УДК 519.8

В.М. ГОРБАЧУК

СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ РАВНОВЕСИЙ КУРНО–НЭША И БЕРТРАНА–НЭША ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИРОВАННЫХ ПРОДУКТОВ

В случае гетерогенной дуополии для разности прибылей в равновесиях Курно–Нэша и Бертрана–Нэша факт заменяемости или дополнительности дифференцированных продуктов важнее, чем степень их однородности. Для заменителей (дополнителей) цена и прибыль каждой фирмы в равновесии Курно–Нэша выше (ниже), чем в равновесии Бертрана–Нэша, а выпуск – соответственно меньше (больше).

Введение. Глобальная инфляция влияет на различные рынки и страны. По официальным данным, в Украине в 2007 г. цена бензина А-95 возросла от 3,82 до 5,11 UAH / литр (при фиксированном обменном курсе USD = = 5,05 UAH), а дизельного топлива – от 3,71 до 5,09 UAH / литр. В 2008 г. цена дизельного топлива в Украине превысила цену бензина А-95. Профсоюзы в странах Европейского Союза (ЕС) организовали массовые забастовки в связи с высокими ценами на моторные топлива.

Для рынка энергоносителей Украины характерно использование рыночной власти [1]. Заметим, что бензин и дизтопливо – дифференцированные продукты [2, 3]. Для исследования двух дифференцированных продуктов удобен аппарат дуопольных равновесий, предложенный в классических работах Курно, Бертрана, Нэша [4–6]. Такой аппарат развивался в работах отечественных авторов [7–11].

Биотопливо является альтернативным (дифференцированным) продуктом для ряда обычных моторных топлив [10], и страны ЕС приступили к комплексной организации его промышленного производства в 1990-х годах. Украина в 2008 г. вышла в лидеры в Европе по посевам рапса. Как следствие, сокращаются площади продовольственных культур и возрастают цены продовольственных продуктов, что приводит к дальнейшим проблемам взаимозависимости продуктов.

Если продукты 1 и 2 – дифференцированные, то цена продукта i будет

$$P_i = a_i - b_i Q_i - d_i Q_j ,\ i, j = 1,2 ,\ i \neq j , \quad (1)$$

где Q_i – неотрицательное количество продукта i, a_i, b_i, d_i – некоторые параметры [2, 3]. Предположим, что $a_i > 0$ и $b_i > 0$. При $d_i > 0$ продукт j называют заменителем для продукта i, а при $d_i < 0$ – дополнителем. При $d_i = 0$ цена продукта i не зависит от продукта j.

При конкуренции производители 1, 2 соответственно продуктов 1, 2 могут решать задачу Курно–Нэша (Cournot–Nash) [2–6]

$$\pi_i = (P_i - c_i)Q_i = (a - b_i Q_i - d_i Q_j - c_i)Q_i \to \max_{Q_i} ,\ i = 1,2 , \quad (2)$$

и задачу Бертрана–Нэша (Bertrand–Nash) [2–6]

$$\pi_i = (P_i - c_i)Q_i \to \max_{P_i} ,\ i = 1,2 ,$$

где c_i – (положительные) удельные производственные затраты для продукта i. Величина a_i считается верхней границей удельных затрат и цены: $0 < c_i < a_i$.

В литературе часто предполагается некоторая гомогенность дуополии, т.е. $a_1 = a_2$ и / или $b_1 = b_2$ и/или $c_1 = c_2$ и / или $d_1 = d_2$ в задаче (2) [2, 3]. Потребности практики вынуждают отказываться от таких предположений и анализировать гетерогенную дуополию в общем случае.

Теорема 1. Если выполняются условия (1), (2),

$$\Lambda = 4b_1 b_2 - d_1 d_2 > 0 , \quad (3)$$

$$\Delta_j = 2b_i(a_j - c_j) - d_j(a_i - c_i) > 0 ,\ i, j = 1,2 ,\ i \neq j , \quad (4)$$

то в равновесии Курно–Нэша дифференцированной дуополии выпуск фирмы i составляет

$$Q_i^{CN} = \frac{2b_j(a_i - c_i) - d_i(a_j - c_j)}{4b_1 b_2 - d_1 d_2} = \frac{\Delta_i}{\Lambda} ,\ i, j = 1,2 ,\ i \neq j . \quad (5)$$

Действительно, из вогнутости по Q_i функции π_i следует

$$0 = \partial\pi_i / \partial Q_i = a_i - c_i - 2b_i Q_i - d_i Q_j ,\ i, j = 1,2 ,\ i \neq j ,$$

откуда получаем

$$Q_1 = \frac{a_1 - c_1 - d_1 Q_2}{2b_1} = \frac{2b_2(a_1 - c_1) - d_1(a_2 - c_2 - d_2 Q_1)}{4b_1 b_2}$$

и приходим к соотношениям (5).

Условие (3) является непосредственным следствием неравенств

$$d_i < | b_i | ,\ i = 1,2 , \quad (6)$$

т.е. большей зависимости цены продукта i от спроса на этот продукт, чем от спроса на дифференцированный продукт j. Если продукты однородные, то

$$d_i = b_i ,\ i = 1, 2 , \quad (7)$$

и условие (3) выполняется.

Заметим, что при

$$a_i - c_i = a_j - c_j \tag{8}$$

из соотношения (4) следует условие (3). Если выполняются условия (7), (8) и

$$b_1 = b_2, \tag{9}$$

то формула (5) сводится к известной формуле выпуска в равновесии Курно–Нэша для однородной дуополии [8].

Теорема 2. При условиях (3), (4) цена на продукт i в равновесии Курно–Нэша

$$P_i^{CN} = \frac{b_i[2b_j(a_i - c_i) - d_i(a_j - c_j)]}{\Lambda} + c_i = \frac{b_i\Delta_i}{\Lambda} + c_i = b_i Q_i^{CN} + c_i,\ i, j = 1,2. \tag{10}$$

Следствие 1. При условиях (3), (4) в равновесии Курно–Нэша отношение выпусков составляет

$$\frac{Q_1^{CN}}{Q_2^{CN}} = \frac{2b_2(a_1 - c_1) - d_1(a_2 - c_2)}{2b_1(a_2 - c_2) - d_2(a_1 - c_1)} = \frac{\Delta_1}{\Delta_2}, \tag{11}$$

а разность цен –

$$P_1^{CN} - P_2^{CN} = b_1Q_1^{CN} - b_2Q_2^{CN} + c_1 - c_2 = \frac{b_1\Delta_1 - b_2\Delta_2}{D} + c_1 - c_2. \tag{12}$$

Следствие 2. В условиях (3), (4) прибыль в равновесии Курно–Нэша

$$\pi_i^{CN} = (P_i^{CN} - c_i)Q_i^{CN} = b_i(Q_i^{CN})^2 = \frac{b_i(\Delta_i)^2}{\Lambda^2},\ i, j = 1,2,\ i \neq j. \tag{13}$$

Следствие 3. При условиях (3), (4) разность прибылей в равновесии Курно–Нэша

$$\pi_1^{CN} - \pi_2^{CN} = \frac{b_1(\Delta_1)^2 - b_2(\Delta_2)^2}{\Lambda^2}. \tag{14}$$

Следствие 4. При условиях (3), (4), (9) разность прибылей

$$\pi_1^{CN} - \pi_2^{CN} = \frac{b_1(\Delta_1 + \Delta_2)[(2b_1 + d_2)(a_1 - c_1) - (2b_1 + d_1)(a_2 - c_2)]}{\Lambda^2}$$

и имеет знак $sign(\pi_1^{CN} - \pi_2^{CN}) = sign(Q_1^{CN} - Q_2^{CN})$.

Следствие 5. При условиях (3), (4), (6), (9) и одинаковой степени однородности продуктов

$$\Omega = \frac{d_1}{b_1} = \frac{d_2}{b_2}$$

разность прибылей в равновесии Курно–Нэша

$$\pi_1^{CN} - \pi_2^{CN} = \frac{(b_1)^2(\Delta_1 + \Delta_2)(2 + \Omega)[(a_1 - c_1) - (a_2 - c_2)]}{\Lambda^2}$$

и имеет знак $\operatorname{sign}\ (\pi_1^{CN} - \pi_2^{CN}) = \operatorname{sign}\ [(a_1 - c_1) - (a_2 - c_2)]$.

Чем ближе значение Ω к 1, тем однороднее (менее дифференцированы) продукты 1 и 2 [2, 3].

Теорема 3. Если выполняются условия (6) и

$$\delta_i = b_j(a_i - c_i) - d_i(a_j - c_j) = \Delta_i - b_j(a_i - c_i) > 0, \tag{15}$$

то в равновесии Бертрана–Нэша цена продукта i составляет

$$P_i^{BN} = \frac{\lambda a_i + b_i(\delta_i + 3b_j c_i)}{\Lambda},\ i, j = 1,2,\ i \neq j, \tag{16}$$

а выпуск продукта i –

$$Q_i^{BN} = \frac{b_j[\lambda(a_i - c_i) + b_i\delta_i]}{\lambda\Lambda},$$

где

$$\lambda = b_1 b_2 - d_1 d_2 = \Lambda - 3b_1 b_2 > 0. \tag{17}$$

Следует отметить, что из условия (15) вытекает условие (4), а из условия (6) вытекают условия (3) и (17). Для существования равновесия Бертрана–Нэша нужны более жесткие условия, чем для равновесия Курно–Нэша.

Из соотношений (1) следует

$$Q_1 = \frac{b_2(a_1 - P_1) - d_1(a_2 - P_2)}{b_1 b_2 - d_1 d_2} = \frac{a_1 b_2 - a_2 d_1 - b_2 P_1 + d_1 P_2}{b_1 b_2 - d_1 d_2}, \tag{18}$$

откуда

$$\pi_1 = (P_1 - c_1)\frac{(a_1 b_2 - a_2 d_1 - b_2 P_1 + d_1 P_2)}{\lambda}.$$

Тогда из вогнутости по P_1 функции π_1 следует

$$0 = \partial\pi_1 / \partial P_1 = \frac{a_1 b_2 - a_2 d_1 - 2b_2 P_1 + d_1 P_2 + b_2 c_1}{\lambda}. \tag{19}$$

Аналогично

$$0 = a_2 b_1 - a_1 d_2 - 2b_1 P_2 + d_2 P_1 + b_1 c_2,$$

откуда

$$P_2 = \frac{b_1(a_2 + c_2) - d_2(a_1 - P_1)}{2b_1}.$$

Подставляя последнее равенство в уравнение (19), получаем соотношения (16).

Подставляя соотношения (16) в уравнение (18), убеждаемся в утверждениях теоремы 3 для Q_i^{BN}, $i = 1, 2$.

Следствие 6. При условиях (6) и (15) в равновесии Бертрана–Нэша отношение выпусков

$$\frac{Q_1^{BN}}{Q_2^{BN}} = \frac{b_2[\lambda(a_1 - c_1) + b_1\delta_1]}{b_1[\lambda(a_2 - c_2) + b_2\delta_2]}, \tag{20}$$

а отношение цен –

$$\frac{P_1^{BN}}{P_2^{BN}} = \frac{\lambda a_1 + b_1(\delta_1 + 3b_2 c_1)}{\lambda a_2 + b_2(\delta_2 + 3b_1 c_2)}. \tag{21}$$

Соотношения (11), (12) и (20), (21) могут использоваться для проверки конкурентности соответственно по Курно–Нэшу и Бертрану–Нэшу дифференцированной дуополии, так как выпуски и цены наблюдаются, а параметры a_i, b_i, d_i, c_i, $i = 1{,}2$, и функции Δ_i, δ_i, λ от них оцениваются [9].

Теорема 4. При условиях (6), (15) прибыль в равновесии Бертрана–Нэша

$$\pi_i^{BN} = \frac{b_j[\lambda(a_i - c_i) + b_i\delta_i]^2}{\lambda\Lambda^2} = \frac{\lambda(Q_i^{BN})^2}{b_j}, \ i, j = 1{,}2, \ i \neq j.$$

Поскольку в силу теоремы 3

$$\pi_1^{BN} = (P_1^{BN} - c_1)Q_1^{BN} = \frac{[\lambda a_1 + b_1(\delta_1 + 3b_2c_1) - \Lambda c_1]b_2[\lambda(a_1 - c_1) + b_1\delta_1]}{\lambda\Lambda^2},$$

то остается непосредственно проверить, что

$$\lambda(a_1 - c_1) + b_1\delta_1 = \lambda a_1 + b_1(\delta_1 + 3b_2c_1) - \Lambda c_1.$$

Следствие 7. При условиях (6), (15) разность прибылей в равновесии Бертрана–Нэша

$$\pi_1^{BN} - \pi_2^{BN} = \frac{\lambda(Q_1^{BN})^2}{b_2} - \frac{\lambda(Q_2^{BN})^2}{b_1} = \frac{\lambda[b_1(Q_1^{BN})^2 - b_2(Q_2^{BN})^2]}{b_1b_2}.$$

Следствие 8. При условиях (6), (9), (15) разность прибылей в равновесии Бертрана–Нэша равна

$$\pi_1^{BN} - \pi_2^{BN} = \frac{\lambda(Q_1^{BN})^2}{b_1} - \frac{\lambda(Q_2^{BN})^2}{b_1} = \frac{\lambda(Q_1^{BN} - Q_2^{BN})(Q_1^{BN} + Q_2^{BN})}{b_1} =$$

$$= \frac{(Q_1^{BN} + Q_2^{BN})\{b_2[\lambda(a_1 - c_1) + b_1\delta_1] - b_1[\lambda(a_2 - c_2) + b_2\delta_2]\}}{\Lambda b_1}$$

и имеет знак $\mathrm{sign}(\pi_1^{BN} - \pi_2^{BN}) = \mathrm{sign}(Q_1^{BN} - Q_2^{BN})$, совпадающий со знаком разности выпусков фирм в равновесии Бертрана–Нэша. В свою очередь, знак этой разности можно определить из отношения (20).

Следствие 9. При условиях (6), (9), (14), (15) имеет место

$$\delta_1 = b_2(a_1 - c_1) - d_1(a_2 - c_2) = \delta_2,$$

откуда для разности прибылей в равновесии Бертрана–Нэша выполняется

$$\pi_1^{BN} - \pi_2^{BN} = \frac{\lambda(Q_1^{BN} + Q_2^{BN})[(a_1 - c_1) - (a_2 - c_2)]}{\Lambda},$$

причем эта разность имеет знак $\mathrm{sign}(\pi_1^{BN} - \pi_2^{BN}) = \mathrm{sign}[(a_1 - c_1) - (a_2 - c_2)]$.

Сравнивая следствия 4 и 8, 5 и 9, видим, что преимущество фирмы в равновесиях Курно–Нэша и Бертрана–Нэша определяется одинаковыми признаками – большим равновесным выпуском и большей разностью между максимально возможной ценой и удельными производственными затратами для дифференцированных продуктов.

Теорема 5. При условиях (6) и (15) разность цен в равновесиях Курно–Нэша и Бертрана–Нэша составляет

$$P_i^{CN} - P_i^{BN} = \frac{d_1 d_2 (a_i - c_i)}{\Lambda},\ i, j = 1,2,\ i \neq j, \tag{22}$$

причем эта разность имеет знак

$$\text{sign}(P_1^{CN} - P_1^{BN}) = \text{sign}(d_1 d_2).$$

Действительно, ввиду теорем 2 и 4, равенств (15) и (17) для $i = 1$ имеем

$$P_1^{CN} - P_1^{BN} = \frac{\Lambda c_1 + b_1 \Delta_1 - \lambda a_1 - b_1 \delta_1 - 3 b_1 b_2 c_1}{\Lambda} = \frac{(\Lambda - 3 b_1 b_2) c_1 + (\Delta_1 - \delta_1) b_1 - \lambda a_1}{\Lambda} =$$

$$= \frac{\lambda c_1 + b_2 (a_1 - c_1) b_1 - \lambda a_1}{\Lambda} = \frac{(a_1 - c_1)(b_1 b_2 - \lambda)}{\Lambda} = \frac{d_1 d_2 (a_1 - c_1)}{\Lambda}.$$

Теорема 6. При условиях (6) и (15) разность выпусков в равновесиях Бертрана–Нэша и Курно–Нэша составляет

$$Q_i^{BN} - Q_i^{CN} = \frac{d_1 d_2 \delta_i}{\lambda \Lambda},\ i, j = 1,2,\ i \neq j, \tag{23}$$

причем эта разность имеет знак $\text{sign}(Q_i^{BN} - Q_i^{CN}) = \text{sign}(d_1 d_2)$.

Отметим, что формулы (22) и (23) имеют место как для заменителей, так и для дополнителей. Если традиционно рассматривать заменители, то в равновесии Курно–Нэша цена дифференцированного продукта i выше по сравнению с равновесием Бертрана–Нэша, а выпуск – ниже.

Теорема 7. При условиях (6) и (15) разность прибылей в равновесиях Курно–Нэша и Бертрана–Нэша составляет

$$\pi_i^{CN} - \pi_i^{BN} = \frac{d_j (d_i)^2 [\delta_j b_j (a_i - c_i) + \delta_i b_i (a_j - c_j)]}{\lambda \Lambda^2},\ i, j = 1,2,\ i \neq j,$$

и имеет знак $\text{sign}(\pi_i^{CN} - \pi_i^{BN}) = \text{sign}(d_j)$, который положительный, когда дифференцированный продукт i является заменителем для продукта j, и отрицательный, когда продукт i является дополнителем для продукта j.

Следствие 10. Если существуют асимметричные дифференцированные продукты 1 и 2 с $d_1 > 0$ и $d_2 < 0$, то $\pi_1^{CN} - \pi_1^{BN} < 0$, $\pi_2^{CN} - \pi_2^{BN} > 0$.

Пример. Пусть кафе i расположено на расстоянии l_i от начала улицы длиной L, $L - l_2 > l_1 > 0$, а потребитель x является клиентом кафе i при

$$P_i + T(x - l_i)^2 < P_j + T(L - l_j - x)^2,\ i, j = 1,2,\ j \neq i.$$

Обозначим $k = L - l_1 - l_2 > 0$. Тогда равновесные по Бертрану–Нэшу цены равны

$$P_i^B = \frac{kT(3k + 4l_i + 2l_j)}{3},\ i, j = 1,2,\ j \neq i.$$

Заключение. В случае гетерогенной дуополии для разности прибылей в равновесиях Курно–Нэша и Бертрана–Нэша факт заменяемости или дополнительности дифференцированных продуктов важнее, чем степень Ω их однородности. Для заменителей (дополнителей) цена и прибыль каждой фирмы в равновесии Курно–Нэша выше (ниже), чем в равновесии Бертрана–Нэша, а выпуск – меньше (больше).

В.М. Горбачук

ПОРІВНЯЛЬНИЙ АНАЛІЗ РІВНОВАГ КУРНО–НЕША ТА БЕРТРАНА–НЕША
ДЛЯ ДИФЕРЕНЦІЙОВАНИХ ПРОДУКТІВ

У випадку гетерогенної дуополії для різниці прибутків у рівновагах Курно–Неша та Бертрана–Неша факт замінюваності чи доповнюваності диференційованих продуктів важливіший, ніж ступінь їх однорідності. Для замінннників (доповнювачів) ціна та прибуток кожної фірми у рівновазі Курно–Неша вищі (нижчі), ніж у рівновазі Бертрана–Неша, а випуск – менший (більший).

W.M. Gorbachuk

THE COMPARATIVE ANALYSIS OF COURNOT–NASH AND BERTRAND–NASH
EQUILIBRIA FOR DIFFERENTIATED PRODUCTS

In the case of heterogeneous duopoly, the fact of substitutability or complementarity of differentiated products is more improtant for profits' difference at Cournot–Nash and Bertrand–Nash equilibria, than the degree of their uniformity. For substitutes (complements) the price and the profit of each firm at Cournot–Nash equilibrium are higher (lower), than ones at Bertrand–Nash equilibrium, and the output is lesser (larger).

1. *Гриценко О.Г., Ястремський О.І.* Аналіз взаємозалежності „ціна – обсяг продажу" як засіб визначення рівня монопольної влади // Банківська справа. – 2005. – № 3. – С. 3–16.
2. *Dixit A.* A model of duopoly suggesting a theory of entry barriers // RAND journal of economics. – 1979. – 10. – 1. – P. 20–32.
3. *Singh N., Vives X.* Price and quantity competition in a differentiated duopoly // Ibid. – 1984. – 15, N 4. – P. 546–554.
4. *Cournot A.* Researches into the mathematical principles of the theory of wealth. English edition of Cournot (1838) translated by N.T. Bacon. – New York: A.M. Kelley, 1971. – 213 p.
5. *Bertrand J.* Revue de la Theorie Mathematique de la Richesse Sociale et des Recherches sur les Principles Mathematiques de la Theorie des Richesses // J. des Savants. – 1883. – P. 499–508.
6. *Nash J.* Equilibrium points in n-person games // Proc. of the National Academy of Sci. – 1950. – 36. – P. 48–49.
7. Olygopoly dynamics – models and tools. Puu T., Sushko I. (eds.) – Springer-Verlag, 2002. – 313 p.
8. *Gorbachuk V.* The prisoner's dilemma solved for a symmetric duopoly // XII intern. sci. Kravchuk conf. V. II. – Kyiv: National Technical University of Ukraine "KPI", 2008. – P. 47.
9. *Gorbachuk V., Gasanov A., Volkov O.* Duopoly of differentiated products in competition vs. monopoly // 2nd Intern. Conf. on Control and Optimization with Industrial Applications. – Baku: Institute of Applied Mathematics, 2008. – P. 66.
10. *Гасанов А.С., Горбачук В.М.* Виробництво біопалив: математичні моделі та методи // Математичне та програмне забезпечення інтелектуальних систем. – Дніпропетровськ: ДНУ ім. О. Гончара, 2008. – С. 83–84.
11. *Горбачук В.М., Гаркуша Н.І.* Рівноваги Курно–Неша та Бертрана–Неша для диференційованих продуктів // PDMU-2009. – К.: Київ. нац. ун-т ім. Тараса Шевченка, 2009.
– С. 85–86.

Получено 12.03.2009