

Вибрационная диагностика поврежденной пологой цилиндрической оболочки

А. Б. Ройтман^а, Д. И. Анпилогов^б

^а Запорожский государственный университет, Запорожье, Украина

^б Запорожский государственный технический университет, Запорожье, Украина

Рассмотрены свободные колебания пологой цилиндрической оболочки с “дышащей” трещиной с учетом результатов, полученных в Институте проблем прочности НАН Украины В. В. Матвеевым и А. П. Бовсуновским для спектральной диагностики поперечных колебаний стержня с закрывающейся трещиной. Упругие характеристики оболочки интерпретируются как некоторая билинейная система. Информацию об уменьшении жесткости, обусловленную раскрытием трещины, можно использовать при выборе вибрационных индикаторов повреждения. Получены зависимости относительного уменьшения жесткости оболочки от глубины и расположения трещины. Показана необходимость учета потенциальной энергии растяжения срединной поверхности оболочки. Установлено, что эффективность обнаружения повреждения с помощью вибродиагностических подходов повышается с ростом толщины оболочки.

Ключевые слова: “дышащая” трещина, билинейная система, открытый и закрытый полуциклы, вибродиагностический метод, индикатор повреждения.

Обозначения

A, B	– амплитуды колебаний на закрытом и открытом полуциклах
a	– радиус оболочки
a_i, b_i	– коэффициенты Фурье временного множителя компонент смещения
d	– полуширина разгрузочной области
d_1, d_2	– экспериментальное и теоретическое значение d
E	– модуль упругости материала оболочки
h	– толщина оболочки
h_1	– глубина трещины
K_1, K_2	– жесткости билинейной системы
k, σ	– параметры балочной функции
l	– длина образующей оболочки
q	– относительная толщина оболочки
s_1	– длина направляющей оболочки
s_0	– координата расположения трещины
T_1, T_2	– кинетические энергии оболочки
$(u_1; v_1; w_1), (u_2; v_2; w_2)$	– компоненты смещения точки срединной поверхности из положения равновесия
$X(x), Y(s)$	– балочные функции
$(x; s)$	– координаты точки срединной поверхности оболочки
z	– координата вдоль нормали к срединной поверхности оболочки

α	– вклад, обусловленный энергией растяжения, в относительное уменьшение жесткости
β	– относительное уменьшение жесткости при раскрытии трещины
γ	– относительная глубина трещины
δ	– начальная фаза первой гармоники временного сомножителя компонент смещения
$\varepsilon_1, \varepsilon_2$	– осевые деформации вдоль направлений x, s
κ_1, κ_2	– параметры кривизны вдоль направлений x, s
μ	– коэффициент Пуассона материала оболочки
Π_1, Π_2	– потенциальные энергии упругой деформации
$\Delta\Pi$	– потенциальная энергия, которая могла быть локализована в разгрузочной области
ρ	– плотность материала оболочки
τ	– параметр кручения срединной поверхности
$\varphi_1(t), \varphi_2(t)$	– временные сомножители компонент смещения
ψ	– угол, под которым видна дуга оболочки из ее оси
$\Omega, \Delta\Omega$	– области интегрирования для всей оболочки и для разгрузочной области
ω_1, ω_2	– частоты колебаний
ω	– усредненная частота колебаний

Введение. В последнее время заметно возрос интерес к решению задач вибродиагностики поврежденных механических конструкций. С одной стороны, это обусловлено тем, что вибродиагностика повреждений остается недорогим, оперативным и неразрушающим методом контроля целостности изделий, в связи с чем необходим дальнейший поиск эффективных вибрационных индикаторов повреждения (ВИП). С другой стороны, успехи, достигнутые в этом направлении для простейших стержневых элементов, открывают возможности для решения более сложных задач. Так, в [1, 2] на основе асимптотического метода нелинейной механики получено решение прямой задачи вибродиагностики для открытой и закрывающейся (“дышащей”) краевых трещин, расположенных на боковой поверхности стержня. В последующих работах [3–8] прямая задача вибродиагностики сведена к вычислению параметров, характеризующих кусочную линейность (билинейность) как свободных, так и вынужденных колебаний механической системы с одной степенью свободы.

При описании упругих свойств тела с дышащей трещиной используют следующий прием [3]. Полагают, что в течение полуцикла колебаний, когда трещина открывается, происходит перераспределение потенциальной энергии упругой деформации по объему колеблющегося тела. Для нового распределения энергии характерно формирование так называемой разгрузочной области – части объема материала, содержащей трещину и лишенной напряжений. Учет такой области эквивалентен выборке соответствующего объема материала, т.е. мгновенному ослаблению жесткости на открытом полуцикле. Период колебаний такой системы определяют как сумму полупериодов колебаний двух линейных систем [9–11]. В [1–8] объектом исследования служили стержневые элементы с дышащей трещиной. Представляет интерес рассмотрение пологих оболочек с такой же трещиной.

Целью настоящей работы является построение вибрационных индикаторов повреждения, позволяющих диагностировать дышащую трещину в полой цилиндрической оболочке.

1. Изгибные колебания полой цилиндрической оболочки без трещины. Рассмотрим изгибные колебания полой цилиндрической оболочки без повреждений с геометрическими параметрами, указанными на рис. 1.

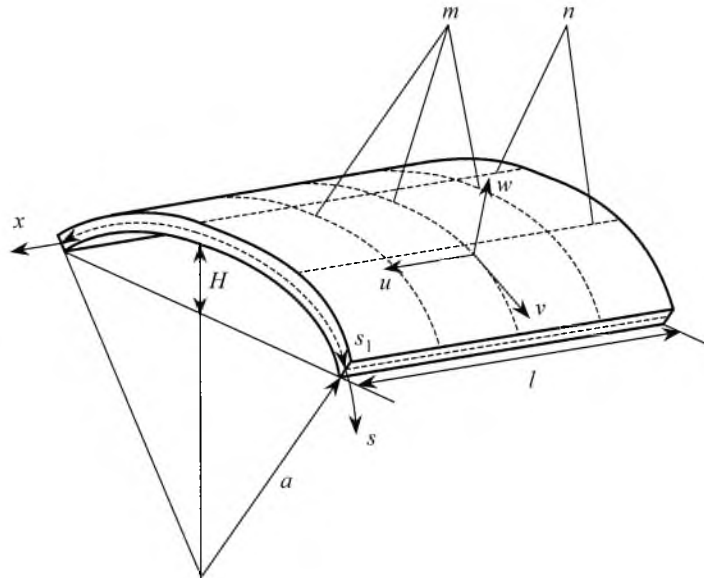


Рис. 1. Геометрические параметры полой цилиндрической оболочки: a – радиус оболочки; l – длина меридиана (образующей); s_1 – длина дуги (направляющей); H – высота подъема; (x, s) – криволинейная система координат; m – количество узловых дуг; n – количество узловых меридианов.

Пусть оболочка закреплена вдоль контурных меридианов и свободна вдоль контурных дуг (координатных линий $x = 0$ и $x = l$). Компоненты смещения точки $(x; s)$ срединной поверхности из положения равновесия вдоль направляющей, вдоль касательной к образующей и вдоль нормали в случае изгибных колебаний ищем в виде [12]

$$\begin{cases} u_1 = 0; \\ v_1 = 0; \\ w_1 = AX(x)Y(s)\varphi_1(t), \end{cases} \quad (1)$$

где A – некоторая константа, зависящая от начальных условий; $\varphi_1(t)$ – временной множитель компонент смещения, X, Y – балочные функции, соответствующие граничным условиям

$$X''(0) = X'''(0) = X''(l) = X'''(l) = 0; \quad Y(0) = Y'(0) = Y(s_1) = Y'(s_1) = 0.$$

С использованием этих условий для простейшей формы колебаний имеем

$$X \equiv 1; \quad Y = \operatorname{ch} \frac{ks}{s_1} - \cos \frac{ks}{s_1} - \sigma \left(\operatorname{sh} \frac{ks}{s_1} - \sin \frac{ks}{s_1} \right), \quad (2)$$

где

$$\sigma = \frac{\operatorname{ch} k - \cos k}{\operatorname{sh} k - \sin k};$$

k – наименьший положительный корень уравнения $\operatorname{ch} k \cdot \cos k = 1$.

Вычислим потенциальную энергию упругой деформации оболочки. При рассмотрении колебаний по форме (1) с учетом (2) четыре из шести параметров деформации, определяющих потенциальную энергию оболочки [12, 13], оказываются равными нулю:

$$\varepsilon_1 = 0; \quad \gamma = 0; \quad \kappa_1 = 0; \quad \tau = 0; \quad \varepsilon_2 = -\frac{w}{a}; \quad \kappa_2 = -\frac{\partial^2 w}{\partial s^2}.$$

Поэтому формула для потенциальной энергии упругой деформации оболочки принимает вид

$$\Pi = \frac{E}{2(1-\mu^2)} \iint_{(\Omega)} dx ds \int_{-h/2}^{h/2} (\varepsilon_2^2 + z^2 \kappa_2^2) dz, \quad (3)$$

где E – модуль упругости; μ – коэффициент Пуассона; Ω – область $x \in [0; l]$, $s \in [0; s_1]$. Полагая $w = w_1$ (1), из (3) имеем

$$\Pi_1 = \frac{E l A^2}{2(1-\mu^2)} \left(\frac{h s_1}{a^2} + \frac{h^3 k^4}{12 s_1^3} \right) \varphi_1^2(t). \quad (4)$$

Кинетическая энергия колебаний оболочки по этой же форме может быть получена интегрированием выражения

$$dT = \frac{1}{2} dm \left(\frac{\partial w_1}{\partial t} \right)^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_1}{\partial t} \right)^2 \rho h dx ds$$

по всему объему материала оболочки, где dm – масса элемента оболочки; ρ – плотность материала. Поскольку колебания являются изгибными, величина $\frac{\partial w_1}{\partial t}$ есть скорость движения элемента оболочки. Вычисления кинетической энергии с использованием (1) приводят к результату

$$T_1 = 0,5 \rho h l s_1 A^2 \dot{\varphi}_1^2. \quad (5)$$

(Здесь и далее точкой обозначено дифференцирование по времени.)

В связи с отсутствием потерь энергии свободные колебания оболочки описываются уравнением

$$\dot{T}_1 + \dot{\Pi}_1 = 0. \quad (6)$$

При подстановке (4) и (5) в (6) имеем

$$\ddot{\varphi}_1 + \frac{E}{\rho(1-\mu^2)} \left(\frac{1}{a^2} + \frac{h^2 k^4}{12 s_1^4} \right) \varphi_1 = 0 \quad (7)$$

или

$$\ddot{\varphi}_1 + K_1 \varphi_1 = 0.$$

Поскольку последнее уравнение описывает свободные колебания материальной точки единичной массы, закрепленной на пружине жесткостью K_1 , то оболочка без трещины при рассматриваемой форме колебаний имеет жесткость

$$K_1 = \frac{E}{\rho(1-\mu^2)} \left(\frac{1}{a^2} + \frac{h^2 k^4}{12 s_1^4} \right).$$

2. Изгибные колебания пологой цилиндрической оболочки с трещиной. Пусть на наружной поверхности оболочки имеется продольная трещина глубиной $h_1 < h$, расположенная вдоль координатной линии $s = s_0$. Такая трещина может возникнуть при соответствующем возбуждении оболочки, например, если на ее наружную поверхность нанесено тонкое хрупкое покрытие. Разобьем оболочку на малые элементы семейством плоскостей $x = \text{const}$. При рассматриваемой форме колебаний смещение w не зависит от значения x , поэтому исследуем один такой элемент (рис. 2).

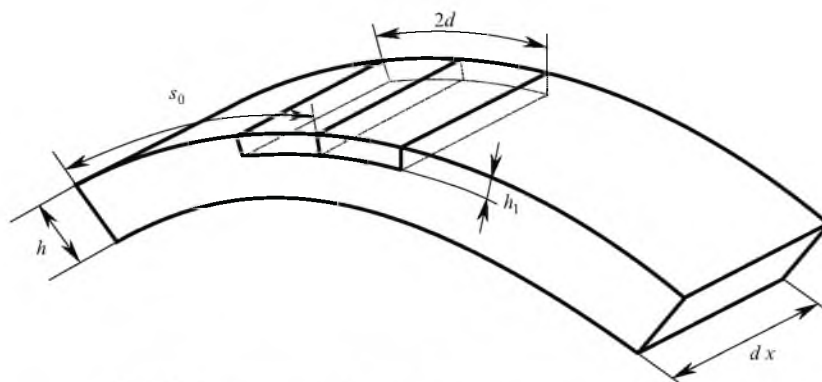


Рис. 2. Разгрузочная область в малом элементе оболочки.

Полуширину разгрузочной области обозначим через d . Поскольку оболочка является пологой, примем, что полуширина разгрузочной области в одном из ее элементов при раскрытии трещины равна полуширине разгрузочной области в прямолинейном стержне. Значения полуширины разгрузочной области в стержне оценены на основе экспериментальных данных [4]

$$d_1 = \frac{10}{3} \frac{h_1^2}{h} = \frac{10}{3} h \gamma^2 \quad (8)$$

и путем расчета с использованием коэффициента интенсивности напряжений [5]

$$d_2 = \frac{0,3675 h(1-\gamma)}{1-(1-\gamma)^3} [(1-\gamma)^6 - 3(1-\gamma)^2 + 2], \quad (9)$$

где h – толщина стержня; h_1 – глубина трещины; $\gamma = h_1/h$.

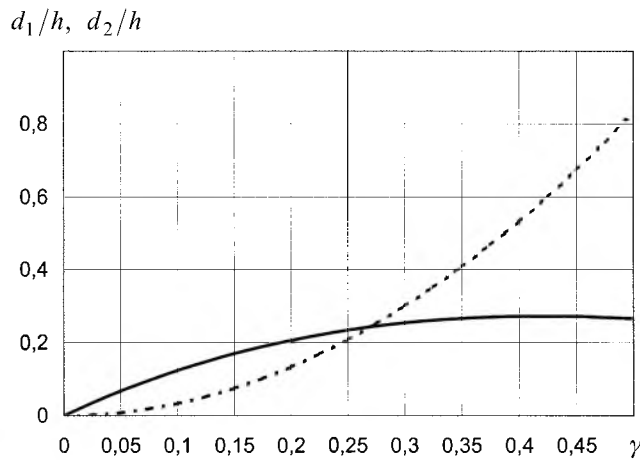


Рис. 3. Зависимость полуширины разгрузочной области от глубины трещины.

Зависимости величин d_1/h (штриховая линия) и d_2/h (сплошная линия) от параметра γ представлены на рис. 3. Несмотря на различный характер поведения этих функций в окрестности точки $\gamma_0 = 0$, значения полуширины разгрузочной области при $\gamma < 0,3$ согласно выражениям (8) и (9) приблизительно одинаковы, поэтому расчет относительного уменьшения жесткости оболочки при раскрытии трещины проведем с использованием обеих формул (8), (9). Смещение точек срединной поверхности оболочки для открытого полуцикла (трещина открыта) определим соотношением

$$w_2 = BY(s)\varphi_2(t). \quad (10)$$

Форма колебаний принимается одинаковой на обоих полуциклах, что можно допустить при малых размерах трещин. Потенциальная энергия на открытом полуцикле

$$\Pi_2 = \Pi_1 \frac{B^2 \varphi_2^2}{A^2 \varphi_1^2} - \Delta\Pi, \quad (11)$$

где $\Delta\Pi$ – энергия, которая была бы локализована в разгрузочной области при отсутствии разгрузки. С учетом параметров повреждения $2d, l, h_1$ и

расположения $s = s_0 \pm d$ разгрузочной области на основании (3) при соответствующем изменении пределов интегрирования имеем

$$\Delta\Pi = \frac{E}{2(1-\mu^2)} \iint_{(\Delta\Omega)} dx ds \int_{h/2-h_1}^{h/2} (\varepsilon_2^2 + z^2 \kappa_2^2) dz, \quad (12)$$

где $\Delta\Omega$ – проекция разгрузочной области на срединную поверхность, ограниченная координатными линиями $x=0, x=l, s=s_0-d, s=s_0+d$. Вычислив параметры деформации ε_2 и κ_2 с использованием соотношений (10) и подставив их в (12), а результат – в (11), получим потенциальную энергию упругой деформации оболочки с трещиной:

$$\Pi_2 = \frac{ElB^2}{2(1-\mu^2)} \left\{ \frac{h(s_1 - \gamma J_1)}{a^2} + \frac{h^3}{12} \left[\frac{k^4}{s_1^3} - \gamma(3 - 6\gamma + 4\gamma^2) J_2 \right] \right\} \varphi_2^2(t),$$

где

$$J_1 = \int_{s_0-d}^{s_0+d} Y^2 ds; \quad J_2 = \int_{s_0-d}^{s_0+d} (Y'')^2 ds;$$

штрихи обозначают дифференцирование по s . Эти интегралы удобно вычислить с помощью замены $y = ks/s_1$:

$$\frac{J_1}{s_1} = \frac{1}{k} \int_{y_1}^{y_2} [\operatorname{ch} y - \cos y - \sigma(\operatorname{sh} y - \sin y)]^2 dy;$$

$$s_1^3 J_2 = k^3 \int_{y_1}^{y_2} [\operatorname{ch} y + \cos y - \sigma(\operatorname{sh} y + \sin y)]^2 dy,$$

где $y_{1,2} = k \frac{s_0}{s_1} \pm \Delta y$, причем знак “+” соответствует верхнему пределу интегрирования. С использованием (8) и (9) при $d = d_1$ находим

$$\Delta y = \frac{10}{3} kq\gamma^2$$

либо при $d = d_2$ –

$$\Delta y = kq \frac{0,3675(1-\gamma)}{1-(1-\gamma)^3} [(1-\gamma)^6 - 3(1-\gamma)^2 + 2],$$

где $q = h/s_1$ – относительная толщина оболочки.

Кинетическая энергия на открытом полуцикле

$$T_2 = T_1 \frac{B^2 \dot{\phi}_2^2}{A^2 \dot{\phi}_1^2}.$$

Составляя уравнение движения, аналогичное (7), находим жесткость оболочки на открытом полуцикле:

$$K_2 = \frac{E}{\rho(1-\mu^2)} \left\{ \frac{1}{a^2} \left(1 - \gamma \frac{J_1}{s_1} \right) + \frac{h^2}{12} \left[\frac{k^4}{s_1^4} - \gamma(3 - 6\gamma + 4\gamma^2) \frac{J_2}{s_1} \right] \right\}.$$

3. Относительное уменьшение жесткости. При описании движения билинейных колебательных систем с одной степенью свободы существенную роль играет относительное уменьшение жесткости:

$$\beta = \frac{K_1 - K_2}{K_1}.$$

С учетом полученных выше результатов для полой оболочки при рассматриваемой форме колебаний имеем

$$\beta = \gamma \frac{\psi^2 \left(\frac{J_1}{s_1} \right) + \frac{q^2}{12} (3 - 6\gamma + 4\gamma^2) (s_1^3 J_2)}{\psi^2 + \frac{q^2}{12} k^4}, \quad (13)$$

где $\psi = s_1 / a$ – угол, под которым видна дуга оболочки из ее оси.

Результаты расчета величины β с помощью значений полуширин (8) и (9) представлены на рис. 4. Зависимости $\beta(\gamma)$ построены при значениях $q = 0,1$, $s_0/s_1 = 0,5$, приведенных в [6]. Угол ψ выбирали равным нулю (темные точки), 30° (крестики), 60° (штриховые линии) и 90° (сплошные линии). Оболочки с углом $\psi > 90^\circ$ не являются пологими [12]. Видно, что рост угла ψ при малых трещинах ($\gamma < 0,3$) практически не влияет на относительное уменьшение жесткости, при трещинах большей глубины увеличение угла ψ приводит к росту значения β как при использовании формулы (8), так и (9). Сравнение представленных данных показывает, что при $\gamma > 0,3$ большие значения относительного уменьшения жесткости получены в случае использования соотношения (8).

Из соотношения (13) видно, что относительное уменьшение жесткости оболочки определяется двумя различными механизмами накопления потенциальной энергии упругой деформации – растяжением и изгибом срединной поверхности (первое и второе слагаемое соответственно). В [3] при изучении поперечных колебаний стержня авторы использовали формулу потенциальной энергии изгиба стержня

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_0^L EJ \left(\frac{d^2 y}{dx^2} \right)^2 dx, \quad (14)$$

где L – длина стержня (соответствует величине s_1 для оболочки); J – момент инерции сечения; x – координата вдоль стержня (соответствует координате s для оболочки); $y(x)$ – профиль кривой прогиба. Очевидно, использование (14) вместо (3) приведет к отсутствию первых слагаемых в числителе и знаменателе (13). Для стержней такое пренебрежение оправдано, поскольку стержень является частным случаем оболочки, у которой $\psi \rightarrow 0$, а длина l равна соответствующему размеру поперечного сечения.

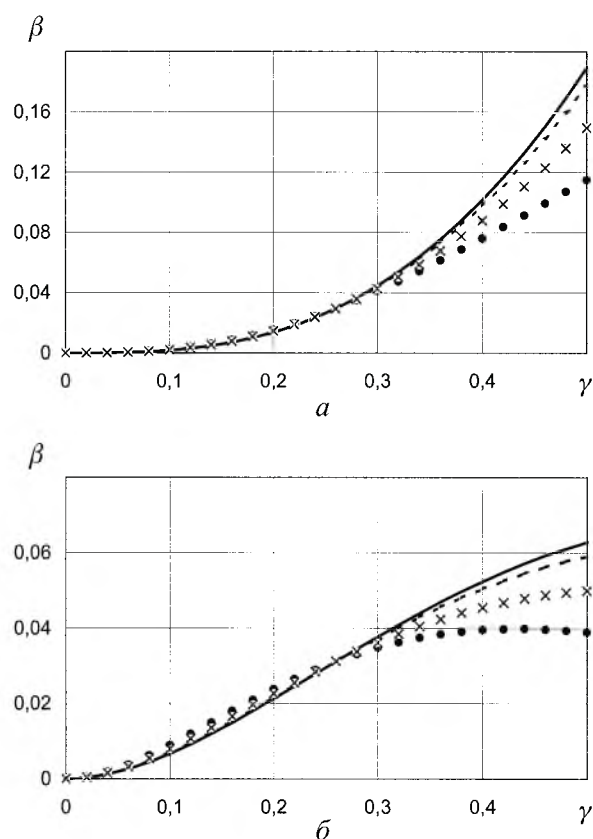


Рис. 4. Зависимость относительного уменьшения жесткости оболочки от относительной глубины трещины при использовании экспериментальных (а) и теоретических (б) значений полуширины разгрузочной области.

Однако пренебрежение энергией при растяжении оболочек недопустимо, особенно в случае больших значений ψ и малых q . Полагая $q \rightarrow 0$, для тонких оболочек из (13) получаем

$$\beta = \gamma \frac{J_1}{s_1}.$$

Отсутствие в этом соотношении интеграла J_2 означает, что в отличие от стержней для тонких оболочек следует пренебрегать энергией изгиба срединной поверхности. При этом относительное уменьшение жесткости β перестает зависеть от угла ψ . Для иллюстрации необходимости учета энергии растяжения срединной поверхности оболочки исследуем вклад слагаемого, обусловленного энергией растяжения, в относительное уменьшение жесткости:

$$\alpha = \frac{\psi^2 \left(\frac{J_1}{s_1} \right)}{\psi^2 \left(\frac{J_1}{s_1} \right) + \frac{q^2}{12} (3 - 6\gamma + 4\gamma^2) (s_1^3 J_2)}$$

Результаты расчета α проведены при $\gamma = 0,05$ и $d = d_2$ (рис. 5). Видно, что вклад слагаемого, обусловленного энергией растяжения, в относительное уменьшение жесткости увеличивается с ростом угла ψ , причем тем более существенно, чем тоньше оболочка.

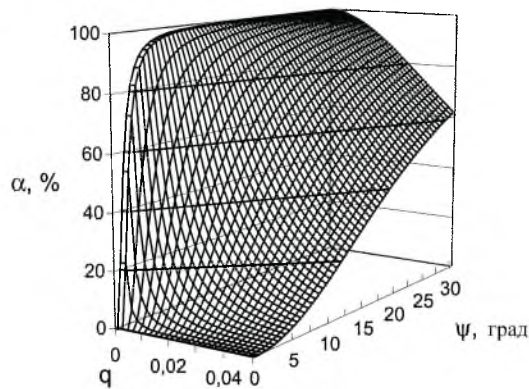


Рис. 5. Изменение вклада слагаемого, обусловленного энергией растяжения срединной поверхности, в относительное уменьшение жесткости в зависимости от геометрических параметров оболочки.

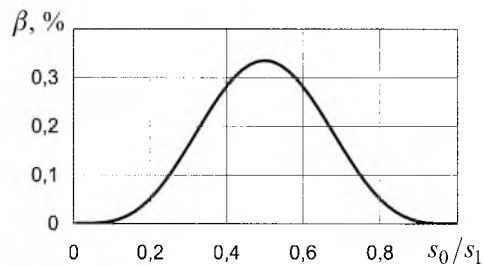


Рис. 6. Зависимость относительного уменьшения жесткости от расположения трещины для тонкой оболочки.

На рис. 6 показана зависимость относительного уменьшения жесткости от расположения трещины, построенная по (13) с использованием (9) при $q = 0,005$, $\gamma = 0,5$, $\psi = 90^\circ$. Аналогичные зависимости, полученные при меньших углах ψ , отличаются от приведенной на величину, сопоставимую с

толщиной линии на графике. Очевидно, достижение максимума в точке $s_0/s_1 = 0,5$ соответствует рассматриваемым условиям закрепления оболочки. Однако для тонких оболочек относительное уменьшение жесткости, а следовательно, и чувствительности вибродиагностического метода оказывается на порядок меньше, чем при $q = 0,1$ (рис. 4,б).

4. **Диагностирование повреждения пологой оболочки.** Пренебрегая возникновением сопутствующих раскрытию трещины высших форм колебаний [5], оболочку можно интерпретировать как билинейную колебательную систему с одной степенью свободы. Пусть жесткости системы на закрытом и открытом полуциклах равны K_1 и K_2 соответственно, а относительное уменьшение жесткости равно β . Временной множитель компонент смещения, описывающий свободные колебания в этой системе, является кусочно-гармонической функцией. Она может быть разложена в ряд Фурье, а коэффициенты Фурье представлены [7] как функции отношений частот

$$\omega_1 = \sqrt{K_1}; \quad \omega_2 = \sqrt{K_2}; \quad \omega = \frac{2\omega_1\omega_2}{\omega_1 + \omega_2},$$

где ω_1 – частота на закрытом полуцикле колебаний; ω_2 – частота на открытом полуцикле; ω – усредненная частота полного цикла колебаний. При этом можно показать, что коэффициенты Фурье оказываются функциями только величины β . Известные ВИП [2, 11], такие как относительные значения амплитуд четных гармоник, постоянная составляющая временного множителя компонент смещения и другие, определяются как соответствующие комбинации коэффициентов Фурье и, следовательно, также зависят только от β .

Рассмотрим в качестве ВИП начальную фазу первой гармоники временного множителя компонент смещения, равную $\delta = \arctg(a_1/b_1)$, где a_1 и b_1 – коэффициенты в разложении временного множителя компонент смещения в ряд Фурье при функциях $\cos \omega t$ и $\sin \omega t$ соответственно. С использованием их значений, полученных ранее [7], имеем

$$\delta = \frac{\pi}{2} \frac{1 - \sqrt{1 - \beta}}{1 + \sqrt{1 - \beta}}.$$

Разлагая эту функцию в ряд Маклорена, получаем

$$\delta = \frac{\pi}{8} \beta + \dots$$

С точностью до коэффициента $\pi/8$ начальная фаза первой гармоники временного множителя компонент смещения в первом приближении совпадает с относительным уменьшением жесткости. Поэтому величина δ может играть роль эффективного ВИП. Зависимость начальной фазы первой гармоники временного множителя компонент смещения от глубины трещины при ее расположении $s_0 = s_1/2$ для оболочек с различной относи-

тельною товщиною показана на рис. 7. Видно, що швидкість росту початкової фази з увеличенням глибини тріщини оказується більшою для більш товстих оболонок. Запоздывание временного множителя компонент смещения составляет $\Delta t = \delta / \omega$. Величину Δt можно использовать в качестве индикатора при диагностировании конструкций в определенном диапазоне собственных частот.

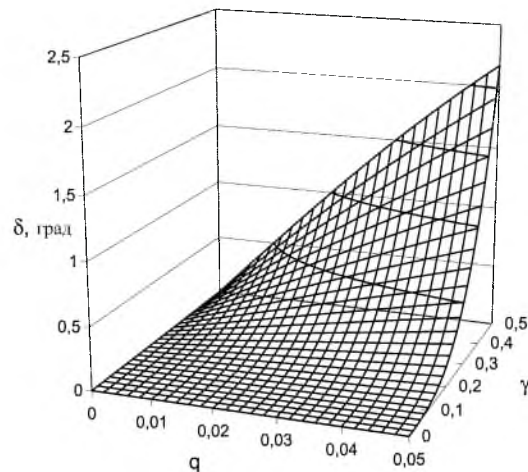


Рис. 7. Зависимость начальной фазы первой гармоники временного множителя компонент смещения от относительной глубины трещины и относительной толщины оболочки.

Заключение. Рассмотрены свободные колебания пологой цилиндрической оболочки с дышащей трещиной. Оболочка интерпретируется как некоторая билинейная система. Показано, что относительное уменьшение жесткости, обусловленное раскрытием трещины, определяет значения вибрационных индикаторов повреждения. Построены зависимости относительного уменьшения жесткости оболочки от глубины и расположения трещины. В отличие от стержневых элементов относительное уменьшение жесткости оболочки, обусловленное раскрытием трещины, определяется главным образом потенциальной энергией растяжения срединной поверхности. Установлено, что эффективность вибродиагностического метода обнаружения повреждения оболочки повышается с ростом ее толщины.

Резюме

Розглянуто вільні коливання пологої циліндричної оболонки з тріщиною, що “дихає”, з урахуванням отриманих в Інституті проблем міцності НАН України В. В. Матвеевим і А. П. Бовсуновським результатів для спектральної діагностики поперечних коливань стрижня з тріщиною, що закривається. Пружні характеристики оболонки інтерпретуються як деяка білінійна система. Інформацію щодо зменшення жорсткості, що зумовлена розкриттям тріщини, можна використати при виборі вібраційних індикаторів пошкодження. Отримано залежності відносного зменшення жорсткості оболонки від глибини і розташування тріщини. Показано необхідність ураху-

вання потенціальної енергії розтягу середньої поверхні оболонки. Установлено, що ефективність виявлення пошкодження за допомогою вібродіагностичних підходів зростає зі збільшенням товщини оболонки.

1. *Матвеев В. В.* К анализу эффективности метода спектральной вибродиагностики усталостного повреждения элементов конструкций. Сообщ. 1. Продольные колебания, аналитическое решение // Пробл. прочности. – 1997. – № 6. – С. 5 – 20.
2. *Матвеев В. В., Бовсуновский А. П.* К анализу эффективности метода спектральной вибродиагностики усталостного повреждения элементов конструкций. Сообщ. 2. Изгибные колебания, аналитическое решение // Там же. – 1998. – № 6. – С. 9 – 22.
3. *Бовсуновский А. П.* К вопросу об определении собственной частоты поперечных и продольных колебаний стержня с трещиной. Сообщ. 1. Аналитический подход // Там же. – 1999. – № 2. – С. 35 – 44.
4. *Бовсуновский А. П.* К вопросу об определении собственной частоты поперечных и продольных колебаний стержня с трещиной. Сообщ. 2. Результаты эксперимента и расчета // Там же. – № 3. – С. 45 – 53.
5. *Матвеев В. В., Бовсуновский А. П.* К определению вибрационных характеристик стержня с закрывающейся трещиной при изгибных колебаниях // Там же. – 2000. – № 3. – С. 5 – 23.
6. *Матвеев В. В., Бовсуновский А. П.* К анализу эффективности метода спектральной вибродиагностики усталостного повреждения элементов конструкций. Сообщ. 4. Анализ искажения гармоничности цикла колебаний стержневых элементов при наличии закрывающихся поперечных трещин // Там же. – № 1. – С. 5 – 12.
7. *Ройтман А. Б., Пылов А. А., Александрова Н. Б.* Продольные колебания консольного стержня с поперечной трещиной. Сообщ. 1. Малые колебания // Там же. – 1999. – № 2. – С. 23 – 34.
8. *Ройтман А. Б., Пылов А. А., Александрова Н. Б.* Продольные колебания консольного стержня с поперечной трещиной. Сообщ. 2. Кусочно-линейная модель // Там же. – № 5. – С. 78 – 85.
9. *Вибрации в технике: Справочник: В 6 т. – Т. 2. Колебания нелинейных механических систем / Под ред. И. И. Блехмана.* – М.: Машиностроение, 1979. – 351 с.
10. *Тимошенко С. П., Янг Д. Х., Уивер У.* Колебания в инженерном деле. – М.: Машиностроение, 1985. – 472 с.
11. *Карасев В. А., Ройтман А. Б.* Доводка эксплуатируемых машин. Вибродиагностические методы. – М.: Машиностроение, 1986. – 192 с.
12. *Гонткевич В. С.* Собственные колебания пластинок и оболочек. – Киев: Наук. думка, 1964. – 288 с.
13. *Филин А. П.* Элементы теории оболочек. – Л.: Стройиздат, 1987. – 383 с.

Поступила 12. 07. 2001