

Групповые подходы при расчете на колебания и статическое деформирование стержней и дисков

А. Г. Трапезон

Институт проблем прочности НАН Украины, Киев, Украина

Описан комплекс новых методов построения аналитических решений задач о колебаниях или статическом деформировании упругих тел (стержней, дисков, пластинок), которые моделируются дифференциальными уравнениями второго порядка с переменными коэффициентами. Методы базируются на групповых подходах, в основу которых положены симметрии дифференциальных уравнений. Приведены примеры аналитического расчета продольных колебаний стержней, крутильных колебаний дисков, изгиба круглых пластинок, осесимметричного растяжения дисков для тех случаев переменных характеристик, при которых эти расчеты не могут быть выполнены традиционными аналитическими приемами.

Ключевые слова: колебания, статическое деформирование упругих тел, аналитический расчет, группы преобразований, переменная жесткость.

Обозначения

w, w_1, w_2, \dots	– функции перемещений
F, F_1, F_2, \dots	– переменные коэффициенты дифференциальных уравнений
k	– собственные числа задач о колебаниях
V, V_1, V_2, \dots	– переменные параметры преобразований
$A, B, C, C_1, C_2, \dots, F_0, D_0, h_0$	– постоянные коэффициенты
n, m	– заданные параметры, или порядковые номера функций и постоянных интегрирования
D, D_1, D_2, \dots	– диаметры стержней переменного поперечного сечения
l	– длина стержня
ω	– круговая частота собственных колебаний, $\omega = 2\pi f$
f	– частота собственных колебаний
ρ	– плотность
E	– модуль Юнга
G	– модуль сдвига
ν	– коэффициент Пуассона, $0 < \nu < 0,5$
H	– толщина диска или пластинки
R	– наружный радиус диска или пластинки
q	– распределенная нагрузка
t	– температура
Ω	– угловая скорость вращения диска
штрихи – дифференцирование по переменной x	

Введение. Методы, основу которых составляют групповые преобразования (групповые методы) [1], имеют фундаментальный характер и поэтому пригодны для анализа или решения широкого круга прикладных задач механики. Для подтверждения данного положения ниже описан комплекс групповых подходов, основанных на симметриях дифференциальных уравнений второго порядка с переменными коэффициентами. С помощью созданного аналитического аппарата строятся решения задач о колебаниях или статическом деформировании упругих тел (стержни, диски, пластинки) с переменными характеристиками. Приведены схемы аналитического расчета продольных либо крутильных колебаний стержней, крутильных колебаний дисков, изгиба круглых пластинок и осесимметричного растяжения дисков для тех случаев переменных характеристик (жесткости, толщины), при которых эти расчеты не могут быть выполнены традиционными аналитическими приемами.

Теория. Новые методы базируются на идее, связанной с целесообразным использованием инвариантности дифференциальных уравнений по отношению к специально построенным группам преобразований. Следствием реализации свойства инвариантности (свойства симметрий дифференциальных уравнений [2]) является возможность получения точных решений этих уравнений и соответствующих прикладных задач, если найдены их симметрии.

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$(Fw')' + k^2 Fw = 0. \quad (1)$$

С помощью уравнений такого типа описываются формы свободных (собственных) продольных или крутильных колебаний стержня [3], решаются задачи о продольном ударе [4], о крутильных колебаниях диска [3, 5], задачи теплопроводности [6], электродинамики [7] и др. [3, 6, 8]. Если ввести соотношения

$$w_1 = Fw'; \quad F_1 = 1/F, \quad (2)$$

то (1) преобразуется в аналогичное уравнение:

$$(F_1 w_1')' + k^2 F_1 w_1 = 0. \quad (3)$$

Очевидно, что при использовании группы преобразований (2) обеспечивается инвариантность уравнений (1) и (3) и, следовательно, реализуются их симметрии.

С помощью группы (2) можно точно решить уравнение (3), если известно точное решение (1). В нашем случае решение уравнения (3) непосредственно определяется первым из выражений (2) при замене в нем F на $1/F_1$ согласно второму из выражений этой группы. В соответствии с данным подходом, названным нами методом обратной функции, из известного решения w уравнения с заданным переменным коэффициентом F сразу же строится решение w_1 аналогичного уравнения с переменным коэффициентом F_1 , обратным заданному.

Чтобы расширить число случаев точного решения уравнения (1), разработан иной способ инвариантного преобразования, который получил здесь название метода линейно независимой функции. Так, если положить

$$F_1 = FV^2; \quad w_1 = w/V; \tag{4}$$

$$V = \int \frac{dx}{F} + \text{const}, \tag{5}$$

то после введения (4) в уравнение (1) опять-таки получится уравнение в форме (3), не отличающееся от (1). Решение w_1 полученного уравнения, выраженное через решение w исходного уравнения (1), определяется вторым выражением группы преобразований (4). Это решение справедливо для случая, когда переменный коэффициент F_1 выражен через коэффициент F исходного уравнения по первой формуле группы (4). Поскольку из анализа этой формулы следует линейная независимость между F и F_1 , выражаемая функциональным определителем типа вронскиана, то название метода вызвано именно этим обстоятельством.

Далее установлено, что последовательное чередование преобразований по двум описанным методам приводит к бесконечной последовательности циклов однотипных совмещенных преобразований исходного уравнения (1), так как каждая из появляющихся при этом функций F_m ($m=1, 2, 3, \dots$) остается линейно независимой от всех предыдущих функций F_{m-1} . Основанный на данном положении метод, названный нами методом циклических преобразований, удобно представить в виде перечня компактных зависимостей, иллюстрирующих ход и последовательность соответствующих преобразований уравнения (1). Если рассматривать функции w и F как известные (заданные) параметры уравнения (1), а w_n и F_n – как искомые параметры уравнений того же типа:

$$(F_n w'_n)' + k^2 F_n w_n = 0, \tag{6}$$

то для ряда номеров n этот перечень можно записать в виде

$$\begin{cases} F, & w; \\ F_1 = 1/F, & w_1 = Fw'; \\ F_2 = F_1 V_1^2, & w_2 = w_1 / V_1, \quad V_1 = \int \frac{dx}{F_1} + C_1; \\ F_3 = 1/F_2, & w_3 = F_2 w'_2; \\ F_4 = F_3 V_3^2, & w_4 = w_3 / V_3, \quad V_3 = \int \frac{dx}{F_3} + C_3, \dots \end{cases} \tag{7}$$

или символически при $n = m$ и $n = m + 1$ соответственно –

$$\begin{cases} F_m = 1/F_{m-1}, & w_m = F_{m-1}w_{m-1}; \\ F_{m+1} = F_m \left(\int \frac{dx}{F_m} + C_m \right)^2, & w_{m+1} = w_m / \left(\int \frac{dx}{F_m} + C_m \right). \end{cases} \quad (8)$$

Используя взаимозависимость между перечисленными функциями с различными номерами, результаты (7) или (8) легко выразить через исходные параметры F и w . Характерные примеры таких выражений были приведены ранее в работе [9].

Схемы и результаты реализации методов. Рассмотрим примеры избранных задач механики и приведем результаты применения изложенной теории к практическим расчетам.

1. При изучении продольных колебаний стержней переменной площади поперечного сечения F из уравнения (1) и граничных условий находятся собственные частоты и определяются формы колебаний, рассчитываются циклические напряжения и устанавливается их распределение вдоль продольной оси стержня. Известно, что уравнение (1) имеет решения в табулированных функциях в сравнительно редких случаях, представленных простейшими функциями F , например при $F = \text{const}$, e^{mx} , x^n , $\sin^2 nx$, $\cos^2 nx$, $\text{sh}^2 nx$, $\text{ch}^2 nx$ и др.

В данном случае наша цель – проиллюстрировать схему расширения этого ряда с помощью описанной теории. На основе метода обратной функции можно сразу же указать на новые случаи, а именно: $F = 1/\sin^2 nx$, $1/\cos^2 nx$, $1/\text{sh}^2 nx$, $1/\text{ch}^2 nx$, для которых легко найти решения уравнения (1). Посредством метода циклических преобразований число аналогичных результатов можно увеличить произвольно, используя в качестве исходной любую из перечисленных функций F . Если, например, в перечне (7) положить $F = F_0 e^{2mx}$, то полученное разрешающее уравнение для w будет уравнением с постоянными коэффициентами, и поэтому общее его решение имеет вид

$$w = e^{-mx} R, \quad (9)$$

где

$$R = A \cos \lambda x + B \sin \lambda x; \quad \lambda^2 = k^2 - m^2; \quad k = \omega l \sqrt{\rho/E} > m.$$

С помощью (7) и выбранного значения F , легко получить новый профиль, содержащий, например, одну произвольную постоянную C_1 :

$$F = F_0 (e^{-mx} + C_1 e^{mx})^2, \quad (10)$$

а также соответствующее этому профилю решение (индексы 2 при F_2 и w_2 опущены):

$$w = R / (e^{-mx} + C_1 e^{mx}). \quad (11)$$

Если в (10) последовательно положить $C_1 = (0; +1; -1)$, то получим соответственно $F = F_0(e^{-2mx}; \operatorname{ch}^2 mx; \operatorname{sh}^2 mx)$, что указывает на органическую связь между решениями задач для считающихся самостоятельными случаев отмеченных профилей. При $F = F_0 \operatorname{ch}^2 mx$ из (11) при $C = 1$ получим $w = R / D$, где $D = D_0 \operatorname{ch} mx$ – диаметр круглого стержня, изменяющийся по катеноиде. Этот вариант изменения D часто используют при конструировании ультразвуковых концентраторов [10], применяемых во многих отраслях науки, в медицине, в промышленном производстве. Полагая этот случай изменения F исходным, с помощью (7) можно, например, образовать набор целого ряда следующих новых результатов:

$$\left\{ \begin{array}{l} F = F_0 \operatorname{ch}^2 mx; \quad w = R / \operatorname{ch} mx; \\ F_1 = F_{01} / \operatorname{ch}^2 mx; \quad w_1 = R' \operatorname{ch} mx - m \operatorname{sh} mx R = \operatorname{ch} mx (R / \operatorname{ch} mx)'; \\ F_2 = F_{02} [(\operatorname{ch} mx \operatorname{sh} mx + mx + C_1) / \operatorname{ch} mx]^2; \quad w_2 = R \cos mx / (\operatorname{ch} mx \operatorname{sh} mx + \\ \quad + mx + C_1); \\ F_3 = 1 / F_2; \quad w_3 = w_2' [(\operatorname{ch} mx \operatorname{sh} mx + mx + C_1) / \operatorname{ch} mx]^2; \\ F_4 = F_{04} \{ \operatorname{ch} mx [\operatorname{ch} mx \operatorname{sh} mx + 2(mx + C_1)^2 \operatorname{th} mx - \\ \quad - mx + C_3] / (\operatorname{ch} mx \operatorname{sh} mx + mx + C_1) \}; \quad w_4 = w_3 (F_3 / F_4)^{1/2}; \\ F_5 = 1 / F_4; \quad w_5 = F_4 w_4' \quad \text{и т.д.} \end{array} \right. \quad (12)$$

Заметим, что в работе [9] приведены примеры построения F_n и w_n на основе порождающей функции $F = x^2$, так что семейство результатов типа (12) при необходимости можно существенно расширить хотя бы за счет содержащихся в ней.

При рассмотрении колебаний свободного стержня (рисунок, а) катеноидального профиля $D = D_0 \operatorname{ch} mx$ из уравнения (1) и граничных условий при $x = 0$ и $x = 1$ (x отнесен к длине стержня), имеющих вид

$$w'(0) = w'(1) = 0, \quad (13)$$

получим форму колебаний

$$w = A \cos \lambda x / \operatorname{ch} mx \quad (14)$$

и уравнение частот

$$\lambda \operatorname{tg} \lambda + m \operatorname{th} m = 0. \quad (15)$$

Если диаметр стержня соответствует, например, площади F_3 , то из (12) получим профиль

$$D_3 = D_{03} \operatorname{ch} mx / (\operatorname{ch} mx \operatorname{sh} mx + mx + C_1), \quad (16)$$

для которого здесь же содержится решение уравнения (6), а именно:

$$w_3 = w'_2 D_2^2 = w'_2 [(ch mx sh mx + mx + C_1) / ch mx]^2. \quad (17)$$

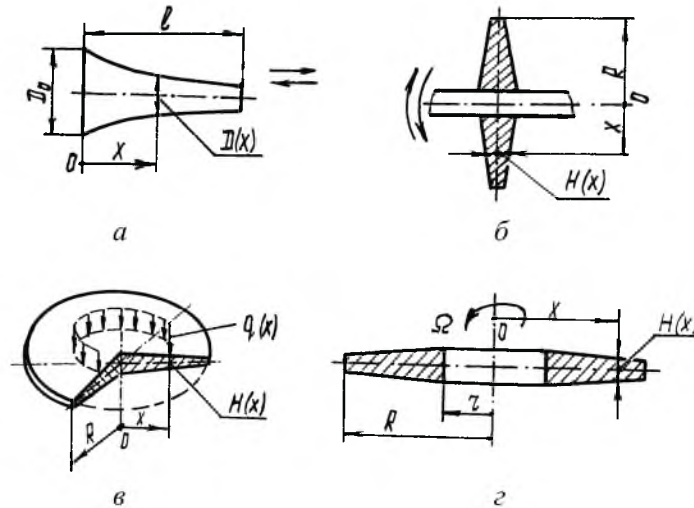
Поскольку, как легко убедиться, исходя из общих соотношений (6)–(8) в данном случае имеет место зависимость

$$w'_3 = (w'_2 F_2)' = -k^2 F_2 w_2 = -V_1 w', \quad (18)$$

граничные условия для стержня (16), записанные в виде

$$w'_3(0) = w'_3(1) = 0, \quad (19)$$

можно заменить условиями (13), справедливыми для катеноидального стержня.



Схемы к задачам о продольных колебаниях стержня (а), крутильных колебаниях диска (б), а также об осесимметричном изгибе (в) и растяжении (г) круглой пластинки

Благодаря этому уравнение частот (15), верное для катеноиды, будет оставаться справедливым также для стержня (16), поэтому независимо от значений постоянной C_1 частоты собственных колебаний обоих типов стержней будут совпадать, если равны их длины и параметр m . Формы колебаний для стержней (16) легко строятся по зависимости, полученной из (17), если в ней w'_2 выразить через w в виде (14), заранее удовлетворяющем условиям (13) и (19):

$$w_3 = -(k^2 V_1 w + V_1' w') = -(k^2 V_1 w + F w'). \quad (20)$$

Для ультразвуковых концентраторов перемещений практическое значение имеет такая характеристика, как коэффициент усиления колебаний, пред-

ставляющий собой отношение амплитуд на свободных концах. Поскольку для вышерассмотренной катеноиды $D(1) > D(0)$, из (14) следует усиление

$$w(0) / w(1) = D(1) / D(0) \cos \lambda.$$

Для стержней (16) на основании (12) и (20) отношение амплитуд на свободных концах выразится аналогично:

$$w_3(0) / w_3(1) = D_3(1) / D_3(0) \cos \lambda. \quad (21)$$

Однако вопрос о том, какое усиление колебаний на основе (21) дают стержни (16), решается выбором коэффициента C_1 , которым будет определяться реальная конфигурация стержня (16). Так, в частности усиления практически не будет, если $D_3(1) = D_3(0)$, что возможно при $C_1 = (m + \operatorname{ch} m \operatorname{sh} m) / (\operatorname{ch} m - 1)$. Напряжения в сечениях рассмотренных стержней легко рассчитать по формуле $\sigma = Ew'$, если предварительно по приведенным выше соотношениям (14), (15), (18), (20) определены частоты, функции перемещения (формы колебаний) и их производные.

С учетом формальной аналогии между уравнениями продольных и крутильных колебаний стержня изложенные вопросы расчета можно распространить и на случай крутильных колебаний стержней [11].

2. На основании рассмотренных методов легко изучить вопрос о колебаниях жестко насаженного на вал вращающегося диска, толщина которого зависит от расстояния x до оси вращения (рисунок, б). Под влиянием изменения числа оборотов могут иметь место колебания кручения и растяжения в своей плоскости, которые связаны между собой [3, 5, 12]. Силы связи, однако, количественно малы по сравнению с обуславливающими колебания силами инерции, поэтому ими можно пренебречь и проводить расчет для невращающегося диска [5] без учета радиального растяжения. При намеренном возбуждении крутильных колебаний диска, что может иметь место при усталостных испытаниях дисков-образцов или моделей по схемам, характерным для усталостных испытаний стержней на кручение [11], отмеченные упрощения отпадают, и поэтому для обоих случаев математическая модель задачи остается единой. Для жестко насаженного на вал диска уравнение крутильных колебаний, вытекающее из более общей системы уравнений Граммеля, имеет вид [5, 12]

$$w'' + \left(\frac{H'}{H} + \frac{3}{x} \right) w' + k^2 w = 0, \quad (22)$$

где w – угловые перемещения элементов диска (собственные функции); x – радиальная координата, отнесенная к радиусу диска; $k = 2\pi f R \sqrt{\rho / G}$.

Введением функции

$$F = x^3 H \quad (23)$$

это уравнение непосредственно сводится к рассмотренному выше (1).

Для диска с отверстием радиуса r_0 , закрепленного на валу при $x = r_0 / R = \rho$ и свободного при $x = 1$ граничные условия таковы:

$$w(x = \rho) = w'(x = 1) = 0. \quad (24)$$

Настоящая задача полностью эквивалентна задаче о продольных колебаниях стержня, закрепленного при $x = \rho$ и свободного при $x = 1$, и поэтому результаты решения этих задач при граничных условиях типа (24) могут быть взаимно использованы при учете соотношения (23), формально связывающего площадь поперечного сечения стержня F и толщину диска H . Касательные напряжения в таких дисках рассчитываются по формуле

$$\tau = Gxw' = Exw' / 2(1 + \nu),$$

где x – координата, отсчитываемая, как отмечалось, от центра диска вдоль его радиуса.

Поскольку примеры непосредственного расчета дисков на основе групповых методов являются лишь техническим повторением выкладок, которые аналогичны приведенным для стержней, дальнейшее изложение в отношении дисков может быть ограничено данным замечанием.

Рассмотренные вопросы расчета колебаний упругих тел связаны с проблемой решения задач на собственные значения [3], в отличие от которых более простыми есть задачи статического деформирования, две из которых – изгиб и растяжение круглой пластинки переменной толщины – будут приведены в качестве иллюстрации применимости изложенной теории групповых методов и для подобного типа задач.

3. Круглые пластинки переменной толщины, подвергаемые изгибу, встречаются при проектировании таких деталей машин, как диафрагмы паровых турбин, поршни двигателей внутреннего сгорания и т.п. Толщина таких пластинок является функцией радиального расстояния, а действующая на них нагрузка – симметрична относительно центра пластинки (рисунков, в). Рассмотрим этот осесимметричный случай.

Дифференциальное уравнение изгиба, вывод которого приведен в [13], в наших обозначениях имеет вид

$$(Iw')' + Sw = -Px / H^3, \quad (25)$$

где $I = xH^3$; $S = H^3(3\nu H' / H - 1/x)$; $P = 6(1 - \nu^2)R^3q / EH_0^3$; $w = dy / dx$; y – прогиб пластинки; x – радиальная координата, отнесенная к радиусу R ($x = 0 \dots 1$); H_0 – толщина пластинки в центре, т.е. при $x = 0$.

Обозначив далее

$$w = xU; \quad H^3 = h; \quad \mu^2 = 1 + \nu \quad (1 < \mu < 1,5),$$

уравнение (25) запишем в форме

$$U'' + (hx^3)'U' / (hx^3) + \mu^2 h'U / xh = P / xh^2. \quad (26)$$

Для решения задачи необходимо проинтегрировать данное неоднородное уравнение таким образом, чтобы удовлетворить граничным условиям, которые в случае жесткого защемления пластинки выражаются соотношениями

$$y(1) = y'(1) = 0$$

или

$$\left(\int xU dx \right)_{x=1} = (U)_{x=1} = 0.$$

Частное решение неоднородного уравнения (26) можно найти стандартными методами, например методом вариации постоянных [14], если известны решения соответствующего однородного уравнения. Поэтому ограничимся рассмотрением схемы получения решения уравнения (26) без правой части, которое имеет вид

$$U'' + (hx^3)'U' / (hx^3) + \mu^2 h'U / xh = 0. \quad (27)$$

Введением новых переменных

$$U(x) = Z(\varphi), \quad \varphi = \int \left(\frac{h'}{xh} \right)^{1/2} dx \quad (28)$$

уравнение (27) преобразуется к изученному выше типу (1):

$$Z'' + \frac{F'}{F} Z' + \mu^2 Z = 0; \quad (29)$$

$$F = x^2 \frac{dh}{d\varphi}, \quad (30)$$

к которому непосредственно применимы описанные выше групповые методы.

Установив из (28) и (30) связь между F и h

$$\frac{dh}{d\varphi} = F / x^2 = FQ, \quad (31)$$

где Q определяется из уравнения

$$Q'' + \frac{F'}{F} Q' + 2Q = 0, \quad (32)$$

которое аналогично (29), получим автоматически $Q = Z (\mu^2 \rightarrow 2)$, а также значения h и x из (31), если только при заданном $F(\varphi)$ будет найдено решение уравнения (29). Например, по методу циклических преобразований с использованием схемы (7) при простейшем законе

$$F = F_0(e^{\varphi\sqrt{2}} - Ce^{-\varphi\sqrt{2}})^2$$

получим общее решение уравнения (29):

$$Z = F^{-1/2} \left(A \operatorname{ch} \sqrt{2 - \mu^2} \varphi + B \operatorname{sh} \sqrt{2 - \mu^2} \varphi \right). \quad (33)$$

Значение Q легко находим из (32) заменой в (33) μ^2 через 2, в результате чего имеем

$$Q = A(e^{\sqrt{2}\varphi} - Ce^{-\sqrt{2}\varphi})^{-1}.$$

Толщина пластинки

$$H = H_0(x^4 + C)^{1/6}, \quad (34)$$

и связь между переменными

$$\varphi\sqrt{2} = \ln \left(x^2 + \sqrt{x^4 + C} \right) \quad (35)$$

устанавливается согласно зависимости (31). Для толщины пластинки H (34) найдено решение уравнения (27) в виде (33), в котором остается только переменную φ заменить x согласно (35). Не составляет труда, присоединив к решению (33) какое-либо частное решение уравнения (26), удовлетворить граничным условиям и рассчитать напряжения, действующие на поверхности пластинки, по формулам [13]

$$\sigma_r = \frac{EH}{1-\nu^2} [xU' + (1+\nu)U]; \quad \sigma_t = \frac{EH}{1-\nu^2} [\nu xU' + (1+\nu)U],$$

где U – общее решение неоднородного уравнения (26).

4. Постановка задачи об осесимметричном растяжении пластинки переменной толщины возникает в связи с проектированием быстровращающихся деталей машин в виде дисков, маховиков. Подобные элементы должны обладать осевой симметрией (рисунок, *з*), поэтому в предположении, что внешние нагрузки и температурный нагрев зависят только от радиуса, а напряжения распределяются равномерно по толщине пластинки, дифференциальное уравнение для радиальных перемещений w будет иметь вид [15]

$$w'' + \frac{h'}{h} w' + \left(\frac{\nu h'}{xh} - \frac{\nu + 1}{x^2} \right) w = G. \quad (36)$$

Здесь

$$h = xHE / (1 - \nu^2); \quad G = \alpha t(1 - \nu)H' / H - \rho\Omega^2 x(1 - \nu^2) / E, \quad (37)$$

где x – радиальная координата, отнесенная к наружному радиусу пластинки R ; α – коэффициент линейного расширения. Точное решение данной задачи известно лишь в сравнительно небольшом ряде случаев [15]. Наша цель по-прежнему состоит в том, чтобы показать, каким образом можно расширить этот ряд. Ограничимся, как и в предыдущей задаче (п. 3), рассмотрением уравнения (36) без правой части, поскольку его частное решение находится элементарно [14], исходя из решения уравнения

$$w'' + \frac{h'}{h} w' + \frac{\nu}{x} \left(\frac{h'}{h} - \frac{\nu + 1}{\nu x} \right) w = 0, \quad (38)$$

для которого необходимо выбрать такие $h(x)$, при которых оно имело бы замкнутые решения.

По методу линейно независимой функции согласно (4) полагаем

$$w_1 = w / V, \quad (39)$$

откуда получим уравнение, аналогичное (38):

$$w_1'' + \frac{h_1'}{h_1} w_1' + \frac{\nu}{x} \left(\frac{h_1'}{h_1} - \frac{\nu + 1}{\nu x} \right) w_1 = 0, \quad (40)$$

если только удовлетворяются уравнения

$$2 \frac{V'}{V} + \frac{h'}{h} = \frac{h_1'}{h_1}; \quad (41)$$

$$\frac{V''}{V} + \frac{h'V'}{hV} + \frac{\nu}{x} \left(\frac{h'}{h} - \frac{\nu + 1}{\nu x} \right) = \frac{\nu}{x} \left(\frac{h_1'}{h_1} - \frac{\nu + 1}{\nu x} \right). \quad (42)$$

Из (41) и (42) следует

$$V = \int \frac{x^{2\nu}}{h} dx + C; \quad (43)$$

$$h_1 = h \left(\int \frac{x^{2\nu}}{h} dx + C \right)^2. \quad (44)$$

Таким образом, имеем уравнение (40) при $h_1(x)$, решение которого можно получить из соотношения (39), если известно решение уравнения (38) при $h(x)$. Например, если $H = x^{-n}$, то общее решение уравнения (38), имеющее здесь вид уравнения Эйлера [14], будет

$$w = C_1 x^{\mu_1} + C_2 x^{\mu_2}; \quad \mu_{1,2} = \frac{n}{2} \pm \sqrt{\frac{n^2}{4} + 1 + \nu n}.$$

В данном случае из (37) и (43) получим соответственно

$$h = \beta x^{1-n} [\beta = E / (1 - \nu^2)]; \quad V = (x^{2\nu+n} + C) / \beta H_0 (2\nu + n)$$

и, следовательно, согласно (44)

$$h_1 = h_{01} [x^{2\nu+(1+n)/2} + Cx^{(1-n)/2}]^2 \quad (H_1 = h_1 / \beta x). \quad (45)$$

Радиальное перемещение пластинки толщиной H_1 легко найти из выражения (39), присоединив к нему какое-либо решение неоднородного уравнения с правой частью G_1 , имеющей согласно (37) вид

$$G_1 = \alpha t (1 - \nu) H_1' / H_1 - \rho \Omega^2 x (1 - \nu^2) / E,$$

где в соответствии с (45)

$$H_1 = H_{01} (x^{2\nu+n/2} + Cx^{-n/2})^2 = H_{01} x^{-n} (x^{2\nu+n} + C)^2. \quad (46)$$

Постоянные интегрирования C_1 и C_2 , содержащиеся в общем решении, находятся из граничных условий, которые устанавливаются исходя из наличия или отсутствия радиальных напряжений на внешнем ($x=1$) контуре $\sigma_r(1) = \sigma_r(R)$ или на внутреннем ($x=r/R=x_0$) контуре $\sigma_r(x_0) = \sigma_r(r)$, где $\sigma_r(R)$, $\sigma_r(r)$ – заданные напряжения соответственно на внешнем (от действия центробежных сил) и внутреннем контуре. Например, при наличии прессовой посадки справедливо $\sigma_r(r) = -p$, где p – давление напрессовки в рабочем состоянии, если диск без посадки, то $\sigma_r(r) = 0$. В центре сплошного диска имеем $\sigma_r = \sigma_\theta$. Напряжения в диске связаны с перемещениями зависимостями [15]

$$\sigma_r = \frac{E}{1 - \nu^2} (w' + \nu w / x) - E \alpha t / (1 - \nu);$$

$$\sigma_\theta = \frac{E}{1 - \nu^2} (w / x + \nu w') - E \alpha t (1 - \nu).$$

Возвращаясь к соотношению (46), видим, что при $\nu = 1/3$ и $n = -4/3$ предельные значения толщины H_1 будут соответственно $H_1(0) = H_{01}$; $H_1(1) = H_{01}(1 + C)^2$. Таким образом, выбором значений постоянной C можно существенно разнообразить число реальных профилей, исходя лишь из единого выражения (46) и единого решения, что позволяет одновременно выбрать из них наиболее предпочтительный вариант.

Обсуждение результатов и выводы.

1. Рассмотренные методы, направленные на расширение банка точных решений ряда традиционных задач механики, имеют характерные отличия. Так, благодаря методу обратной функции, допускающему лишь однократное преобразование исходного уравнения, число решаемых аналитически однотипных задач удваивается.

2. Метод линейно независимой функции также ограничен однократным преобразованием, однако появление существенной постоянной C в выражении (4) для F_1 , для которого построены решения w_1 , равносильно порождению целого семейства новых функций $F_1(C)$, определяемых выбором значений указанной постоянной. В этом заключается принципиальное отличие данного метода от метода обратной функции, который вследствие ограничения, налагаемого на него единичным преобразованием (2), лишен подобной гибкости и поэтому изначально не может привести к дополнительному расширению числа новых результатов.

3. Что касается метода циклических преобразований, то из рассмотрения хода получения результатов (7) и (8), отражающих его суть, следует что каждому новому циклу преобразований, выполненному по изложенной схеме, всегда соответствует появление новой существенной постоянной C_m в выражении для F_{m+1} . Такое свойство преобразования позволяет построить переменные коэффициенты F_n уравнения (6) с произвольным числом постоянных, а именно, в количестве $n/2$ в рамках схемы (7), и при этом обеспечить его точное решение.

4. Приведенные в п. 1–4 показательные примеры расчета упругих тел, число которых всегда может быть расширено, дают ясное представление о прикладных возможностях групповых методов. Приложения методов, как следует из этих примеров, отличаются большим разнообразием при сохранении единого подхода в случае их реализации.

5. Принципиальным является различие между задачами на собственные значения (п. 1, 2) и задачами статического деформирования (п. 3, 4). В первом случае, прежде чем приступить к оценке напряженного состояния объекта расчета, необходимо найти из характеристического уравнения (в нашем случае из частотного уравнения) спектр собственных чисел (частот) и на основе этого – спектр собственных функций (в данном случае – форм колебаний). При рассмотрении задач, аналогичных приведенным в п. 3, 4, появляются дополнительные возможности для маневра при построении решений в случае проекторочных расчетов, поскольку здесь все коэффициенты дифференциальных уравнений, например типа μ^2 в уравнении (20) и др., полагаются заранее заданными либо свободно выбираемыми.

6. В этой связи применительно к задаче п. 3 уравнение (27) при, например, подстановке в него $U = V / (xh)^{1/2}$ преобразуется к виду

$$V'' - V(x^{1-2\nu} h' h^{-1/2})' / 2h^{1/2} x^{1-2\nu} = 0. \quad (47)$$

Из (47) при

$$x^{1-2\nu} h' h^{-1/2} = \text{const} \quad (48)$$

сразу же получается простое решение

$$V = C_1 x + C_2,$$

т.е.

$$U = (C_1 x + C_2) / (xh)^{1/2},$$

которое справедливо, если

$$H = H_0 (x^{2\nu} + \alpha)^{2/3},$$

что следует из (48). Таким образом, используемые в работе групповые методы имеют особую ценность именно для задач на собственные значения, для которых преобразования, подобные тем, что привели к результатам (47) и (48), неприменимы.

7. Уместно заметить, что в литературных источниках при решении задачи п. 2 рекомендуется выбирать профили диска в виде $H = H_0 x^{-n}$ [5], приводящие к решениям в бесселевых функциях в большинстве случаев n или в элементарных функциях при $n=1$ и $n=3$. Ф. Граммель задает толщину функцией $H = H_0 x^{-3} e^{\alpha x}$, что также приводит к элементарному решению. Отсюда, кстати, можно сделать вывод об особом внимании, которое уделяется случаям замкнутых решений задач на собственные значения, пусть даже эти случаи будут весьма редкими. С другой стороны, данное обстоятельство служит свидетельством практической значимости любых новых решений, полученных в замкнутой форме.

8. Совершенно очевидно, что методом циклических преобразований число замкнутых решений для задачи (п. 2) может быть увеличено произвольно, в принципе с произвольным запасом свободно варьируемых постоянных в выражении для толщины диска $H(x)$. Для этого необходимо лишь воспользоваться теоретическими результатами (6)–(8) и при желании их расширить.

9. Этот вывод можно полностью или частично отнести также к остальным задачам, решаемым на основе уравнений второго порядка, отдельные примеры которых и их обсуждение приведены выше.

Резюме

Описано комплекс нових методів побудови аналітичних розв'язків задач про коливання або статичне деформування пружних тіл (стрижнів, дисків, пластинок), що моделюються диференційними рівняннями другого порядку

зі змінними коефіцієнтами. Методи базуються на групових підходах, в основу яких покладено симетрії диференційних рівнянь. Наведено приклади аналітичного розрахунку поздовжніх коливань стрижнів, крутильних коливань дисків, згину круглих пластинок, вісесиметричного розтягнення дисків для тих випадків змінних характеристик, за яких ці розрахунки неможливо виконати традиційними аналітичними прийомами.

1. *Овсянников Л. В., Ибрагимов Н. Х.* Групповой анализ дифференциальных уравнений механики // Итоги науки и техники: Общая механика. – М.: ВИНТИ, 1975. – Т. 2. – С. 5 – 52.
2. *Collatz L.* Eigenwertaufgaben mit technischen Anwendungen. – Leipzig: Akademische Verlagsgesellschaft, 1963. – 504 s.
3. *Тимошенко С. П.* Курс теории упругости. – Киев: Наук. думка, 1972. – 508 с.
4. *Филитов А. П.* Колебания деформируемых систем. – М.: Машиностроение, 1970. – 736 с.
5. *Корнев Б. Г.* Некоторые задачи теории упругости и теплопроводности, решаемые в бесселевых функциях. – М.: Физматгиз, 1960. – 458 с.
6. *Timoshenko S. P. and Goodier J. N.* Theory of Elasticity, 3 edition. – New York–St. Louis–San Francisco: McGraw-Hill Book Co., 1970. – 567 p.
7. *Kamke E.* Differentialgleichungen Lösungsmethoden und Lösungen. Gewöhnliche Differentialgleichungen, 6 verbesserte Auflage. – Leipzig, 1959. – 576 s.
8. *Трапезон А. Г.* Об одном преобразовании и его свойствах в задаче о продольных колебаниях стержней // Пробл. прочности. – 1993. – № 10. – С. 71 – 77.
9. *Писаревский М. М.* Расчет переходных стержней для магнитоэлектрических вибраторов // Тр. науч.-техн. сов. по изучению рассеяния энергии при колебаниях упругих тел. – Киев: Изд-во АН УССР, 1958. – С. 54 – 89.
10. *Трапезон А. Г.* Расчет упругих элементов при резонансных усталостных испытаниях. – Киев: Наук. думка, 1983. – 96 с.
11. *Biezeno C. B. und Grammel R.* Technische Dynamik. – Berlin: Springer, 1939. – 830 s.
12. *Timoshenko S. and Woinowsky-Krieger S.* Theory of Plates and Shells, second edition. – New York–Toronto–London: McGraw-Hill Book Co., 1959. – 636 p.
13. *Смирнов В. И.* Курс высшей математики. – М.: ГИТТЛ, 1951. – Т. 2. – 627 с.
14. *Прочность, устойчивость, колебания.* Справочник в 3 т. / Под ред. И. А. Биргера и Я. Г. Пановко. – М.: Машиностроение, 1968. – 1861 с.

Поступила 21. 02. 2000