

Рассматриваются некоторые алгоритмические подходы к моделированию случайных величин и процессов для получения расчетных оценок цены акций, опционов и других видов ценных бумаг.

© Л.Б. Вовк, А.П. Кнопов, 2009

УДК 519.21

Л.Б. ВОВК, А.П. КНОПОВ

МОДЕЛИРОВАНИЕ И СОЗДАНИЕ АЛГОРИТМОВ ДЛЯ ФИНАНСОВЫХ МОДЕЛЕЙ

Введение. Еще в начале XX века французским ученым Л. Башелье [1] была предложена естественная модель для определения цены акции S_t в некоторый момент времени t . Эта модель использовала понятие геометрического броуновского движения, при этом стоимость акции S_t определялась как решение линейного стохастического уравнения вида

$$dS_t = S_t(\mu dt + \sigma dW_t), \quad (1)$$

где μ – коэффициент роста, σ – коэффициент волатильности, W_t – стандартный винеровский процесс. Такого же типа стохастические уравнения возникают и при определении цены покупки европейского опциона и нахождения других важных характеристик европейского и американского опционов [2]. Очевидно, чтобы находить решение уравнения (1) и в явном виде получать численное значение для S_t , необходимо иметь реализации винеровского процесса W_t или реализации решения уравнения (1).

Метод Монте-Карло

Проблема моделирования состоит в следующем. Пусть случайная величина имеет функцию распределения $\mu(x)$. Сгенерируем последовательность случайных событий X_1, \dots, X_n, \dots в соответствии с функцией распределения μ . Используя закон больших чисел, можно утверждать, что если f является μ -интегрируемой функцией, то

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{1 \leq n \leq N} f(X_n) = \int f(x) \mu(dx). \quad (2)$$

Чтобы воспроизвести этот метод на компьютере, будем действовать следующим образом. Считаем, что у нас есть способ получения независимых реализаций $\{U_n\}_{n=1}^{\infty}$ равномерно распределенной на $[0, 1]$ случайной величины U . Рассмотрим общий метод получения независимых реализаций случайных величин с заданным законом распределения $\mu(x)$. Он основан на следующем утверждении.

Теорема 1 [3]. Если величина x удовлетворяет уравнению

$$\int_{-\infty}^x \mu(dy) = u, \quad x = \mu^{-1}(u),$$

где u – случайная величина, равномерно распределенная на $[0, 1]$, то x распределена по закону $\mu(x)$.

Заметим, что в практических расчетах наиболее удобно получать реализации U с помощью некоторого алгоритма. Числа, получаемые таким способом, называют псевдослучайными. Большинство языков программирования предусматривают закодированную функцию типа `gandom`, возвращающую псевдослучайное число между 0 и 1 или случайное целое число в заданном диапазоне. Доказать теоретически, что тот или иной алгоритм дает последовательность с нужными свойствами, во многих случаях достаточно сложная задача. Поэтому строгое доказательство часто заменяется интуитивными соображениями или теоретически обосновываются некоторые свойства алгоритма, а затем используются тесты, на основании которых оценивается качество алгоритма.

Моделирование случайных величин

В финансовой математике наиболее распространенными являются гауссовские и экспоненциальные законы распределения (в случае непрерывных моделей) и пуассоновский закон (в случае дискретных моделей).

Моделирование гауссовского закона

Методы моделирования гауссовских случайных величин основаны как на использовании центральной предельной теоремы, так и на оригинальных исследованиях Н. Винера [4], В. Янсона [5] и Р. Кронмалля [6]. Последний метод основан на том, что величины $\xi = \sqrt{-2\log(x_1)} \cos(2\pi x_2)$ и $\eta = \sqrt{-2\log(x_1)} \sin(2\pi x_2)$ являются независимыми и нормально распределенными с нулевым средним и единичной дисперсией, если x_1 и x_2 равномерно распределены на $[0, 1]$.

Для моделирования гауссовской случайной величины со средним m и дисперсией σ достаточно взять $X = m + \sigma g$, где g – стандартная гауссовская случайная величина.

Моделирование экспоненциального закона

Напомним, что случайная величина ξ распределена по экспоненциальному закону, если ее плотность распределения имеет вид

$$p_{\xi}(x) = \begin{cases} f(x) e^{-\int_0^x f(t) dt}, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0, \end{cases}$$

а $f(x)$ – неотрицательная, интегрируемая на любом конечном промежутке $[0, A]$ функция, такая, что $\lim_{A \rightarrow \infty} \int_0^A f(t) dt = \infty$. Если $f(x) = \lambda$, то можно моделировать ξ , учитывая, что если U равномерно распределено на $[0, 1]$, то $\log(U)/\lambda$ распределено экспоненциально с параметром λ .

Этот метод моделирования экспоненциального закона называется "метод обратной функции распределения".

Моделирование пуассоновской случайной величины

С показательным распределением тесно связано пуассоновское распределение. Пуассоновская случайная величина – это дискретная величина, такая, что функция распределения имеет вид

$$p_n = P\{x = n\} = e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!}, \quad n \geq 0.$$

Процесс Пуассона является дискретным, и соответствующая случайная величина принимает значения $n = 1, 2, \dots$ с вероятностями p_n . Процесс Пуассона, кроме того, является марковским с переходной плотностью вероятности

$$p(x, y) = \begin{cases} f(y-x) \exp\left[-\int_0^{y-x} f(t) dt\right], & y \geq x, \\ 0, & y < x, \end{cases}$$

т.е. разность $y-x$ распределена по показательному закону. Функцию $f(x)$ называют параметром пуассоновского закона. Если начальное распределение является показательным с параметром $f(x)$, то последовательность сумм $\sum_{i=1}^n \xi_i$, $n = 1, 2, \dots$, где ξ_i независимы и распределены по показательному закону, образуют реализации пуассоновского процесса с параметром $f(x)$. Если $f(x) = \lambda$ постоянна, то моделирование плотности показательного распределения, а следовательно, и пуассоновского распределения, не представляет труда. Если же $f(x)$ – произвольная и достаточно сложная функция, то поставленная задача может быть достаточно трудоемкой.

Если $\{T_i\}_{i \geq 1}$ – последовательность экспоненциальных случайных величин с параметром λ , то $N_t = \sum_{n=1}^{\infty} n \mathbf{1}_{\{T_1 + \dots + T_n \leq t \leq T_1 + \dots + T_{n+1}\}}$ является пуассоновской с параметром λt . Тогда случайная величина N_1 распределена по тому же закону, что и переменная X , которую мы хотим смоделировать. С другой стороны, всегда можно представить экспоненциальные переменные T_i как $-\log(U_i)/\lambda$, где $\{U_i\}_{i=1}^{\infty}$ – независимые случайные величины, равномерно распределенные на $[0, 1]$, и тогда N_1 можно записать так:

$$N_1 = \sum_{n=1}^{\infty} n \mathbf{1}_{\{U_1 \dots U_n \leq e^{-\lambda} \leq U_1 \dots U_{n+1}\}},$$

откуда и строится алгоритм моделирования пуассоновской случайной величины.

Моделирование гауссовских векторов

Многомерные модели в основном будут использоваться в гауссовских процессах со значениями в \mathbf{R}^n . Приведем метод моделирования этого вида случайных величин. Допустим, мы хотим смоделировать гауссовский вектор $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$, характеризующийся вектором средних значений $\mathbf{m} = (m_1, \dots, m_n) = (E(X_1), \dots, E(X_n))$ и матрицей дисперсий $\mathbf{\Gamma} = (\sigma_{ij})_{i,j=1}^n$, где $\sigma_{ij} = E(X_i X_j) - E(X_i)E(X_j)$. Матрица $\mathbf{\Gamma}$ положительно определена, следовательно, имеет обратную. Можно найти квадратный корень матрицы $\mathbf{\Gamma}$, т.е. матрицу \mathbf{A} , такую, что $\mathbf{A} \times^T \mathbf{A} = \mathbf{\Gamma}$, где $^T \mathbf{A}$ – транспонированная к \mathbf{A} матрица. Поскольку как $\mathbf{\Gamma}$, так и \mathbf{A} являются обратимыми, можно рассматривать вектор $\mathbf{Z} = \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{X} - \mathbf{m})$. Легко проверить, что этот вектор является гауссовским с нулевым средним. Кроме того, матрица дисперсий представима в виде

$$E(Z_i Z_j) = \sum_{k,l=1}^n E(A_{ik}^{-1}(X_k - m_k)^T (A_{jl}^{-1}(X_l - m_l))) = \sum_{k,l=1}^n (A_{ik}^{-1} A_{jl}^{-1} \sigma_{kl}) = (\mathbf{A}^{-1} \mathbf{\Gamma} (\mathbf{A}^{-1})^T)_{ij} = \mathbf{I},$$

следовательно, \mathbf{Z} – гауссовский вектор с нулевым средним и единичной матрицей дисперсий. Закон распределения вектора $\mathbf{X} = \mathbf{m} + \mathbf{AZ}$ можно смоделировать таким образом:

- 1) получить матрицу \mathbf{A} , извлекая квадратный корень из $\mathbf{\Gamma}$;
- 2) смоделировать n независимых стандартных нормальных величин $G = (g_1, \dots, g_n)$;
- 3) сложить $\mathbf{m} + \mathbf{AG}$.

Моделирование стохастических процессов

Изложенные ранее методы дают возможность моделировать случайные процессы в задачах, когда изучается динамика стоимости портфеля акций в течение всего времени его оборота. Рассмотрим некоторые простые приемы моделирования некоторых классов процессов.

Моделирование Броуновского движения

Выделим два метода моделирования Броуновского движения $(W_t)_{t \geq 0}$. Первый из них содержит "перенормированный случайный путь". Пусть $\{X_i\}_{i=0}^{\infty}$ – последовательность независимых, одинаково распределенных случайных величин, соответствующих

$$P\{X_i = 1\} = \frac{1}{2}, \quad P\{X_i = -1\} = \frac{1}{2}.$$

Тогда имеем $E(X_i) = 0$, $E(X_i^2) = 1$. Рассмотрим $S_n = X_1 + \dots + X_n$. Броуновское движение можно аппроксимировать с помощью процессов $(X_t^n)_{t \geq 0}$, где

$$X_t^n = \frac{1}{\sqrt{n}} S_{[nt]},$$

$[x]$ – наибольшее целое число, не превышающее x .

Второй метод основан на том, что если $\{g_i\}_{i=0}^{\infty}$ – последовательность независимых случайных величин со стандартным нормальным распределением, и если $\Delta t \geq 0$, $S_0 = 0$, $S_{n-1} - S_n = g_n$, то закон $(\sqrt{\Delta t} S_0, \sqrt{\Delta t} S_1, \dots, \sqrt{\Delta t} S_n)$ идентичен закону $(W_0, W_{\Delta t}, W_{2\Delta t}, \dots, W_{n\Delta t})$, т.е. броуновское движение можно аппроксимировать с помощью $X_t^n = \sqrt{\Delta t} S_{[t/\Delta t]}$.

Моделирование стохастических дифференциальных уравнений

Существует множество методов, некоторые из них достаточно сложные, моделирования решений стохастических дифференциальных уравнений. Рассмотрим только базисный метод, называющийся "аппроксимация Эйлера". Принцип данного метода состоит в следующем: рассмотрим стохастическое дифференциальное уравнение

$$\begin{cases} X_0 = x, \\ dX_t = b(X_t)dt + \sigma(X_t)dW_t. \end{cases}$$

Время определяется с помощью фиксированного Δt . Определим процесс с дискретным временем

$$\begin{cases} S_0 = x, \\ S_{n+1} - S_n = \{b(S_n)\Delta t + \sigma(S_n)(W_{(n+1)\Delta t} - W_{n\Delta t})\} \end{cases}$$

Пусть $X_t^n = S_{[t/\Delta t]}$.

Теорема 2 [7]. Для любого $T > 0$

$$E\left(\sup_{t \leq T} |X_t^n - X_t|^2\right) \leq C_T \Delta t,$$

где C_T – константа, зависящая только от T .

Закон распределения последовательности $\{W_{(n+1)\Delta t} - W_{n\Delta t}\}_{n=0}^{\infty}$ является законом распределения последовательности независимых нормально распределенных случайных величин с нулевым средним и дисперсией Δt . При моделировании заменим $\{W_{(n+1)\Delta t} - W_{n\Delta t}\}_{n=0}^{\infty}$ на $g_n \sqrt{\Delta t}$, где $\{g_n\}_{n=0}^{\infty}$ – последовательность независимых стандартных нормальных случайных величин. Аппроксимируемую последовательность $\{S'_n\}_{n=1}^{\infty}$ определим следующим образом:

$$\begin{cases} S'_0 = x, \\ S'_{n+1} = S'_n + \Delta t b(S'_n) + \sigma(S'_n) g_n \sqrt{\Delta t}. \end{cases}$$

Последовательность независимых гауссовских случайных величин $\{g_n\}_{n=0}^{\infty}$ можно моделировать с помощью последовательности независимых случайных величин $\{U_i\}_{i=0}^{\infty}$, таких, что $P\{U_i = 1\} = P\{U_i = -1\} = \frac{1}{2}$.

Далее рассмотрим некоторые подходы к моделированию случайных процессов в задачах финансовой математики.

Модель Блэка-Шоулза

Рассмотрим задачу моделирования решения уравнения

$$\begin{cases} X_0 = x, \\ dX_t = X_t (r dt + \sigma dW_t), \end{cases} \quad (3)$$

где X_t – стоимость акций; r – процентная ставка; σ – волатильность процесса. Допустимы два подхода. Первый состоит в использовании аппроксимации Эйлера. Положим

$$\begin{cases} S_0 = x, \\ S_{n+1} = S_n (1 + r\Delta t + \sigma g_n \sqrt{\Delta t}) \end{cases}$$

и моделируем X_t с помощью $X_t^n = S_{\lfloor t/\Delta t \rfloor}$.

Второй метод состоит в использовании точного решения (3):

$$X_t = x \exp \left\{ rt - \frac{\sigma^2}{2} t + \sigma W_t \right\}$$

и моделировании броуновского движения согласно с одним из вышеприведенных методов. В этом случае получаем

$$S_n = x \exp \left\{ \left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) n\Delta t + \sigma \sqrt{\Delta t} \sum_{i=1}^n g_i \right\}.$$

Моделирование моделей со скачками

Пусть процесс $(X_t)_{t \geq 0}$ описывает динамику активов

$$X_t = x \left(\prod_{j=1}^{N_t} (1 + U_j) \right) e^{(\mu - \sigma^2/2)t + \sigma W_t}, \quad (4)$$

где $(W_t)_{t \geq 0}$ – стандартное броуновское движение; $(N_t)_{t \geq 0}$ – пуассоновский процесс с интенсивностью λ ; $\{U_j\}_{j=1}^{\infty}$ – последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин со значениями в $(-1, +\infty)$ и распределением $\mu(x)$.

При моделировании этого процесса за время $n\Delta t$

$$X_{n\Delta t} = x \times (X_{\Delta t}/x) \times (X_{2\Delta t}/X_{\Delta t}) \times \dots \times (X_{n\Delta t}/X_{(n-1)\Delta t}).$$

Рассмотрим $Y_k = (X_{k\Delta t}/X_{(k-1)\Delta t})$. Можно доказать, что $\{Y_k\}_{k=1}^{\infty}$ – последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин. Поскольку $X_{n\Delta t} = x Y_1 \dots Y_n$, моделирование X сводится к моделированию последовательности $\{Y_k\}_{k=1}^{\infty}$ независимых одинаково распределенных случайных величин. Будем действовать следующим образом:

- 1) смоделируем стандартную гауссовскую случайную величину g ;
- 2) смоделируем пуассоновскую случайную величину с параметром $\lambda\Delta t$;
- 3) если $N = n$, смоделируем n независимых случайных величин с функцией распределения $\mu: U_1, \dots, U_n$.

Величины X_t , определенные соотношением (4), будем моделировать с помощью величин

$$\left(\prod_{j=1}^N (1 + U_j) \right) e^{(\mu - \sigma^2/2)\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t}g}.$$

Заключение. Рассмотрены некоторые вопросы моделирования случайных величин и процессов, используемые в моделях финансовой и страховой математики.

Л.Б. Вовк, О.П. Кнопов

МОДЕЛЮВАННЯ ТА СТВОРЕННЯ АЛГОРИТМІВ ДЛЯ ФІНАНСОВИХ МОДЕЛЕЙ

Розглядаються деякі алгоритмічні підходи до моделювання випадкових величин та процесів для одержання розрахункових оцінок ціни акцій, опціонів та інших видів цінних паперів.

L.V.Vovk, O.P. Knopov

MODELING AND CREATING ALGORITHMS FOR FINANCIAL MODELS

Some algorithmic approaches to the random values and processes modeling for obtaining the calculated estimators for stock, options and other kinds of valuable papers are investigated.

1. *Ермаков С.М.* Метод Монте-Карло и смежные вопросы. – М.: Наука, 1971. – 328 с.
2. *Bachelier L.* Theorie de la Speculation // Ann. Sci. Ecole Norm. Super. – Ser. 3, 17, 21t. – 1900. – P. 21–86.
3. *Black F., Scholes M.* The pricing of options and corporate liabilities // J. Polit. Economy. – 1973. – 81. – P. 637–654.
4. *Винер Н.* Нелинейные задачи в теории случайных процессов – М.: Иностран. лит., 1961. – 160 с.
5. *Jansson B.* Random Number Generators – Stockholm, 1967. – 205 p.
6. *Kronmal R.* Evaluation of a pseudorandom normal number generator // J. of the Assos. for Comp. Math. – 1964. – 11, N 3. – P. 357–363.
7. *Гихман И.И., Скороход А.В.* Стохастические дифференциальные уравнения – Киев: Наук. думка, 1968. – 354 с.

Получено 10.03.2009