

Аналитический расчет сильного формоизменения первоначально эллиптических пластин

В. А. Ромащенко, В. Н. Сторожук

Институт проблем прочности НАН Украины, Киев, Украина

С использованием энергетического подхода получено аналитическое решение для статически нагруженных равномерным давлением эллиптических и круглых пластин, закрепленных по контуру, в случае больших прогибов. Проведено сравнение расчетных данных с экспериментальными.

Ключевые слова: эллиптическая пластина, статика, большие прогибы.

Обозначения

A – работа внешних сил

U – полная внутренняя энергия пластины

a – большая полуось пластины

b – малая полуось пластины

h – толщина пластины

P – давление

ε_i – осредненная интенсивность деформаций

l – длина дуги сегмента эллиптического параболоида

S – площадь поверхности сегмента эллиптического параболоида

r_0 – радиус круглой пластины

Введение. Известно, что для круглых статически нагруженных пластин, испытывающих большие прогибы, существует множество аналитических решений. Как правило, они получены из условия равновесия пластины. В большинстве из них пластические свойства материала учитывались с помощью жесткопластической модели. Решения с учетом упрочнения либо выражены в неявном виде, либо требуют проведения итерационных вычислений, что затрудняет их использование в инженерной практике. При динамическом нагружении круглых пластин широкое распространение получил энергетический подход [1], согласно которому работа пластических деформаций пластины приравнивается к энергии нагружающего импульса. Для уточненных расчетов, как правило, применялись численные методы [2].

В последнее время в листовой штамповке в качестве критерия разрушения широко используются диаграммы предельного формоизменения. Экспериментально подобные диаграммы можно получить при гидравлическом выдавливании с применением матриц с эллиптическими отверстиями. Эллиптические пластины используются также при исследовании плос-

кого двухосного напряженного состояния листовых материалов. Авторам неизвестны аналитические решения для эллиптических пластин при статической нагрузке в случае больших прогибов.

Цель данной работы состояла в аналитическом решении задачи пластического деформирования закрепленной по контуру эллиптической пластины при статическом нагружении с учетом упрочнения материала. Решение получено с использованием энергетического подхода.

Аналитическое решение для эллиптической пластины. Рассмотрим неподвижно закрепленную вдоль контура эллиптическую в плане пластину, находящуюся под воздействием статического равномерного давления P . Будем исследовать случай больших прогибов, когда давление P велико, начальная толщина пластины h_0 достаточно мала, а прогиб центральной точки пластины w_0 удовлетворяет неравенству

$$w_0 > 5h_0.$$

Интерес представляет получение приближенной аналитической зависимости $P(w_0)$, удобной для инженерных расчетов.

Поскольку известно [3], что при больших прогибах главную роль в напряженно-деформированном состоянии (НДС) пластины играют мембранные усилия, с достаточной степенью точности ее можно рассматривать как мембрану, что позволяет использовать безмоментную теорию при определении конечного прогиба. Поэтому в настоящей работе используется мембранное приближение. Аналогичная задача рассматривалась в [4]. Однако приведенное там решение, во-первых, было справедливо “для не очень больших прогибов” и, во-вторых, получено на основе сомнительной гипотезы, суть которой сводилась к замене неподвижного контура подвижным. Предлагаемый ниже подход лишен обоих недостатков.

Для решения поставленной задачи применим энергетический метод [5], согласно которому запишем

$$A = U, \quad (1)$$

где A – работа внешних сил (давления); U – сумма внутренней упругой потенциальной энергии пластины и работы пластического деформирования.

На недеформированной срединной плоскости пластины введем прямоугольные декартовы координаты x, y таким образом, чтобы их начало совпадало с центром пластины, а оси ox и oy – с осями симметрии эллипса. Деформированное положение мембраны хорошо описывается поверхностью эллиптического параболоида [4]:

$$w(x, y) = w_0 \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \right), \quad (2)$$

где w – прогиб в произвольной точке срединной поверхности мембраны; a и b – главные полуоси эллипса.

Тогда работу внешнего давления представим так:

$$A = \iint_D \int_0^w P dw dx dy, \quad (3)$$

где наружное двойное интегрирование производится по эллипсу D .

Подставляя (2) в (3) и выполняя ряд преобразований, получаем

$$A = \frac{\pi ab}{2} \int_0^{w_0} P(w_0) dw_0. \quad (4)$$

Правую часть (1) можно записать в виде

$$U = \pi ab h_0 u, \quad (5)$$

где u – осредненная сумма удельной (на единицу объема) внутренней упругой потенциальной энергии пластины и удельной работы пластического деформирования.

Подставляя (4) и (5) в (1) и дифференцируя по w_0 , получаем

$$P = 2h_0 \frac{du}{dw_0}. \quad (6)$$

Для u имеем следующее выражение:

$$u = \int_0^{\varepsilon_i} F(\varepsilon_i) d\varepsilon_i, \quad (7)$$

где $F(\varepsilon_i)$ – диаграмма деформирования; ε_i – осредненная интенсивность деформаций. С учетом (7) формулу (6) можно записать так:

$$P = 2h_0 F(\varepsilon_i) \frac{d\varepsilon_i}{dw_0}. \quad (8)$$

Полагаем величину ε_i равной полусумме интенсивностей деформаций в центре (ε_{ic}) и на неподвижном контуре (ε_{ik}) пластины:

$$\varepsilon_i = (\varepsilon_{ic} + \varepsilon_{ik})/2, \quad (9)$$

текущую толщину h мембраны не зависящей от координат x и y , а материал несжимаемым. Для случаев развитых пластических деформаций последнее предположение вполне оправданно и является традиционным [6].

Рассматривая деформации в центре пластины, можно записать [6]

$$\varepsilon_{ic} = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(\varepsilon_{xc} - \varepsilon_{yc})^2 + (\varepsilon_{xc} - \varepsilon_t)^2 + (\varepsilon_{yc} - \varepsilon_t)^2}, \quad (10)$$

где ε_{xc} , ε_{yc} – деформации в соответствующих направлениях; ε_t – деформация по толщине,

$$\varepsilon_t = \frac{1}{\lambda} - 1; \quad (11)$$

$$\lambda = \frac{h_0}{h} \geq 1. \quad (12)$$

Из условия несжимаемости следует

$$\lambda = (1 + \varepsilon_{xc})(1 + \varepsilon_{yc}). \quad (13)$$

Для определения ε_{xc} и ε_{yc} кроме (13) необходимо еще одно уравнение. Возьмем произвольную точку K на контуре эллипса, и пусть r – ее расстояние от начала координат. Введем функцию

$$\psi(r) = \int_0^1 \sqrt{1 + \frac{2w_0^2 t^2}{r^2}} dt. \quad (14)$$

Функция (14) характеризует отношение длины соответствующей дуги эллиптического параболоида под радиус-вектором \vec{OK} к ее проекции на плоскость xu , т.е. к r . Полагаем, что относительные длины волокон центра мембраны в направлениях x и y пропорциональны $\psi(a)$ и $\psi(b)$ соответственно:

$$\frac{l_x/l_{0x}}{l_y/l_{0y}} = \frac{\psi(a)}{\psi(b)}, \quad (15)$$

где индекс “0” относится к недеформированным волокнам.

Левая часть (15) – не что иное как $(\varepsilon_{xc} + 1)/(\varepsilon_{yc} + 1)$, а правую часть можно приближенно представить в виде

$$\frac{\psi(a)}{\psi(b)} \approx B(w_0, a, b),$$

где

$$B(w_0, a, b) = \left(1 + \frac{2w_0^2}{3a^2}\right) / \left(1 + \frac{2w_0^2}{3b^2}\right).$$

Таким образом, имеем

$$(\varepsilon_{xc} + 1)/(\varepsilon_{yc} + 1) = B. \quad (16)$$

Решая систему уравнений (13), (16), находим

$$\varepsilon_{yc} = \sqrt{\lambda/B} - 1; \quad \varepsilon_{xc} = \sqrt{\lambda B} - 1. \quad (17)$$

С достаточной для инженерных расчетов точностью можно приближенно считать

$$\begin{aligned} \sqrt{B} &\approx 1 - \delta; \quad \frac{1}{\sqrt{B}} \approx 1 + \delta; \\ \delta &= \frac{w_0^2(a^2 - b^2)}{3a^2b^2 \left(1 + \frac{w_0^2}{3ab}\right)}. \end{aligned} \quad (18)$$

Подставляя (18) в (17), а (17) и (11) в (10), получаем

$$\varepsilon_{ic} = \frac{2}{3} \sqrt{\left(\sqrt{\lambda} - \frac{1}{\lambda}\right)^2 + 3\lambda\delta^2}.$$

С учетом того, что

$$\sqrt{\lambda} - \frac{1}{\lambda} = \frac{(\lambda - 1)(\sqrt{\lambda} + 1)}{\lambda} \left[1 - \frac{\sqrt{\lambda}}{(\sqrt{\lambda} + 1)^2}\right],$$

а выражение в квадратных скобках равно 0,75 при $\lambda = 1$ и 0,76 при $\lambda = 2$, в инженерном приближении можно полагать

$$\sqrt{\lambda} - \frac{1}{\lambda} \approx \frac{3(\lambda - 1)(\sqrt{\lambda} + 1)}{4\lambda}$$

и окончательно записать

$$\varepsilon_{ic} = \frac{1}{2} \sqrt{\left[\frac{(\lambda - 1)(\sqrt{\lambda} + 1)}{\lambda}\right]^2 + \lambda\beta^2}, \quad (19)$$

где

$$\beta^2 = \frac{16}{3} \delta^2. \quad (20)$$

Рассмотрим теперь деформированное состояние вблизи закрепленного контура пластины. Деформация в направлении касательной к контуру равна нулю, толщинная по-прежнему определяется (11), а деформация в направлении нормали к контуру вычисляется из условия несжимаемости

$$\varepsilon_{in} = \lambda - 1. \quad (21)$$

Подставив (11) и (21) в формулу, аналогичную (10), получим

$$\varepsilon_{ic} = \frac{2(\lambda - 1)}{3\lambda} \sqrt{1 + \lambda + \lambda^2}.$$

Поскольку

$$1 + \lambda + \lambda^2 = (1 + \lambda)^2 \left[1 - \frac{\lambda}{(1 + \lambda)^2} \right],$$

а выражение в квадратных скобках равно 0,75 при $\lambda = 1$ и 0,77 при $\lambda = 2$, в инженерном приближении можно полагать

$$1 + \lambda + \lambda^2 = 3(1 + \lambda)^2 / 4,$$

и таким образом для ε_{ik} запишем

$$\varepsilon_{ik} = \frac{\lambda^2 - 1}{\lambda\sqrt{3}}. \quad (22)$$

Подставив (19) и (22) в (9), получим

$$\varepsilon_i = \frac{1}{4} \sqrt{\left[\frac{(\lambda - 1)(\sqrt{\lambda} + 1)}{\lambda} \right]^2} + \lambda\beta^2 + \frac{\lambda^2 - 1}{2\lambda\sqrt{3}}. \quad (23)$$

Для завершения решения задачи необходимо λ выразить через w_0 . Условие несжимаемости применительно к объему всей пластинки дает:

$$\lambda = \frac{S}{\pi ab}, \quad (24)$$

где S – площадь срединной поверхности деформированной мембраны (сегмент эллиптического параболоида).

Можно показать, что точное значение S таково:

$$S = \frac{a^3 b^3}{3w_0^2} \int_0^{\pi/2} \frac{\left[1 + \frac{4w_0^2}{a^2 b^2} (b^2 \cos^2 \varphi + a^2 \sin^2 \varphi) \right]^{3/2} - 1}{b^2 \cos^2 \varphi + a^2 \sin^2 \varphi} d\varphi. \quad (25)$$

Интеграл (25) не выражается в элементарных функциях, поэтому для его вычисления применяем приближенный метод. Заметим, что выражение $a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi$ равно b^2 при $\varphi = 0$, a^2 при $\varphi = \pi/2$ и $(a^2 + b^2)/2$ при $\varphi = \pi/4$. В этом случае полагаем

$$a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi \approx (a^2 + b^2)/2 = \text{const.} \quad (26)$$

Подставляя (26) в (25), получаем

$$S = \frac{\pi a^3 b^3}{3w_0^2(a^2 + b^2)} \left\{ \left[1 + \frac{2w_0^2(a^2 + b^2)}{a^2 b^2} \right]^{3/2} - 1 \right\}. \quad (27)$$

Формула (27) дает хорошее инженерное приближение для площади S : во-первых, при $a = b$ она переходит в известное точное выражение для площади поверхности сегмента параболоида вращения, во-вторых, в пределе $w_0 \rightarrow 0$ дает площадь эллипса πab и, в-третьих, имеет хорошую асимптотику даже при $b \rightarrow 0$:

$$\lim_{b \rightarrow 0} S = aw_0 \frac{2\pi\sqrt{2}}{3}.$$

Точная асимптотика $b = 0$ такова:

$$S_T = aw_0 \frac{8}{3};$$

$$\left(\lim_{b \rightarrow 0} S \right) / S_T = \pi/2\sqrt{2} \approx 1,1.$$

Таким образом, приближение (27) можно с достаточной степенью точности использовать практически всегда, даже для очень вытянутых эллипсов, для которых $a/b \gg 1$.

Из (27) и (24) имеем

$$\lambda = \frac{a^2 b^2}{3w_0^2(a^2 + b^2)} \left\{ \left[1 + \frac{2w_0^2(a^2 + b^2)}{a^2 b^2} \right]^{3/2} - 1 \right\}. \quad (28)$$

Подставляя (28) в (23), а (23) в (8), получаем окончательное решение задачи. Его удобно записать в безразмерных переменных

$$q = \frac{P\sqrt{ab}}{Eh_0}; \quad \Phi(\xi) = F(\xi)/E; \quad \eta = w_0^2/ab, \quad (29)$$

где E – модуль Юнга, следующим образом:

$$\begin{cases}
 q = 4\sqrt{\eta}(A_1B_1 + A_2B_2)\Phi(\varepsilon_i); \\
 A_1 = [\lambda^3(1 + \theta) + \lambda - 2 + \sqrt{\lambda}(\lambda^2 + 2\lambda - 3)]/8\lambda^3R + (\lambda^2 + 1)/2\lambda^2\sqrt{3}; \\
 A_2 = \lambda/8R; \\
 B_1 = [1 + (2C\eta - 1)\sqrt{1 + 4C\eta}]/6C\eta^2; \\
 B_2 = 128(C^2 - 1)\eta/(3 + \eta)^3; \\
 R = \sqrt{\left[\frac{(\lambda - 1)(\sqrt{\lambda} + 1)}{\lambda}\right]^2 + \lambda\theta}; \\
 \theta = \frac{64}{3}(C^2 - 1)[\eta/(3 + \eta)]^2; \quad \lambda = [(1 + 4C\eta)^{3/2} - 1]/6C\eta; \\
 C = (a^2 + b^2)/2ab; \quad \varepsilon_i = R/4 + (\lambda^2 - 1)/2\lambda\sqrt{3}.
 \end{cases} \quad (30)$$

Частный случай. *Круглая пластина.* Для круглых пластин ($a = b = r_0$) решение (30) значительно упрощается, поскольку в этом случае $C = 1$ и $\theta = B_2 = 0$:

$$\begin{aligned}
 \tilde{q} &= \frac{1}{3\sqrt{3}\xi\sqrt{\zeta}} \left[1 + \frac{\sqrt{3}}{4\sqrt{\omega}} \left(1 + \frac{1}{\omega} \right) + \frac{1 + \sqrt{3}/2}{\omega^2} \right] \times \\
 &\times [1 + (2\xi - 1)\sqrt{1 + 4\xi}] \Phi \left[\frac{\omega - 1}{4\omega\sqrt{3}} (2\omega + 2 + \sqrt{3\omega} + \sqrt{3}) \right]; \quad (31)
 \end{aligned}$$

$$\tilde{q} = Pr_0/Eh_0; \quad \xi = w_0^2/r_0^2; \quad \omega = [(1 + 4\xi)^{3/2} - 1]/6\xi.$$

Решение (31) для круглых пластин получено ранее [7]. В случае упругих мембран ($\Phi(\zeta) = \zeta$) и малых прогибов формулы (31) хорошо согласуются с известными решениями [5]. Предельный переход $w_0 \rightarrow 0$ в (31) дает $w_0 = 0,602r_0\tilde{q}^{1/3}$, а в [5] соответствующий коэффициент равен 0,662. Это различие можно объяснить тем, что в [5] рассматривались сжимаемые материалы (коэффициент Пуассона $\nu = 0,25$), т.е. менее жесткие пластины.

Преимущество полученных решений перед классическими заключается в том, что выражения (30), (31) можно использовать без заметной потери точности при очень больших прогибах пластины, когда параметры η или ζ могут принимать значения, близкие к единице и даже больше. При этом в асимптотике $w_0 \rightarrow 0$ указанные формулы совпадают с хорошо известными мембранными решениями для умеренных прогибов.

В табл. 1, 2 приведено сравнение экспериментальных данных [8, 9] с расчетными для эллиптических пластин. Для круглых пластин расчетные данные сравнивались с экспериментальными, приведенными в [8, 10] (рис. 1 и 2). В обоих случаях расхождение между теорией и экспериментом не превышало 10%.

Т а б л и ц а 1

Сравнение прогибов в центральной точке эллиптических пластин, полученных по формуле (30), с экспериментальными данными [8] (материал – сталь 08кп, $a = 0,1$ м, толщина $0,82 \cdot 10^{-3}$ м)

b/a	P , МПа	$w_{\text{эксп}} \cdot 10^3$, м	$w_{\text{теор}} \cdot 10^3$, м
0,375	6,86	20,4	18,9
	8,04	25,6	25,0
0,500	4,90	22,2	21,3
	5,88	26,4	26,9
	7,06	38,9	40,8
0,750	3,43	27,3	26,5
	4,12	32,2	31,2
	5,48	42,6	46,6

Т а б л и ц а 2

Сравнение прогибов в центральной точке эллиптических пластин, полученных по формуле (30), с экспериментальными данными [9] (материал – медь МЗ, $a = 0,055$ м, толщина $0,49 \cdot 10^{-3}$ м)

b/a	P , МПа	$w_{\text{эксп}} \cdot 10^3$, м	$w_{\text{теор}} \cdot 10^3$, м
0,333	$4,58 \pm 0,29$	$20,0 \pm 0,48$	21,3
0,667	$4,53 \pm 0,46$	$10,5 \pm 1,50$	11,3

P , МПа

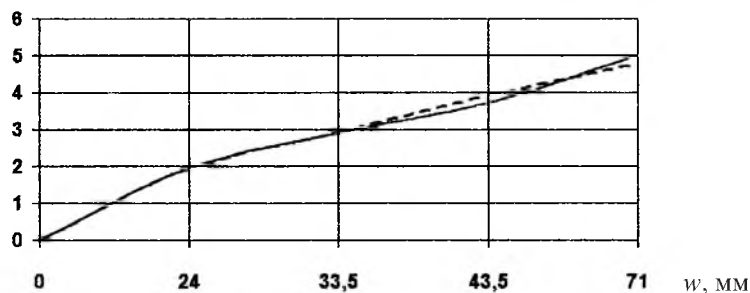


Рис. 1. Экспериментальная [8] – штриховая линия и рассчитанная по формуле (31) – сплошная линия зависимости давления от прогиба круглой пластины из стали 08кп толщиной $0,82 \cdot 10^{-3}$ м и радиусом 0,1 м.

P , МПа

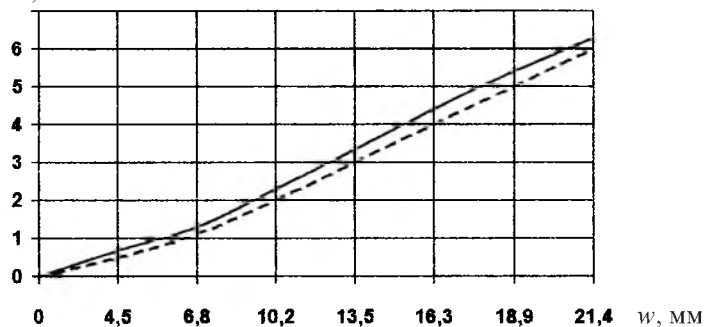


Рис. 2. Экспериментальная [10] – штриховая линия и рассчитанная по формуле (31) – сплошная линия зависимости давления от прогиба круглой пластин из меди МЗ толщиной $1 \cdot 10^{-3}$ м и радиусом 0,051 м.

Заключение. Использование энергетического подхода позволило получить аналитическое решение для статически нагруженных равномерным давлением эллиптических и круглых пластин, закрепленных по контуру и испытывающих большие прогибы. Сравнение расчетных данных с экспериментальными показало, что полученные выражения пригодны для инженерных расчетов.

Резюме

На основі енергетичного підходу отримано аналітичний розв'язок для статично навантажених рівномірним тиском закріплених по контуру еліптичних і круглих пластин, що зазнають великих прогинів. Порівняння розрахункових даних з експериментальними показало, що отримані формули можуть застосовуватися для інженерних розрахунків.

1. *Nurick G. N. and Martin J. B.* Deformation of thin plates subjected to impulsive loading. Pt. 1, 2. A review // *J. Impact Engng.* – 1989. – **8**, No. 2. – P. 159 – 186.
2. *Ромащенко В. А.* Метод исследования неосесимметричного динамического формоизменения разрушаемых оболочек. Сообщ. 1. Теория и численный метод // *Пробл. прочности.* – 1996. – № 3. – С. 5 – 19.
3. *Галиев Ш. У., Бабич Ю. Н., Жураховский С. В. и др.* Численное моделирование волновых процессов в ограниченных средах. – Киев: Наук. думка, 1989. – 200 с.
4. *Nadai W.* Theory of Flow and Fracture of Solids. – New York: McGraw-Hill, 1963. – Vol. 2. – 705 p.
5. *Timoshenko S. P. and Woinowsky-Krieger S.* Theory of Plates and Shells. – New York: McGraw-Hill, 1959. – 605 p.
6. *Малинин Н. Н.* Прикладная теория пластичности и ползучести. – М.: Машиностроение, 1975. – 400 с.
7. *Ромащенко В. А., Сторожук В. Н.* Энергетический подход к решению задачи статически нагруженных круглых пластин, испытывающих большие прогибы // *Тр. Междунар. конф. “Оценка и обоснование продления ресурса элементов конструкций”* (Киев, 6–9 июня 2000 г.). – Киев: Ин-т пробл. прочности НАН Украины, 2000. – С. 509 – 514.
8. *Головлев В. Д.* Об особенностях металла к глубокой вытяжке // *Новые процессы обработки металлов давлением.* – М.: Изд-во АН СССР, 1962. – С. 135 – 143.
9. *Ромащенко В. А., Сторожук В. Н.* Методы исследования неосесимметричного динамического формоизменения разрушаемых оболочек. Сообщ. 2. Расчеты и эксперимент // *Пробл. прочности.* – 1996. – № 4. – С. 41 – 48.
10. *Мисевич Ю., Рудис М. А.* Большие пластические деформации круглых плоских мембран при статических и динамических нагрузках // *Прикл. механика.* – 1981. – **17**, № 1. – С. 86 – 92.

Поступила 20. 04. 2001