая круговая цилиндрическая прецессия). Условие $S'_X = -C'_Y$ свидетельствует, что ось ротора совершает прямую коническую регулярную прецессию также с удвоенной угловой скоростью 2ω . Графики изменения коэффициентов S_X, C_Y и S'_X, C'_Y функций $X_d(t), Y_d(t)$ и $X'_d(t), Y'_d(t)$ в зависимости от ω приведены соответственно на рис. 2 и 3 при значениях $\omega_0 = 1 \text{ с}^{-1}$, $a = 2,5 \cdot 10^{-5} \text{ м/Н}$, $b = 7,6 \cdot 10^{-5} \text{ Н}^{-1}$, $c = 3 \cdot 10^{-4} \text{ (Н} \cdot \text{м)}^{-1}$. При стремлении знаменателей дробей (14) к нулю амплитуды прецессионных колебаний стремятся к бесконечности. В случае $\omega = \omega_1 = \sqrt{(a_1 c_2 - b_1 b_2) / 4a_1}$ имеет место прецессионный резонанс. Когда $\omega > \omega_1$, знаки коэффициентов S_X, C_Y, S'_X, C'_Y меняются на обратные, что соответствует сдвигу фазы прецессионных движений на π .

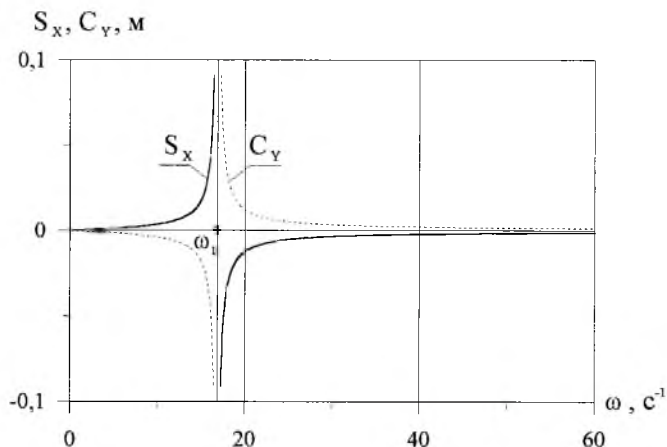


Рис. 2. Значения параметров цилиндрической прецессии ротора.

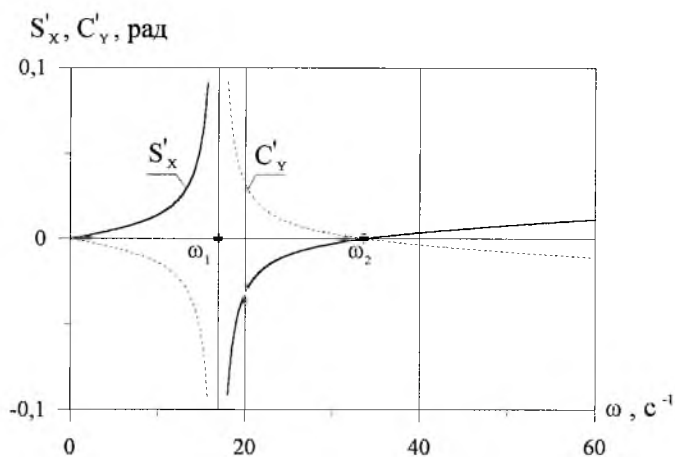


Рис. 3. Значения параметров конической прецессии ротора.

Если $\omega = \omega_2 = \sqrt{c_2}/2$, то коэффициенты S'_x, C'_y принимают нулевые значения, и ось ротора совершает только цилиндрическую прецессию. При $\omega > \omega_2$ фазы цилиндрической и конической прецессии оси ротора отличаются на π .

Выводы

1. Получены уравнения колебаний двухлопастного ротора с упругим невесомым валом как системы с пятью степенями свободы, построены амплитудно-частотные характеристики системы и обнаружены особенности ее поведения при сложном вращении.

2. Установлено, что в зависимости от значения угловой скорости вращения движение ротора может иметь вид регулярной цилиндрической прецессии либо суперпозиции цилиндрической и конической прецессий.

3. Для каждого из рассмотренных движений найдено одно резонансное значение угловой скорости собственного вращения.

Резюме

Поставлено задачу про прецесійні коливання жорсткого дволопатевого ротора з пружним невагомим валом при складному обертанні, коли його вісь здійснює додатковий примусовий поворот. Виведено рівняння коливань системи, для випадку усталеного руху знайдено їхні періодичні розв'язки при різних значеннях кутової швидкості власного обертання. Установлено резонансне значення цієї швидкості, побудовано амплітудно-частотні характеристики у дорезонансному і післярезонансному стані.

1. Гуляев В. И., Гайдайчук В. В., Кошкин В. Л. Упругое деформирование, устойчивость и колебания гибких криволинейных стержней. – Киев: Наук. думка, 1992. – 343 с.
2. Гуляев В. И., Домарецкий Р. В. Колебания упругого диска с венцом лопаток при сложном вращении // Пробл. прочности. – 1996. – № 6. – С. 71 – 81.
3. Гуляев В. И., Лизунов П. П. Колебания систем твердых и деформируемых тел при сложном движении. – Киев: Вища шк., 1989. – 199 с.
4. Гуляев В. И., Гром А. А., Снежко Н. А. Прецессионные колебания конических оболочек при сложном вращении // Механика твердого тела. – 1999. – № 2. – С. 156 – 163.
5. Гуляев В. И., Соловьев И. Л. Прецессионные колебания и резонансы составных оболочек при сложном вращении // Прикл. механика. – 1999. – 35, № 6. – С. 74 – 81.
6. Ziegler H. Principles of Structural Stability. – Waltham; Massachusetts; Toronto; London: Blaisdell Publishing Company, 1968.
7. Тондл А. Динамика роторов турбогенераторов. – Л.: Энергия, 1971. – 388 с.
8. Лурье А. И. Аналитическая механика. – М.: Наука, 1962. – 824 с.

Поступила 17. 04. 2000