

## **К вопросу об исследовании колебаний нелинейной механической системы, моделирующей тело с трещиной**

**А. П. Бовсуновский**

Институт проблем прочности НАН Украины, Киев, Украина

*Представлены результаты численного исследования вынужденных и затухающих колебаний механической системы с билинейной восстанавливающей силой, моделирующей закрывающуюся трещину. Наиболее чувствительными из исследованных вибрационных характеристик повреждения являются уровень нелинейных искажений и относительные амплитуды волны перемещения, скорости и ускорения при супер- и субрезонансных колебаниях. Вместе с тем показано, что эти характеристики существенно зависят от уровня демпфирования колебаний в системе.*

**Ключевые слова:** резонансные колебания, нелинейная система, демпфирование.

**Введение.** Известно, что многие характеристики колебаний тела существенно изменяются при возникновении повреждения и поэтому могут использоваться для его диагностики. Вибрационные методы обнаружения повреждения, относящиеся к классу неразрушающих, интенсивно разрабатываются в настоящее время, поскольку они относительно просто реализуются и достаточно надежны.

Ранее [1] для исследования влияния повреждения типа закрывающейся трещины на степень нелинейных искажений формы волны перемещения при резонансных и затухающих колебаниях была использована механическая колебательная система с кусочно-линейной жесткостью. Вместе с тем необходимо отметить, что указанная система позволяет исследовать более широкий класс вибрационных характеристик повреждения (ВХП).

Для регистрации вибраций широко применяются датчики ускорения (акселерометры). Высокая чувствительность и помехоустойчивость, разнообразие типов и условий эксплуатации [2] делают их удобным, а в ряде случаев и единственно пригодным инструментом регистрации колебаний различных систем. Так, Ройстон и Синх [3], используя акселерометры при исследовании поперечных колебаний стержня с локальной нелинейностью жесткости, моделирующей трещину, показали, что оценка нелинейных искажений формы волны ускорения – перспективна для диагностики повреждения [4].

В работах [4, 5] установлено, что при колебаниях стержня с закрывающейся трещиной возникают суб- и супергармонические резонансные колебания, которые отчетливо обнаруживаются даже при относительно малой глубине трещины. Факт появления указанных режимов колебаний, а также уровень нелинейных искажений волны ускорения при супергармонических резонансах рассматриваются в качестве диагностического признака повреждения. В работе [6] была получена аналитическая зависимость между глубиной закрывающейся трещины и второй гармоникой колебаний стержня при супергармоническом резонансе второго порядка.

В работе [7] методом гармонического баланса найдено аналитическое решение задачи о колебаниях существенно нелинейных механических систем с кусочно-линейной характеристикой восстанавливающей силы и показана возможность возникновения супергармонических режимов колебаний таких систем.

Цель настоящей работы – исследование на модели тела с закрывающейся трещиной закономерностей проявления нелинейных искажений формы волны перемещения, скорости и ускорения, возникновения суб- и супергармонических резонансных колебаний при различных уровнях демпфирования, а также сравнительный анализ чувствительности различных ВХП к наличию трещины. (Понятие волны в данном случае обозначает процесс колебаний какой-либо величины, представленный в виде функции от времени.)

**Модель тела с трещиной.** Рассматриваются колебания механической системы с одной степенью свободы, моделирующей тело с закрывающейся трещиной при заданной форме колебаний, описываемые дифференциальным уравнением вида

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\alpha_m \frac{dx}{dt} \left| \frac{dx}{dt} \right|^{m-1} + \frac{\omega^2}{C} R_{\mp}(x) = q_0 \sin pt. \quad (1)$$

Здесь  $\alpha_m$  – коэффициент вязкого трения;  $\omega$  – собственная угловая частота колебаний тела без трения;  $q_0$  – амплитуда вынуждающей силы, приходящаяся на единицу обобщенной массы;  $R_{\mp}(x)$  – восстанавливающая сила:

$$R_{\mp}(x) = \begin{cases} C_0 x \pm \frac{\nu}{n} [(x_0 \mp x)^n - 2^{n-1} x_0^n]; & x \geq 0; \\ Cx \pm \frac{\nu}{n} [(x_0 \mp x)^n - 2^{n-1} x_0^n]; & x < 0, \end{cases} \quad (2)$$

где  $C$  – обобщенная жесткость системы, моделирующей тело без трещины или на полуцикле колебаний, когда трещина закрыта;  $C_0$  – обобщенная жесткость системы, моделирующей тело на полуцикле колебаний, когда трещина открыта;  $x_0$  – амплитуда колебаний;  $\nu$  и  $n$  – параметры обобщенной петли гистерезиса. Уравнения (2) описывают нисходящую ( $R_-$ ) и восходящую ( $R_+$ ) ветви петли гистерезиса [8]. (Заметим, что приведенное в работе [1] уравнение (1) записано неточно, его следует читать как уравнение (1) в данной статье).

На рис. 1 представлена модель тела с закрывающейся трещиной и характеристика восстанавливающей силы без учета гистерезисного трения ( $\nu = 0$ ). Как видно,  $C_1 = C - C_0$ .

Аналитическое решение уравнения (1) можно получить лишь в некоторых простых случаях. Например, при свободных колебаниях системы ( $q_0 = 0$ ) без демпфирования и с билинейной восстанавливающей силой форма волны перемещения может быть выражена в виде ряда Фурье:

$$x = \frac{a_0^d}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^d \cos k\omega_T t + b_k^d \sin k\omega_T t), \quad (3)$$

коэффициенты которого в этом случае определяются несложными формулами через отношения частот  $\omega$ ,  $\omega_0$  и  $\omega_T$  колебаний системы, моделирующей тело без трещины, с открытой и закрывающейся трещиной соответственно [9].

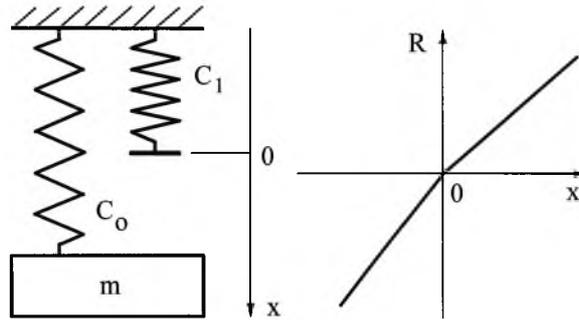


Рис. 1. Модель тела с трещиной.

Если применить к анализу формы волны скорости и ускорения подход, аналогичный использованному в [9], то нетрудно получить соотношения между коэффициентами ряда Фурье для волны перемещения и соответствующими коэффициентами для волны скорости и ускорения (амплитуды высших гармоник отнесены к амплитуде первой гармоники  $b_1$ , поскольку, как и в [1], принято, что колебательный процесс задается функцией синус):

$$a_0^v/a_1^v = 0; \quad a_k^v/a_1^v = k(b_k^d/b_1^d); \quad b_k^v/a_1^v = -k(a_k^d/b_1^d); \quad (4)$$

$$a_0^a/b_1^a = 0; \quad a_k^a/b_1^a = k^2(a_k^d/b_1^d); \quad b_k^a/b_1^a = k^2(b_k^d/b_1^d). \quad (5)$$

Такой же результат можно получить при дифференцировании по времени ряда (3). В формулах (3)–(5) и далее индексы  $d$ ,  $v$  и  $a$  обозначают соответственно перемещение, скорость и ускорение. Заметим, что в соотношениях (4) и (5) коэффициенты высших гармоник отнесены к амплитуде основной гармоники данной волны.

Анализ соотношений (4) и (5) показывает, что относительные амплитуды высших гармоник волны скорости в  $k$  раз, а волны ускорения в  $k^2$  раза превышают при прочих равных условиях относительные амплитуды соответствующих высших гармоник волны перемещения и, следовательно, являются более чувствительными к наличию повреждения. В то же время волны скорости и ускорения характеризуются отсутствием асимметрии цикла, которая, как показали исследования [1], существенно проявляется для волны перемещения.

В общем случае, когда рассматриваются вынужденные колебания системы с восстанавливающей силой вида (2), уравнение (1) решали численно методом усреднения по ускорению [10], который позволяет строить затухающий или установившийся колебательный процесс системы при различных законах вынуждающей и восстанавливающей силы и видах демпфирования [1].

Отношения жесткостей колебательной системы  $C_o / C$  при соответствующих значениях относительной длины трещины  $a / h$  ( $a$  – длина трещины,  $h$  – высота поперечного сечения образца) взяты из работы [1] и приведены в табл. 1.

Т а б л и ц а 1

Относительные частоты резонансных, суб- и суперрезонансных колебаний системы, моделирующей тело с закрывающейся трещиной ( $m = 1, \delta_a = 5,0\%, \nu = 0$ )

$a/h$	$C_o/C$	Порядок резонанса					
		4/1	3/1	2/1	3/2	1/1	1/2
0	1,000	–	–	–	–	0,9999	–
0,095	0,984	0,2505	–	0,4955	–	0,9959	–
0,200	0,965	0,2488	–	0,4941	–	0,9910	–
0,305	0,946	0,2473	0,3261	0,4926	–	0,9861	1,9713
0,390	0,919	0,2451	0,3236	0,4890	–	0,9788	1,9567
0,505	0,825	0,2387	0,3164	0,4758	–	0,9519	1,9024
0,600	0,723	0,2311	0,3068	0,4595	0,6122	0,9189	1,8369

Наряду с представлением ряда Фурье в виде (3) используется и другой вид записи этого ряда:

$$x = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin(k\omega_{\tau} t + \varphi_k), \quad (6)$$

где  $A_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}$ ;  $\varphi_k = \arctg \frac{a_k}{b_k}$ .

Для анализа степени нелинейных искажений формы волны скорости и ускорения использовали так называемый коэффициент гармоник

$$K = \frac{1}{A_1} \sum_{k=2}^N A_k, \quad (7)$$

который определяли с помощью представления ряда Фурье в виде (6) и который отличался от коэффициента нелинейных искажений (клирфактора) [11, 12] бóльшей чувствительностью к уровню нелинейных искажений исследуемой функции. При вычислении коэффициента гармоник ограни-

чивались определением амплитуд 20 гармоник ( $N = 20$ ), поскольку амплитуды более высоких гармоник малы. Так, отличие коэффициентов гармоник  $K_a^{N=20}$  и  $K_a^{N=30}$  при всех исследованных режимах колебаний не превышало 0,5%.

**Результаты расчетов.** Резонансные колебания системы с билинейной восстанавливающей силой. Фурье-анализ волн скорости и ускорения выполняли при резонансных колебаниях системы с билинейной восстанавливающей силой, моделирующей закрывающуюся трещину, и линейным вязким трением ( $m = 1$ ,  $\delta_a = 15,1\%$ ,  $\nu = 0$ ;  $\delta_a$  – декремент колебаний в системе с вязким трением). На рис. 2 помимо наиболее значимых из указанных характеристик обусловленного повреждением искажения формы волны приведены также отношения периодов  $T_0 / T$  полуциклов, когда трещина открыта и закрыта, и относительные амплитуды гармоник  $a_0^d / b_1^d$  и  $a_2^d / b_1^d$  для волны перемещения [1]. Как видно, наиболее существенно изменяется величина  $a_0^d / b_1^d$  (кривая 2), характеризующая асимметрию цикла волны перемещения. Асимметрия цикла волн скорости и ускорения при резонансных колебаниях отсутствует.

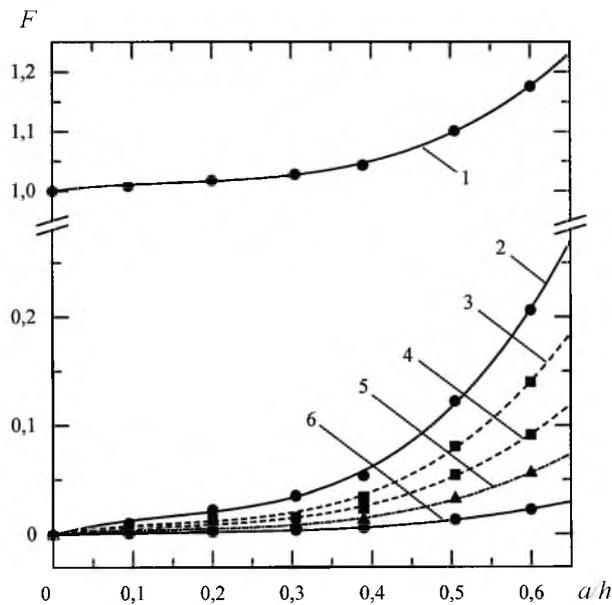


Рис. 2. Зависимость ВХП от относительной длины трещины при резонансных колебаниях системы, моделирующей тело с закрывающейся трещиной: 1 –  $F = T_0 / T$ ; 2 –  $F = a_0^d / b_1^d$ ; 3 –  $F = K_a$ ; 4 –  $F = a_2^d / b_1^d$ ; 5 –  $F = K_v$ ; 6 –  $F = a_2^d / b_1^d$ . (Здесь и на рис. 3–9: сплошные линии – аппроксимационные кривые результатов расчетов для волны перемещения; штриховые и штрихпунктирные – для волны скорости и волны ускорения соответственно.)

Более существенно по сравнению с другими ВХП изменяется коэффициент гармоник для волны ускорения  $K_a$  (кривая 3). Коэффициент гармоник для волны скорости  $K_v$  по чувствительности к повреждению занимает промежуточное положение между коэффициентом гармоник для волны ускорения и перемещения. Заметим, что зависимость последнего от относитель-

ной длины трещины практически не отличается от кривой 6 для  $a_2^d/b_1^d$  и поэтому не показана. Проявление высших гармоник при анализе нелинейных искажений волны ускорения более значительно, чем скорости и перемещения. Этот вывод следует из сопоставления кривых 3 и 5, 4 и 6 и подтверждает справедливость соотношений (4) и (5). Зависимости отношения  $T_0/T$  для всех видов волн идентичны.

*Затухающие колебания системы с гистерезисным трением.* На рис. 3 приведены некоторые ВХП при затухающих колебаниях системы, моделирующей тело с закрывающейся трещиной ( $q_0 = 0$ ). Для определения той или иной ВХП выполнялся гармонический анализ одного из первых циклов затухающего колебательного процесса. При исследовании определялось также отношение первого и второго полупериодов  $T_1/T_2$  цикла затухающих колебаний. Расчет проводился для колебательной системы с несимметричным гистерезисным трением ( $C_0/C = \text{var}, \nu = 0,001, n = 2, \alpha = 0$ ) при относительно небольшом уровне логарифмического декремента колебаний системы:  $0,13 \leq \delta_\nu \leq 0,18\%$  ( $\delta_\nu$  – декремент колебаний системы с гистерезисным трением).

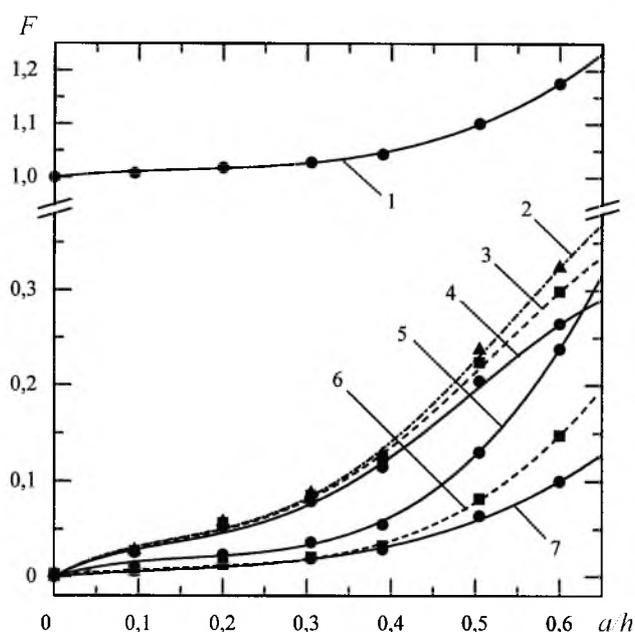


Рис. 3. Зависимость ВХП от относительной длины трещины при затухающих колебаниях системы, моделирующей тело с закрывающейся трещиной при гистерезисном трении ( $\delta_\nu = 0,13 \dots 0,18\%$ ): 1 –  $F = T_1/T_2$ ; 2 –  $F = K_\nu$ ; 3 –  $F = K_a$ ; 4 –  $F = K_d$ ; 5 –  $F = a_0^d/b_1^d$ ; 6 –  $F = b_2^a/b_1^a$ ; 7 –  $F = b_2^d/b_1^d$ .

Как видно, при относительно низком уровне демпфирования колебаний в системе с увеличением относительной длины трещины весьма заметно изменяются все представленные функции, однако наиболее значительно – коэффициенты гармоник  $K_\nu$ ,  $K_a$  и  $K_d$  (кривые 2, 3, 4). Эти характеристики близки между собой, а в области малых трещин – практически одина-

ковы. Асимметрия цикла затухающей волны перемещения (кривая 5) не проявляется в такой же степени, как при резонансных колебаниях. Соотношение между нулевым коэффициентом  $a_0^d/b_1^d$  (кривая 5) и амплитудой второй гармоники для волны перемещения  $b_2^d/b_1^d$  (кривая 7) приблизительно такое же, как и при резонансных колебаниях, равно как и соотношение между амплитудами второй гармоники для волны ускорения  $b_2^a/b_1^a$  (кривая 6), скорости (зависимость занимает промежуточное положение между кривыми 6 и 7 и не приведена на рис. 3) и перемещения (кривая 7). Зависимости отношения  $T_1/T_2$  от относительной длины трещины совпадают для волны перемещения и ускорения, а для волны скорости это отношение не зависит от длины трещины ( $T_1/T_2 = 1$ ). Асимметрии циклов затухающих процессов скорости и ускорения практически одинаковы между собой и на 2-3 порядка ниже уровня асимметрии цикла перемещения.

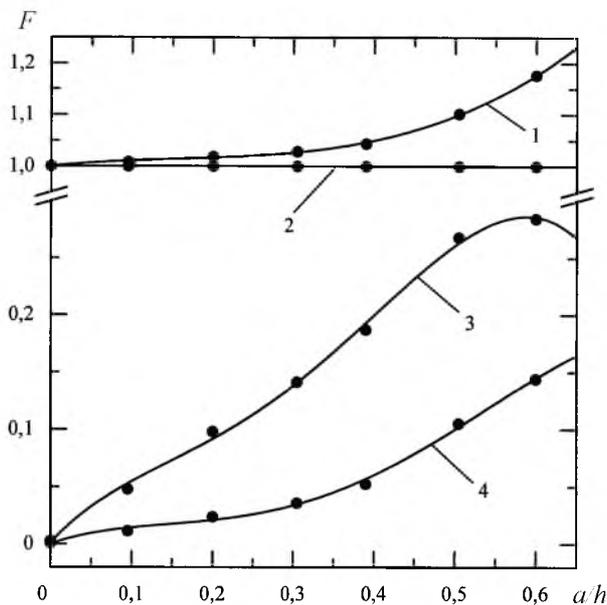


Рис. 4. Зависимость ВХП от относительной длины трещины при затухающих колебаниях системы, моделирующей тело с открытой трещиной при гистерезисном трении ( $\delta_v = 0,13... 0,18\%$ ,  $\alpha_m = 0$ ): 1 -  $F = T_0/T$ ; 2 -  $F = T_1/T_2$ ; 3 -  $F = K$ ; 4 -  $F = A_2/A_1$ .

Гармонический анализ формы волны при резонансных колебаниях не выявляет открытую трещину, так как колебательная система с такой трещиной остается линейной. Ранее [1] высказывалось предположение о перспективности использования для ее обнаружения анализа нелинейных искажений цикла свободных затухающих колебаний. С целью проверки этого предположения выполнены исследования колебательной системы, жесткость которой на обоих полуциклах колебаний принималась равной  $C_0$ . На рис. 4 приведены некоторые наиболее значимые в этом случае ВХП. Заметим, что для всех видов волн соответствующие зависимости абсолютно идентичны. Как видно, весьма существенно, особенно в области малых трещин, изме-

няется коэффициент гармоник (кривая 3), несколько меньше – амплитуда второй гармоники (кривая 4). Таким образом, для обнаружения открытых трещин можно эффективно использовать анализ нелинейных искажений затухающего колебательного процесса. В случае открытой трещины асимметрия цикла всех видов волн имеет один и тот же порядок и прямо зависит от уровня демпфирования колебаний в системе, однако ее величина на 2-3 порядка ниже амплитуды второй гармоники при  $\nu = 0,001$  (в нашем случае это соответствовало уровню логарифмического декремента колебаний  $\delta_\nu = 0,15\%$ ). В отличие от системы с закрывающейся трещиной отношение  $T_1/T_2 = 1$  для всех видов волн.

*Амплитудно-частотная характеристика системы с билинейной восстанавливающей силой.* Колебательная система с билинейной восстанавливающей силой и линейным вязким трением трех уровней ( $\delta_a = 5,0; 15,1$  и  $46,5\%$ ) использовалась для построения амплитудно-частотных характеристик (АЧХ) системы при одной и той же амплитуде вынуждающей силы. На рис. 5 приведены АЧХ системы с наибольшей относительной длиной трещины ( $C_o/C = 0,723$ ). Коэффициент динамичности  $\beta$  для перемещения определяли как отношение амплитуды установившихся вынужденных колебаний поврежденной системы к статическому отклонению неповрежденной системы. На АЧХ системы с наименьшим уровнем демпфирования (рис. 5,а) обнаруживается субрезонанс порядка 1/2 и суперрезонансы порядка 2/1, 3/1...7/1. При этом, как видно из табл. 1, прочерки в которой означают, что при данной относительной длине трещины супер- или субгармонические колебания системы не проявляются, суперрезонансы порядка 4/1 и 2/1 возникают при наименьших исследованных отношениях жесткости  $C_o/C$ . Специальные исследования показали, что суперрезонанс порядка 2/1 проявляется даже при  $C_o/C = 0,999$  ( $\delta_a = 5,0\%$ ), что соответствует в данном случае относительной длине трещины  $a/h = 0,005$ . В то же время суперрезонансы порядка 3/1, 3/2 и субрезонанс порядка 1/2 можно обнаружить только при значительной нелинейности колебательной системы.

По мере роста демпфирующей способности системы суперрезонанс порядка 3/2 исчезает (рис. 5,б), а при очень большом демпфировании – исчезает также субрезонанс порядка 1/2 (рис. 5,в). Как видно, амплитуда основного резонанса значительно выше амплитуд супер- и субрезонансов. Поэтому на практике повышение надежности определения супер- и субрезонансов может быть достигнуто за счет увеличения мощности возбуждения колебаний по сравнению с необходимой для возбуждения колебаний системы на основном резонансе.

Таким образом, возникновение супер- и субрезонансов в билинейной колебательной системе может служить качественным признаком повреждения. Количественная оценка параметров повреждения в условиях изменения диссипативных свойств системы представляет собой более сложную задачу.

Рассмотрим некоторые характеристики повреждения, связанные с анализом АЧХ, которые можно использовать для его диагностирования. Одной из таких характеристик является уровень нелинейных искажений волны перемещения, скорости и ускорения при супер- или субрезонансных коле-

баниях системы. Для каждого отношения жесткостей  $C_0/C$  и уровня демпфирования существует свой набор частот резонансных, супер- и субрезонансных колебаний системы (табл. 1), при которых выполнялся анализ нелинейных искажений формы волны.

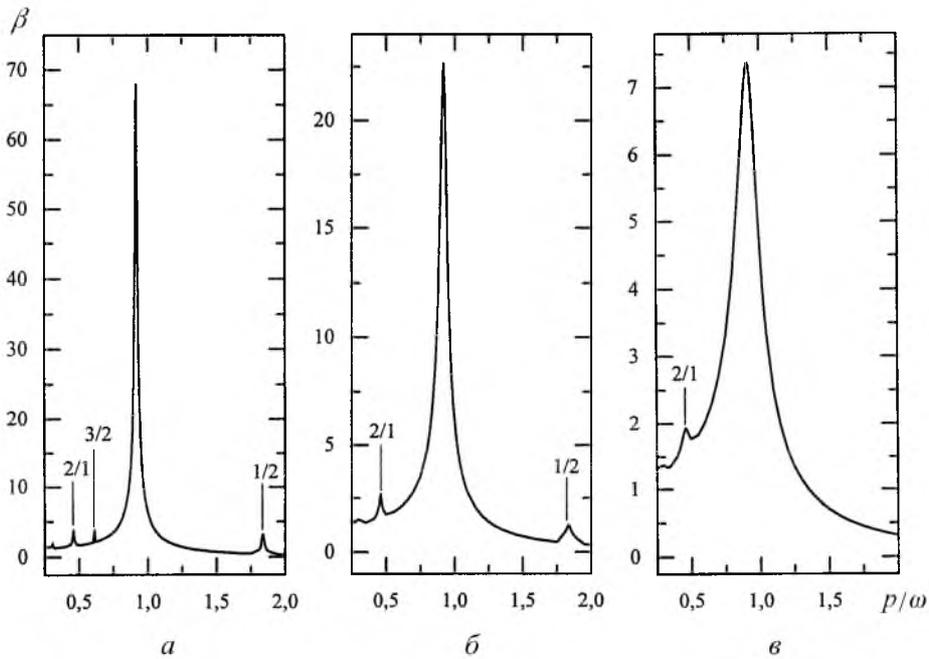


Рис. 5. Зависимость коэффициента динамичности от относительной частоты вынуждающей силы для перемещения колебательной системы, моделирующей тело с закрывающейся трещиной при вязком трении ( $C_0/C = 0,723$ ,  $m = 1$ ,  $\nu = 0$ ): а -  $\delta_a = 5,0\%$ ; б -  $\delta_a = 15,1\%$ ; в -  $\delta_a = 46,5\%$ .

Исследования показали, что уровень нелинейных искажений рассматриваемых видов волн при супер- и субрезонансных колебаниях системы значительно превышает аналогичный уровень при резонансных колебаниях системы. Рис. 6 иллюстрирует степень искаженности волны перемещения и ускорения при суперрезонансе порядка 2/1 на фоне гармонической вынуждающей силы. Из рисунка следует, что искажение формы волны ускорения гораздо значительнее, чем перемещения. Это подтверждается результатами численного гармонического анализа формы указанных видов волн. Так, на рис. 7 приведены относительные амплитуды второй гармоники разложения в ряд Фурье вида (6) волн ускорения и перемещения при суперрезонансных порядка 2/1 (при  $\delta_a = 5,0$  и  $15,1\%$ ) и субрезонансных порядка 1/2 (при  $\delta_a = 5,0\%$ ) колебаниях. Относительная амплитуда второй гармоники волн ускорения при суперрезонансных колебаниях значительно превышает такую волну перемещения (кривые 1 и 3, 2 и 4).

Анализ результатов расчетов показал, что уровень нелинейных искажений формы волны скорости ниже, чем ускорения, но выше, чем перемещения, и что изменение коэффициентов гармоник соответствующих видов волн качественно аналогично изменению амплитуд вторых гармоник, одна-

ко степень этого изменения несколько выше: при суперрезонансных колебаниях – в среднем на 25%, при субрезонансных – приблизительно в 4,9 раза (при  $\delta_a = 5,0\%$ ).

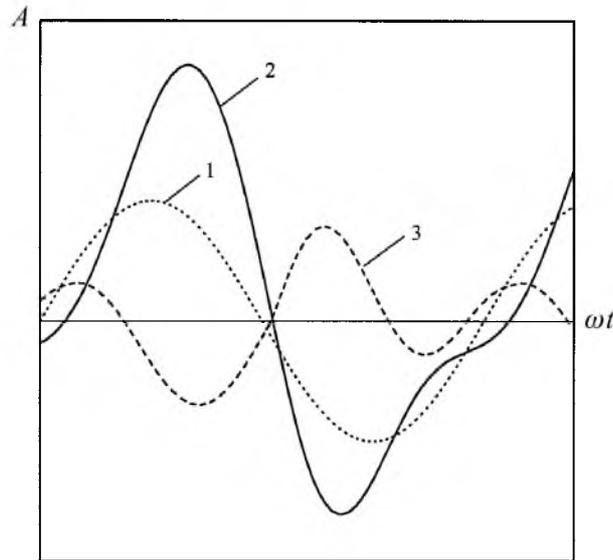


Рис. 6. Форма волны вынуждающей силы (1), перемещения (2) и ускорения (3) при суперрезонансных колебаниях системы порядка 2/1:  $C_0/C = 0,723$ ;  $m = 1$ ;  $\delta_a = 46,5\%$ ;  $\nu = 0$ .

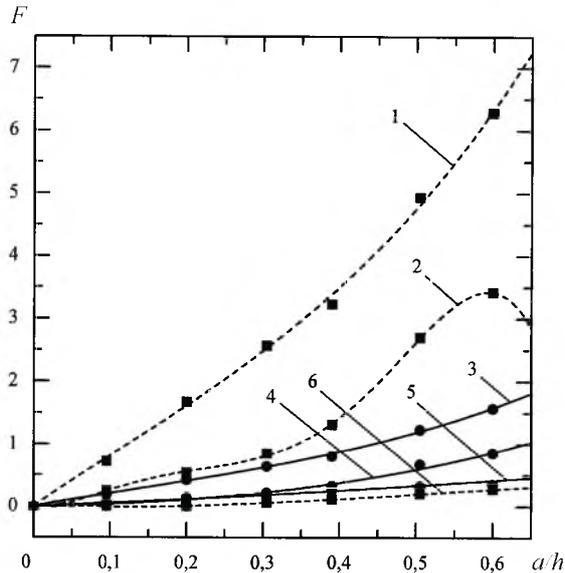


Рис. 7. Зависимость ВХП от относительной длины трещины при супер- и субрезонансных колебаниях системы, моделирующей тело с закрывающейся трещиной при вязком трении ( $m = 1$ ,  $\nu = 0$ ): 1 –  $F = A_2^a / A_1^a$  (суперрезонанс порядка 2/1,  $\delta_a = 5,0\%$ ); 2 –  $F = A_2^a / A_1^a$  (суперрезонанс порядка 2/1,  $\delta_a = 15,1\%$ ); 3 –  $F = A_2^d / A_1^d$  (суперрезонанс порядка 2/1,  $\delta_a = 5,0\%$ ); 4 –  $F = A_2^d / A_1^d$  (суперрезонанс порядка 2/1,  $\delta_a = 15,1\%$ ); 5 –  $F = A_2^d / A_1^d$  (субрезонанс порядка 1/2,  $\delta_a = 5,0\%$ ); 6 –  $F = A_2^a / A_1^a$  (субрезонанс порядка 1/2,  $\delta_a = 5,0\%$ ).

Искажение формы волны при субрезонансных колебаниях системы незначительное по сравнению с суперрезонансными колебаниями (кривые 1 и 6, 3 и 5). Сопоставление кривых 1 и 2, 3 и 4 показывает, что с увеличением уровня демпфирования колебаний в системе в значительной мере снижается чувствительность вибрационных характеристик к повреждению. Таким образом, если при росте трещины рассеяние энергии в колебательной системе существенно изменяется (возможность увеличения демпфирования колебаний образцов более чем на порядок при росте усталостной трещины показана в [13, 14]), то задача количественной оценки параметров повреждения становится дважды неопределенной: исследуемая характеристика повреждения в этом случае зависит как от соотношения жесткостей на полуциклах колебания, так и от уровня демпфирования колебаний в системе. В этом случае количественная оценка параметров повреждения осложняется, однако сохраняется возможность качественной диагностики, весьма чувствительной даже при относительно высоком уровне демпфирования.

Ранее [1] исследовалось влияние точности настройки на резонансную частоту колебательной системы с билинейной восстанавливающей силой ( $C_0/C = 0,723$ ,  $m = 1$ ,  $\delta_a = 15,1\%$ ,  $\nu = 0$ ) на уровень нелинейных искажений волны перемещения: при отклонении от резонанса на  $\pm 2\%$  падение амплитуды колебаний достигало 27%, а изменение асимметрии цикла и амплитуды второй гармоники – соответственно 1,2 и 5,4%. В то же время точность настройки этой же системы на суперрезонанс порядка 2/1 играет более существенную роль, поскольку при отклонении от частоты суперрезонанса на  $\pm 2\%$  коэффициенты гармоник для волны перемещения и ускорения уменьшаются на 30,3 и 29,7% при падении амплитуд волн на 17,9 и 29,5% соответственно.

Суть еще одной предлагаемой ВХП заключается в сопоставлении амплитуд супер- или субрезонансных колебаний поврежденной системы с амплитудой колебаний системы без повреждения на той же частоте и при том же уровне возбуждения. Обозначим амплитуду волны при суперрезонансных колебаниях порядка 2/1 через  $A_s^{(2/1)}$ , а амплитуду колебаний той же системы без повреждения на частоте этого суперрезонанса – через  $A^{(2/1)}$ . Тогда предлагаемая характеристика имеет вид

$$S^{(2/1)} = \frac{A_s^{(2/1)}}{A^{(2/1)}}. \quad (8)$$

На рис. 8 представлены наиболее чувствительные в этом случае ВХП (данные для волны скорости занимают промежуточное положение и не приведены). Наиболее существенно изменяется амплитуда волны ускорения при суперрезонансных колебаниях порядка 2/1 (кривая 1). Значительно слабее изменяется эта характеристика для перемещения. Интересно отметить, что чувствительность данной ВХП, а также коэффициента гармоник для волны ускорения при суперрезонансных колебаниях порядка 4/1 несколько выше, чем при суперрезонансных колебаниях порядка 2/1 (табл. 2).

Т а б л и ц а 2

Коэффициенты гармоник и относительные амплитуды волн перемещения и ускорения при суб- и суперрезонансных колебаниях системы ( $C_0/C = 0,723$ ,  $m = 1$ ,  $\delta_a = 5,0\%$ ,  $\nu = 0$ )

Порядок резонанса ( $n/n$ )	$p/\omega$	$K_d$	$K_a$	$S_d^{(n/n)}$	$S_a^{(n/n)}$
5/1	0,1848	0,4851	10,8449	1,4242	8,8857
4/1	0,2311	0,6571	10,3666	1,6108	9,1250
3/1	0,3068	0,7187	6,2285	1,7917	6,4615
2/1	0,4595	1,6808	7,8674	2,9732	9,0970
3/2	0,6122	1,4169	2,4688	2,3477	3,8397
1/1	0,9189	0,0254	0,1399	—	—
1/2	1,8369	1,7323	1,2853	7,5582	2,3983

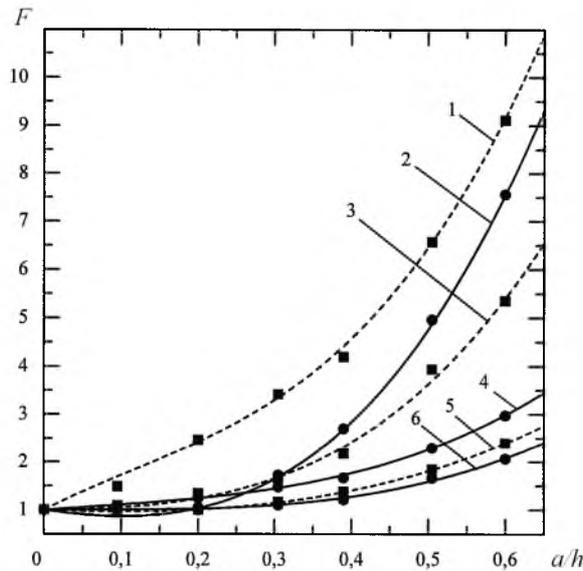


Рис. 8. Зависимость ВХП от относительной длины трещины при супер- и субрезонансных колебаниях системы, моделирующей тело с закрывающейся трещиной при вязком трении ( $m = 1, \nu = 0$ ): 1 –  $F = S_a^{(2/1)}$  ( $\delta_a = 5,0\%$ ); 2 –  $F = S_d^{(1/2)}$  ( $\delta_a = 5,0\%$ ); 3 –  $F = S_a^{(2/1)}$  ( $\delta_a = 15,1\%$ ); 4 –  $F = S_d^{(2/1)}$  ( $\delta_a = 5,0\%$ ); 5 –  $F = S_a^{(1/2)}$  ( $\delta_a = 5,0\%$ ); 6 –  $F = S_d^{(2/1)}$  ( $\delta_a = 15,1\%$ ).

Данные, приведенные в табл. 2, позволяют сопоставить степень нелинейных искажений и относительные амплитуды волн перемещения и ускорения при суб- и суперрезонансных колебаниях системы. Как видно, несмотря на различную динамику изменения представленных характеристик для волн перемещения и ускорения, практически все они являются весьма значимыми.

Чувствительность данной ВХП, как и коэффициента гармоник, для всех видов волн существенно зависит от уровня демпфирования (на рис. 8 кривые 1 и 3, 4 и 6).

Субгармонический резонанс порядка 1/2 (волна перемещения,  $\delta_a = 5,0\%$ ) наблюдается при относительной длине трещины  $a/h \geq 0,3$ . В то же время при  $a/h < 0,3$  субрезонансный пик не выявляется, т.е.  $S_d^{(1/2)} = 1$ . Это означает, что данная характеристика абсолютно нечувствительна к малым и средним трещинам (классификация трещин приведена ниже).

**Сравнительный анализ чувствительности ВХП.** Под чувствительностью ВХП подразумевается мера изменения функции, отражающей зависимость соответствующей вибрационной характеристики от величины повреждения. Как и в [1], в качестве такой меры использовалась скорость изменения функции, а сравнительный анализ эффективности представленных ВХП выполнялся на основании сопоставления скоростей изменения соответствующих функций.

Рис. 9 иллюстрирует зависимость скорости изменения наиболее чувствительных ВХП от относительной длины трещины. Весь исследованный диапазон длин трещин условно разделен на область малых ( $a/h \leq 0,15$ ), средних ( $0,15 < a/h \leq 0,4$ ) и больших ( $a/h > 0,4$ ) трещин.

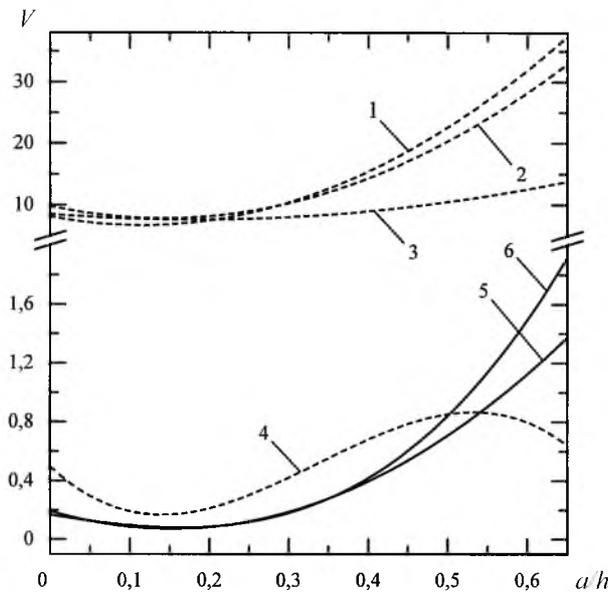


Рис. 9. Зависимость скорости изменения ВХП от относительной длины трещины: 1 –  $V = S_a^{(2/1)}$  ( $\delta_a = 5,0\%$ ); 2 –  $V = K_a^{(2/1)}$  ( $\delta_a = 5,0\%$ ); 3 –  $V = A_2^a / A_1^a$  (суперрезонанс порядка 2/1,  $\delta_a = 5,0\%$ ); 4 –  $V = K_a$  ( $\delta_v = 0,13...0,18\%$ , затухающие колебания, закрывающаяся трещина); 5 –  $V = a_0^d / b_1^d$  ( $\delta_a = 15,1\%$ , резонансные колебания, закрывающаяся трещина); 6 –  $V = a_0^d / b_1^d$  ( $\delta_v = 0,13...0,18\%$ , затухающие колебания, закрывающаяся трещина).

Наиболее общий вывод, который следует из анализа результатов численных исследований колебательной системы, моделирующей тело с закрывающейся трещиной, заключается в том, что уровень нелинейных искажений и относительные амплитуды волны перемещения, скорости и ускорения при супер- и субрезонансных колебаниях являются весьма чувствительными как к повреждению, так и к уровню демпфирования в системе. Наиболее

перспективна для использования в качестве ВХП – волна ускорения (кривые 1–3) при суперрезонансных колебаниях системы. Недостаток ВХП – их существенная зависимость от уровня демпфирования колебаний в системе.

Как видно, в области малых трещин чувствительность ВХП практически одинакова. В то же время она приблизительно на два порядка превышает наиболее значимые ВХП, связанные с анализом формы волны перемещения, скорости и ускорения при резонансных и затухающих колебаниях системы. В области средних и больших трещин скорости изменения функций, связывающих относительную длину трещины с коэффициентом гармоник  $K_a$  (кривая 2) и с относительной амплитудой волны ускорения (кривая 1) при суперрезонансных колебаниях порядка 2/1, близки между собой и значительно превышают скорости изменения других рассмотренных ВХП.

## Резюме

Представлено результати чисельного дослідження вимушених і затухаючих коливань механічної системи з білінійною відновлювальною силою, яка моделює тріщину, що закривається. Найбільш чутливими з досліджуваних вібраційних характеристик пошкодження є рівень нелінійних спотворень і відносні амплітуди хвилі переміщення, швидкості і прискорення при супер- і субрезонансних коливаннях. Разом із тим ці характеристики суттєво залежать від рівня демпфірування коливань у системі.

1. Бовсуновский А. П. Численное исследование колебаний нелинейной механической системы, моделирующей тело с трещиной // Пробл. прочности. – 1999. – № 6. – С. 65 – 80.
2. *Sound & Vibration Catalogue 1997.* – Denmark: Brüel & Kjær, 1997. – 151 p.
3. Royston T. J. and Singh R. Experimental study of a mechanical system containing a local continuous stiffness non-linearity under periodic excitation and a static load // J. Sound Vibration. – 1996. – No. 3. – P. 279 – 298.
4. Цыфанский С. Л., Бересневич В. И., Магоне М. А. Вибродиагностика усталостных трещин в несущих поверхностях летательных аппаратов на основе использования нелинейных эффектов // Дефектоскопия. – 1993. – № 2. – С. 87 – 94.
5. Цыфанский С. Л., Магоне М. А., Ожиганов В. М. Об использовании нелинейных эффектов для обнаружения трещин в стержневых элементах конструкций // Там же. – 1985. – № 3. – С. 77 – 85.
6. Плахтиенко Н. П., Ясинский С. А. О резонансе второго порядка при колебаниях балки, содержащей поперечную трещину // Пробл. прочности. – 1995. – № 3. – С. 56 – 63.
7. Крюков Б. И. Вынужденные колебания существенно нелинейных систем. – М.: Машиностроение, 1984. – 216 с.

8. Давиденков Н. Н. Обзор. О рассеянии энергии при вибрациях // Журн. техн. физики. – 1938. – 8, вып. 6. – С. 483 – 499.
9. Ройтман А. Б., Пылов А. А., Александрова Н. Б. Продольные колебания консольного стержня с поперечной трещиной. Сообщ. 1. Малые колебания // Пробл. прочности. – 1999. – № 2. – С. 23 – 34.
10. Тимошенко С. П., Янг Д. Х., Уивер У. Колебания в инженерном деле. – М.: Машиностроение, 1985. – 472 с.
11. Справочник по радиоэлектронным устройствам: В 2 т. Т. 1 / Под ред. Д. П. Линде. – М.: Энергия, 1978. – 440 с.
12. Андронов А. А., Витт А. А., Хайкин С. Э. Теория колебаний. – М.: Наука, 1981. – 568 с.
13. Rytter A., Brincker R., and Kirkegaard P. H. An experimental study of the modal parameters of a damaged cantilever // Fracture and Dynamics, Paper No. 37, Dept. of Building Technology and Structural Engineering, University of Aalborg, Oct., 1992. – 76 p.
14. Бовсуновский А. П., Матвеев В. В. Сравнительная экспериментальная оценка чувствительности некоторых вибрационных индикаторов усталостного повреждения стержневых элементов // Вибрации в технике и технологиях. – 1999. – № 1 (10). – С. 15 – 21.

Поступила 31. 05. 2000