УДК 519.8

П.И. СТЕЦЮК, Л.Б. КОШЛАЙ, А.В. ПИЛИПОВСКИЙ

О ЗАДАЧЕ ОПТИМАЛЬНОГО СООТНОШЕНИЯ МЕЖДУ СПРОСОМ И ДОБАВЛЕННОЙ СТОИМОСТЬЮ В МОДЕЛЯХ ЛЕОНТЬЕВА*

Предложена математическая модель для исследования связи между структурой спроса и добавленной стоимости в статических моделях Леонтьева. Модель сформулирована в форме задачи нелинейного программирования с двумя квадратичными ограничениями-равенствами. Показано, что задача имеет единственное решение. Разработан итерационный алгоритм нахождения этого решения и даны тестовые расчеты для 7-отраслевого баланса с технологической мат-рицей, построенной М.В. Миха-левичем.

Введение. Один из выдающихся экономистов, нобелевский лауреат 1973 года, американский ученый российского происхождения Василий Васильевич Леонтьев вошел в историю главным образом как разработчик системы межотраслевых балансов "затраты-выпуск" [1]. Инструментом межотраслевого анализа служит таблица балансов, подразделяющая экономику на несколько десятков отраслей. В современной экономике образуются сложные взаимосвязи между различными отраслями, а метод Леонтьева позволяет представить экономическую систему в виде набора линейных производственных функций, описывающих взаимосвязи ее секторов. Предложенная Леонтьевым алгебраическая теория анализа "затраты-выпуск" сводится к системе линейных уравнений, в которых параметрами являются коэффициенты затрат на производство продукции (матрица Леонтьева). Леонтьев показал, что коэффициенты, выражающие отношения между секторами экономики могут быть оценены статистически, что они достаточно устойчивы и что их можно прогнозировать. Более того, Леонтьевым было показано существование наиболее важных коэффициентов, изменения которых необходимо отслеживать в первую очередь. -

*Работа выполнена при поддержке SNSF (Швейцария), проект № IZ73ZO_127962 "Analysis of Institutional and Technological Changes in Market and Transition Economies on the Background of the Present Financial Crisis"

Леонтьевские соотношения "затраты-выпуск" использовали в своих исследованиях многие ученые. Так, например, член-корреспондент НАН Украины М.В. Михалевич – для моделирования структурно-технологических изменений в переходной экономике [2, 3], а профессор Г. Бортис [4, 5] – для определения пропорций между секторами экономики при заданном уровне экономической активности.

В данной работе авторами сделана попытка определить оптимальное соотношение между спросом и добавленной стоимостью для матрицы Леонтьева.

Структура работы следующая. Вначале даны необходимые сведения о матрице Леонтьева и приведен пример такой матрицы для семиотраслевого баланса, построенный М.В. Михалевичем. Далее рассмотрены основные балансовые соотношения в модели Леонтьева, проанализированы свойства прямой и двойственной моделей – продуктивность и прибыльность. Затем построена задача нелинейного программирования, которая объединяет обе вышеуказанные модели Леонтьева и содержит два нелинейных квадратичных ограничения-равенства. Показано, что при определенных условиях эта задача имеет единственное решение и изложен алгоритм нахождения этого решения. Приведены результаты расчетов оптимального соотношения для вектора спроса и вектора добавленной стоимости на примере матрицы Леонтьева для семи отраслей.

1. Матрица Леонтьева и пример Михалевича. Рассмотрим экономику с n *чистыми* отраслями (*каждая отрасль производит один вид продукции и разные отрасли выпускают разную продукцию).* Пусть i, j – номера этих отраслей ($i, j = \overline{1, n}$). Обозначим a_{ij} величину прямых производственных затрат продукции отрасли i на изготовление единицы продукции отрасли j. (Эта величина может быть выражена как в натуральном, так и в стоимостном выражении). Матрица $A = \{a_{ij}\}$ называется матрицей Леонтьева (матрицей коэффициентов прямых затрат, матрицей технологических коэффициентов). Матрица A несет информацию о сложившейся структуре межотраслевых связей, описывает технологию работы всех отраслей с единичной интенсивностью.

Рассмотрим пример матрицы Леонтьева для семи отраслей:

$$A = \begin{pmatrix} 0.337 & 0.139 & 0.215 & 0.127 & 0.146 & 0.112 & 0.1960 \\ 0.023 & 0.251 & 0.179 & 0.089 & 0.019 & 0.131 & 0.0050 \\ 0.163 & 0.176 & 0.191 & 0.097 & 0.103 & 0.095 & 0.0870 \\ 0.012 & 0.009 & 0.157 & 0.031 & 0.029 & 0.026 & 0.0940 \\ 0.009 & 0.010 & 0.008 & 0.226 & 0.107 & 0.006 & 0.0071 \\ 0.153 & 0.121 & 0.099 & 0.031 & 0.025 & 0.019 & 0.0330 \\ 0.161 & 0.193 & 0.103 & 0.101 & 0.095 & 0.087 & 0.0910 \end{pmatrix}, \quad (1)$$

построенной М.В. Михалевичем на основе межотраслевого баланса Украины 2007 года с целью проведения тестовых расчетов для моделей структурно-технологических изменений в энергоемких отраслях. Результаты расчетов описаны в [3].

2. Балансовые соотношения в моделях Леонтьева. Пусть y_i и x_i – соответственно вектор потребления и валовый выпуск *i*-й отрасли. Эти величины связаны уравнением межотраслевого баланса:

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + y_i, \quad i = \overline{1,n}. \quad (2)$$

В матричной форме система уравнений (2) имеет вид:

$$x = Ax + y \quad \text{или} \quad y = (I - A)x, \quad (3)$$

где $x = (x_1, \ldots, x_n)^T$ – вектор валового выпуска и $y = (y_1, \ldots, y_n)^T$ – вектор конечного продукта, I – единичная $n \times n$-матрица. Здесь и везде далее T – символ траспонирования. Здесь выражение Ax интерпретируется как затраты, в силу чего модель Леонтьева на основе (3) получила название "затраты-выпуск".

Пусть p_i – цена единицы продукта отрасли i, а c_i – добавочная стоимость (чистый доход от единицы выпуска) в отрасли i. Эти величины связаны уравнением межотраслевого баланса для цен:

$$p_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ji} p_j + c_i, \quad i = \overline{1,n}. \quad (4)$$

В матричной форме система уравнений (4) имеет вид:

$$p = A^T p + c \quad \text{или} \quad c = (I - A^T)p, \quad (5)$$

где $p = (p_1, \ldots, p_n)^T$ – вектор цен единичных продуктов отраслей, $c = (c_1, \ldots, c_n)^T$ – вектор чистого дохода на единицу выпуска. Здесь выражение

$A^T p$ интерпретируется как вектор суммы издержек на единицу выпуска.

Система (5) называется двойственной к системе (3). Обе системы связывает следующее равенство:

$$p^T y = p^T (I - A)x = \left((I - A^T)p\right)^T x = c^T x. \tag{6}$$

Соотношения (3), (5) и вытекающее из них равенство (6) положены в основу так называемых статических моделей Леонтьева.

3. Статические модели Леонтьева и их свойства. Статическая модель Леонтьева "затраты-выпуск" имеет следующую форму:

$$y = (I - A)x, \quad x \geq 0, \tag{7}$$

где A – известная матрица Леонтьева, y – известный вектор спроса, x – неизвестный вектор выпуска.

Наличие неотрицательного решения у системы (7) при любом векторе спроса означает, что экономика, согласно модели Леонтьева, является продуктивной. Неотрицательная матрица A – продуктивна, если существует обратная $(I - A)^{-1}$, состоящая только из неотрицательных элементов. Пусть $\lambda_{max}(A)$ – максимальное по модулю собственное число матрицы A. Справедлива следующая теорема.

Теорема 1 [6]. Матрица A продуктивна тогда и только тогда, когда $\lambda_{max}(A) < 1$.

Если матрица A – продуктивна, то при любом векторе $y \geq 0$ система (7) имеет решение и это решение определяется по формуле

$$x = (I - A)^{-1} y. \tag{8}$$

Матрицу $A^* = (I - A)^{-1}$ называют *матрицей полных затрат*. Ее можно представить в форме

$$A^* = I + A + A^2 + \ldots \tag{9}$$

Теорема 1 фактически означает необходимые и достаточные условия сходимости ряда $I + A + A^2 + \ldots$ к матрице $A^* = (I - A)^{-1}$.

Статическая двойственная модель Леонтьева имеет следующий вид:

$$c = (I - A^T)p, \quad p \geq 0, \tag{10}$$

где A – известная матрица Леонтьева, c – известный вектор добавленной стоимости (чистый доход от единицы выпуска), p – неизвестный вектор цен.

Если система (10) при любом $c \geq 0$ имеет неотрицательное решение $p = (p_1, \ldots, p_n)^T$, то двойственная модель Леонтьева называется прибыльной. Прибыльность этой модели обеспечивает теорема 1. Свойство прибыльности является двойственным к понятию продуктивности модели (7) в том смысле, что выполнение одного из свойств влечет справедливость другого. Действительно, если неотрицательная матрица $A^* = (I - A)^{-1}$ существует, то отсюда следует и существование неотрицательной матрицы $(I - A^T)^{-1} = \left((I - A)^{-1}\right)^T = (A^*)^T$.

Прямая (7) и двойственная (9) модели Леонтьева, либо их аналоги в форме неравенств, являются основой ряда оптимизационных задач, используемых для моделирования экономических процессов.

4. Задача с использованием обеих моделей Леонтьева. Пусть вектор $y \geq 0$ задает не конечный спрос, а лишь его структуру. Положим $\|y\| = 1$, где $\|\cdot\|$ – евклидова норма вектора. Аналогично и для вектора добавленной стоимости $c \geq 0$ будем предполагать, что $\|c\| = 1$. Рассмотрим задачу нелинейного программирования в следующей постановке:

$$\max_{p,y} p^T y = \max_{x,c} c^T x \tag{11}$$

при ограничениях

$$y = (I - A)x, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0, \tag{12}$$

$$c = (I - A^T)p, \quad p \geq 0, \quad c \geq 0, \tag{13}$$

$$\|y\| = 1, \quad \|c\| = 1, \tag{14}$$

где неизвестными являются компоненты векторов x, y, p и c. Задача (11)–(14) состоит в нахождении таких пропорций между структурой конечного спроса и структурой добавленной стоимости, чтобы максимума достигала некоторая величина, которая с точностью до некоторого множителя равняется валовому национальному выпуску.

Задача (11)–(14) является задачей нелинейного программирования. Нелинейны в ней целевая функция (11), выражающая связь между прямой и двойственной моделями Леонтьева, и ограничения (14), связанные с нормировками вектора конечного спроса и вектора добавленной стоимости. Однако, если матрица

A – продуктивна и максимальное собственное число матрицы $\tilde{A} = A^*(A^*)^T$ единственное, то задача (11)–(14) имеет единственное решение, обозначим его x^*, y^*, p^*, c^*. В действительности, для продуктивной матрицы Леонтьева A имеем неотрицательную матрицу полных затрат $A^* = (I - A)^{-1}$, следствием чего есть неотрицательность компонент вектора $x = A^* y$ при любых $y \geq 0$ и неотрицательность компонент вектора $p = (A^*)^T c$ при любых $c \geq 0$. С учетом этого задачу (11)–(14) для продуктивной матрицы A можно переписать в следующем виде:

$$\max_{y,c} c^T A^* y \tag{15}$$

при ограничениях

$$\sum_{i=1}^{n} y_i^2 = 1, \quad y \geq 0, \quad \sum_{i=1}^{n} c_i^2 = 1, \quad c \geq 0, \tag{16}$$

где ограничения (14) переформулированы в форме двух квадратичных равенств.

При неотрицательной неособенной матрице A^* такой, что $\tilde{A}$ имеет единственное максимальное собственное число, задача (15), (16) имеет единственное решение: y^* и c^*. Более того, эта задача решается аналитически при фиксации только одного из векторов, либо c, либо y. В этих случаях она сводится к задаче максимизации линейной функции при единственном квадратичном ограничении-равенстве, что позволяет найти такое аналитическое решение. С учетом последнего обстоятельства можно построить итеративный алгоритм для нахождения единственного решения задачи (15), (16), а значит и задачи (11)–(14). При этом последовательно решаются две задачи – задача при фиксированных переменных y, затем задача при фиксированных переменных c (входом для нее служит оптимальное решение первой задачи). Решение второй задачи служит входом для первой задачи и процесс повторяется. Такой итерационный метод оказывается строго монотонным по значению целевой функции (15) и сходится к единственному решению задачи (15), (16), т. е. к векторам y^* и c^*. Далее, рассчитывая $x^* = A^* y^*$ и $p^* = (A^*)^T c^*$, получаем полное решение задачи (11)–(14).

Приведем пример расчета оптимальной структуры добавленной стоимости и конечного спроса для матрицы A, заданной (1). Для нее $\lambda_{max}(A) = 0.75374$ строго меньше единицы; это означает, что матрица A – продуктивна.

Матрице A соответствует следующая матрица полных затрат:

$$A^* = \begin{pmatrix} 2.1022 & 0.9089 & 1.0487 & 0.6874 & 0.5911 & 0.5428 & 0.6541 \\ 0.3319 & 1.6425 & 0.5823 & 0.3285 & 0.1962 & 0.3399 & 0.1842 \\ 0.6504 & 0.7036 & 1.7547 & 0.4682 & 0.3899 & 0.3864 & 0.3775 \\ 0.2072 & 0.2201 & 0.3777 & 1.1778 & 0.1467 & 0.1404 & 0.2101 \\ 0.0910 & 0.0979 & 0.1362 & 0.3180 & 1.1727 & 0.0591 & 0.0774 \\ 0.4633 & 0.4472 & 0.4483 & 0.2549 & 0.2020 & 1.2026 & 0.2169 \\ 0.5934 & 0.6669 & 0.6073 & 0.4330 & 0.3487 & 0.3490 & 1.3500 \end{pmatrix},$$

для которой максимальное собственное число A€ равно 18.105 и является единственным. Следующее за ним собственное число равно 1.65.

Соответствующие матрице A^* оптимальные векторы y^*, x^*, c^* и p^* приведены в таблице.

ТАБЛИЦА

y^*	$\overline{y}^*$	x^*	$\overline{x}^*$	c^*	$\overline{c}^*$	p^*	$\overline{p}^*$
0.5017	19.75	2.6629	25.85	0.6258	25.85	2.1347	19.75
0.4451	17.52	1.4762	14.33	0.3469	14.33	1.8939	17.52
0.4965	19.55	1.9571	19.00	0.4599	19.00	2.1124	19.55
0.3001	11.82	0.8770	8.51	0.2061	8.51	1.2771	11.82
0.2325	9.15	0.5638	5.47	0.1325	5.47	0.9894	9.15
0.2660	10.47	1.1621	11.28	0.2731	11.28	1.1320	10.47
0.2980	11.73	1.6022	15.55	0.3766	15.55	1.2680	11.73

Здесь наряду с оптимальной структурой для каждого из векторов дано процентное распределение, которое вычислено по одной и той же формуле для каждого из векторов, например, для вектора y^* – по формуле $\overline{y}_i^* = (y_i^* / \sum_{i=1}^{n} y_i^*)100$ и т. д. Из таблицы легко видеть, что одно и то же процентное соотношение характеризует пары векторов y^* и p^*, x^* и c^*. Это свойство выполняется в силу того, что оптимальное решение задачи (15), (16) удовлетворяет условию $c^* \sim A^* y^*$.

В заключение отметим, что с помощью задач нелинейного программирования, которые получены на основе расширения модели вида (11)–(14) за счет неизвестных компонент матрицы A (матрицы прямых затрат), можно промоделировать процессы структурно-технологических изменений в экономике.

П.І. Стецюк, Л.Б. Кошлай, О.В. Пилиповський

ПРО ЗАДАЧУ ОПТИМАЛЬНОГО СПІВВІДНОШЕННЯ МІЖ ПОПИТОМ ТА ДОБАВЛЕНОЮ ВАРТІСТЮ У МОДЕЛЯХ ЛЕОНТЬЄВА

Запропоновано математичну модель для дослідження зв'язку між структурою попиту та доданої вартості в статичних моделях Леонтьєва. Модель сформульована у формі задачі нелінійного програмування з двома квадратичними обмеженнями-рівностями. Показано, що задача має єдиний розв'язок. Розроблено ітераційний алгоритм знаходження цього розв'язку та наведено тестові розрахунки для 7-галузевого балансу з технологічною матрицею, яку побудував М.В. Михалевич.

P.I. Stetsyuk, L.B. Koshlai, O.V. Pylypovskyi

ON THE PROBLEM OF OPTIMAL CORRELATION BETWEEN DEMAND AND THE ADDED COST IN LEONTEV'S MODELS

The mathematical model for investigation of connection between structure of demand and the added cost in static Leontev's models is suggested. The model is formulated in the form of problem of nonlinear programming with two square restrictions-equalities. It is shown, that the problem has the unique solution. The iterative algorithm of finding of such solution is developed and test calculations for 7-branch balance with technological matrix constructed by M.V.Mikhalevich are given.

1. *Леонтьев В.В.* Избранные произведения. Том 1–3. – М.: Изд-во "Экономика", 2006. – 2008.
2. *Михалевич М.В., Сергиенко И.В.* Моделирование переходной экономики. Модели, методы, информационные технологии. – Киев: Наук. думка, 2005. – 670 с.
3. *Сергиенко И.В., Михалевич М.В., Стецюк П.И., Кошлай Л.Б.* Модели и информационные технологии для поддержки принятия решений при проведении структурно-технологических преобразований // Кибернетика и системный анализ. – 2009. – № 2. – С. 26–49.
4. *Бортис Г.* Институции, поведение и экономическая теория. Вклад в классико-кейнсианскую политическую экономию. – Киев: Изд. дом "'Києво-Могилянська академія"', 2009. – 598 с.
5. *Bortis H.* Keynes and the Classics: Notes on the Monetary Theory of Production, in: Modern Theories of Money. The Nature and Role of Money in Capitalist Economies, Rochon L.-P. and Sergio Rossi (eds.). – 2003. – Edward Elgar: UK, USA. – P. 411–474.
6. *Ашманов С.А.* Введение в математическую экономику. – М.: Наука, 1984. – 296 с.

Получено 12.05.2010