УДК 519.21

Т.В. ПЕПЕЛЯЕВА

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ УПРАВЛЕНИЯ СТОХАСТИЧЕСКОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМОЙ

Исследуется стохастическое дифференциальное уравнение с дробным винеровским полем. Доказана теорема существования оптимального управления решением соответствующего уравнения.

Введение. При решении многих задач финансовой математики, экономики, телекоммуникаций и других областей человеческой деятельности для моделирования динамических систем используют стохастические процессы и поля. До недавнего времени наилучшей такой моделью считался винеровский процесс (винеровское поле). Но недавние исследования показали, что такие процессы и поля не совсем точно описывают динамику соответствующих явлений, а более точной моделью может быть дробный винеровский процесс (или поле). Это было подтверждено экспериментальным путем и оценкой реальных данных.

В работах [1, 2] исследован дробный винеровский процесс с параметром Харста $H\in(1/2,\ 1)$ и задача управления соответствующей динамической стохастической системой. В настоящей работе исследуется дробное винеровское поле с параметрами Харста $(H,H')\in(0,\ 1/2)^2$, а также соответствующие стохастические уравнения. Рассмотрена задача управления решением этих уравнений. Основные результаты сформулированы и доказаны в виде теорем. Полученные утверждения дают условия существования оптимального управления полями. Результаты данных исследований могут использоваться в экономике и других областях, где возникают задачи оптимального управления.

Пусть $(\Omega,\Re,P)$ – вероятностное пространство, $\Re_z$, $z\in A$, $A=[0,1]^2$ – двупараметриче-с кое семейство σ -подалгебр $\Re$, причем $\Re_{z_1}\subset\Re_z$, если $z_1\le z$, где выражение $z_1\le z$ означает покоординатное неравенство между $z_1=(t_1,s_1)$ и $z=(t,s)$.

Обозначим $L_2([0,1]^2)$ пространство $\Re_z$-измеримых полей $\varphi = \{\varphi(t, s),\ t,s\in A\}$, таких, что:

$$\int_0^1\int_0^1 E\,|\varphi_{t,s}(\omega)|^2 dtds<\infty.$$

И пусть $L([0,1]^2)$ пространство $\Re_z$-измеримых полей $\varphi = \{\varphi(t, s),\ t,s\in D\}$, для которых справедливо

$$P\{\int_0^1\int_0^1 E\ |\varphi_{t,s}(\omega)|^2 dtds < \infty\}=1.$$

Для функций из классов $L_2([0,1]^2)$ и $L([0,1]^2)$ определен стохастический интеграл следующим образом:

$$I(\varphi)=\int_0^1\int_0^1 E\ |\varphi(t, s)|^2\, dW(t,s).$$

Пусть $B_z^{H,H'}$ – дробное винеровское поле с параметрами Харста $(H, H')\in(0,1/2)^2$, т. е. $B_z^{H,H'}$ – гауссовское поле с ковариационной функцией

$$R_{H,H'}(z,z') =$$
$$= E\left(B_z^{H,H'}, B_{z'}^{H,H'}\right)=\frac{1}{4}\left(t^{2H}+t'^{2H}-\left|t'-t\right|^{2H}\right)\left(s^{2H'}+s'^{2H'}-\left|s'-s\right|^{2H'}\right),$$
$$z = (t, s),\ \ z'= (t', s').$$

Заметим, что при $H=H'=1/2$ $B_z^{H,H'}$ – обычное винеровское поле.

Пусть $(C,\Im)$ – измеримое пространство непрерывных на A функций f с потоком σ-алгебр $\Im_z = \sigma\{f(z_1), z_1\le z\}$, $\Im = \sigma\{f(z), z\in A\}$.

Рассмотрим уравнение

$$\xi(t,s) = \xi_0 + \int_0^t\int_0^s a(x,y,\xi,u)dxdy + B_{(t,s)}^{H,H'},\ (t,s)\in A, \tag{1}$$

где a – $\Im_z$-измеримый функционал, u: $A\to\tilde{U}$ – управление, которое не зависит от будущего. Пусть U – класс всех управлений, для которых существует решение уравнения (1). $\aleph$ – наименьшая σ-алгебра борелевских подмножеств из A, $\aleph_{\tilde{U}}$ – σ-алгебра борелевских подмножеств из $\tilde{U}$, $(\tilde{U}\ ,\ \aleph_{\tilde{U}})$ – метрический компакт.

Задача оптимизации управления решением уравнения (1) состоит в том, чтобы найти управление u^* в классе допустимых управлений, которое минимизировало стоимость управления F и задается таким образом:

$$F(u) = E\int_0^1\int_0^1 f(t,s,\xi^u(t,s),\ u(t,s,\xi^u(t,s))dtds,$$

где $f(z, \xi, u)$ – непрерывная неотрицательная функция, $(z, \xi, u)\in A\times C\times\tilde{U}$, $\xi^u(z)$ – решение уравнения (1), которое соответствует управлению $u = u(z, \xi^u(t))$.

Пусть $Z = \inf\limits_{u\in U} F(u)$. Величину Z будем называть оптимальной стоимостью управления в классе U. Управление γ называется оптимальным в U, если стоимость $F(u)$ при $u = \gamma$ достигает минимума.

Найдем условия существования оптимального управления решением уравнения (1).

Согласно [3] дробное винеровское поле $B^{H,H'}$ допускает интегральное представление

$$B_z^{H,H'} = \int_0^t\int_0^s K_{H,H'}(z,z')dW_{z'},$$

где $K_{H,H'}(z,z') = K_H(s,s')\,K_{H'}(t,t')$, а $K_H(s,s')$ и $K_{H'}(t,t')$ определенные в [2].

Ядро $K_{H,H'}$ определяет оператор $K_{H,H'}$ в $L^2([0,1]^{2)}$ таким образом:

$$(K_{H,H'}h)(s, t)= I^{2H,2H'}t^{1/2-H}s^{1/2-H'}I^{1/2-H,1/2-H'}t^{H-1/2}s^{H'-1/2}h,\ h\in L^2([0,1]^2),$$

где $I^{\alpha,\beta}f(x,y) = \dfrac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\displaystyle\int_0^x\int_0^y (x-u)^{\alpha-1}(y-v)^{\beta-1}f(u,v)dudv$,

Γ – функция Ейлера, α, $\beta > 0$, $f\in L([0,1]^2)$.

Обратный оператор $K_{H,H'}^{-1}$ определяется таким образом:

$$K_{H,H'}^{-1}h(t,s) = t^{1/2-H}s^{1/2-H'}D^{1/2-H,1/2-H'}t^{H-1/2}s^{H'-1/2}D^{2H,2H'}h,$$

где $D^{\alpha,\beta}f(x,y) = \dfrac{1}{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(1-\beta)}\dfrac{\partial^2}{\partial x\partial y}\displaystyle\int_0^x\int_0^y \frac{f(u,v)}{(x-u)^{\alpha}(y-v)^{\beta}}dudv$.

Пусть $a(t, s, x, u)$ удовлетворяет таким условим:

1) $a(t, s, x, u)$ есть $\aleph\times\Im\times\aleph_{\tilde{U}}$ – измеримая функция;

2) $\forall\ (t,s)\in A$ функция $a(t, s, x, u)$ есть $\Im\times\aleph_{\tilde{U}}$ – измеримой;

3) $\forall\ (t,s)\in A$, $x\in C$ функция $a(t, s, x, u)$ – непрерывна на $\tilde{U}$;

4) $\forall\ (t,s)\in A$, $x\in C$ множество $a(t, s, x, \tilde{U}) = \{a(t, x, u),\ u\in \tilde{U}\}$ выпуклое и замкнутое;

5) $\exists L > 0$, такое, что

$$|a(t, s, x, u)|^2 \le L(1+\|x\|^2);$$

6) $\exists M > 0$, такое, что

$$|K^{-1}(\int_0^t\int_0^s a(\alpha,\beta,x,u)d\alpha d\beta)|^2\le M(1+\|x\|^2),$$

где $\|x\|$ – норма в $C([0,1]^2)$.

Вопрос существования слабого решения уравнения (1) был исследован в [3], где получен следующий результат.

Теорема 1. Пусть выполнено условие 5) для $a(t, s, x, u)$. Тогда уравнение (1) имеет слабое решение.

Приведем формулирования теоремы Гирсанова для дробного винеровского поля [3] и леммы [4], которые нам понадобятся в дальнейшем.

Теорема 2. Пусть поле $\eta=\{\eta_t,\ z\in A\}$ с интегрированной траекторией и $\tilde{B}_z^{H,H'} = B_z^{H,H'} + \int\limits_{[0,z]} u_y dy$.

Предположим, что:

1) $\int\limits_{[0,z]} u_y dy \in I^{H+1/2,H'+1/2}(L^2(\mathrm{A}))$ почти наверное;

2) $E\zeta=1$,

где $$\zeta = \exp\left\{ -\int\limits_{[0,1]^2} \left(K_{H,H'}^{-1} \int\limits_{[0,z]} u_y dy \right)(z) dW_z - \frac{1}{2} \int\limits_{[0,1]^2} \left(K_{H,H'}^{-1} \int\limits_{[0,z]} u_y dy \right)^2 (z) dz \right\}.$$

Тогда поле $\tilde{B}_z^{H,H'}$ – $\Re_z$ – дробное винеровское поле с параметрами Харста (H,H') по новой вероятности $\tilde{P}$, определенной как $\frac{d\tilde{P}}{dP} = \zeta$.

Лемма 1. Пусть $\xi_n \geq 0$, $n=1, 2, \ldots$, – последовательность случайных величин, таких, что $\xi_n \to \xi$ за вероятностью при $n\to\infty$. Если $E\xi_n=E\xi=c$, то

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{E}\,|\xi_n - \xi| = 0.$$

Положим $a_u(t,s,x)=a(t,s,x,u(t,x))$, $(t,s)\in[0,1]^2$, $x\in C$, $u\in \tilde{U}$.

Зафиксируем вероятностное пространство $(\Omega, \Re, P_0)$ с винеровским полем $W=(Wz,\ \Re_z,\ P_0)$.

Определим множество D таким образом:

$$D = \exp\{\zeta_{0,0}^{1,1}(a_u),\ u\in U\},$$

где

$$\zeta_{0,0}^{1,1}(a_u) = \int\limits_{[0,1]^2} (K_{H,H'}^{-1} \int\limits_0^t \int\limits_0^s a_u(\alpha,\beta,W) d\alpha d\beta) dW(t,s) -$$
$$-\frac{1}{2} \int\limits_{[0,1]^2} (K_{H,H'}^{-1} \int\limits_0^t \int\limits_0^s a_u(\alpha,\beta,W)\, d\alpha\, d\beta)^2\, dtds.$$

Множество G определим следующим образом:

$$G=\{a_n: E exp\,\zeta^{1,1}_{0,0}\ (a_n)=1\}.$$

Теорема 3. Пусть выполнены условия 1)–6) для функционала $a(t,s,x,u)$, множество G замкнуто в смысле сходимости по вероятности. Тогда существует управление $u^*\in U$, такое, что

$$F(u^*)=\inf_{u\in U} F(u).$$

Доказательство. Докажем, что множество плотностей D – слабый компакт в пространстве $L_1([0,1]^2)$. Для этого покажем, что D равномерно ограниченное и слабо замкнутое множество в $L_1([0,1]^2)$**.**

Действительно из свойства 6) функционала a, неравенства Иенсена и теоремы 2 Гирсанова для дробных винеровских полей вытекает следующее.

Существует константа $\gamma^*>1$ такая, что

$$\sup_{u\in U} E_0 \exp\{\gamma^*\,\zeta^{1,1}_{0,0}\ (a_u)\}<\infty.$$

Докажем теперь замкнутость множества D в пространстве L_1.

Пусть последовательность элементов $\exp\zeta^{1,1}_{0,0}\ (a_n)\in D$ сходится к $\rho\in L_1$ по вероятности. Имеем, что $E\exp\zeta^{1,1}_{0,0}\ (a_n)=1$ и $E\rho=1$. Тогда по лемме 1 имеем, что

$$\lim_{n\to\infty} E\left|\exp\zeta^{1,1}_{0,0}\ (a_n)-\rho\right|=0,$$

откуда вытекает замкнутость множества D в пространстве L_1.

Следовательно, множество D слабо компактно в пространстве L_1. Функционал $F(u)$ является непрерывным. Доказательство данной теоремы вытекает из того, что непрерывная на компакте функция достигает своего минимума на компакте.

Теорема доказана.

Выводы. В работе исследовано дробное винеровское поле, рассмотрена задача управления решением стохастического дифференциального уравнения. Доказана теорема существования оптимального управления полями, удовлетворяющие стохастическим уравнениям с дробным винеровским полем.

Т.В. Пепеляєва

ПРО ОДНУ ЗАДАЧУ КЕРУВАННЯ СТОХАСТИЧНОЮ ДИНАМІЧНОЮ СИСТЕМОЮ

Досліджено стохастичне диференційне рівняння з дробовим вінерівським полем. Доведено теорему існування оптимального керування розв'язком відповідного рівняння.

T.V. Pepeljaeva

ABOUT SOME CONTROL PROBLEM OF THE STOCHASTIC DYNAMIC SYSTEM

The stochastic differential equation with the fractional Wiener sheet is investigated. The existence theorem of optimal control of the corresponding equation solution is proved.

1. *Дериева Е.Н.*, *Пепеляева Т.В.* Об одной задаче управления случайными процессами // Кибернетика и системный анализ. – 2004. – № 1. – С. 116–121.
2. *Пепеляева Т.В.* Теорія оптимальних рішень. – 2004. – № 3. – С. 133–141.
3. *Erraoui M.*, *Nualart D.*, *Ouknine Yo.* Hyperbolic stochastic partial differential equation with additive fractional brownian sheet // Barcelona: Math. Prepr. Ser. – 2002. – N 307. – 19 p.
4. *Кнопов П.С.* Оптимальные оценки параметров стохастических систем. – Киев: Наук. думка, 1981. – 151 с.

Получено 23.03.2009