УДК 539.3

Колебания круглой линейно-вязкоупругой трехслойной пластинки

А. Г. Горшков[а], Э. И. Старовойтов[б], А. В. Яровая[б]

[а] Московский государственный авиационный институт, Москва, Россия

[б] Белорусский государственный университет транспорта, Гомель, Беларусь

Рассмотрены свободные и вынужденные колебания круглой трехслойной вязкоупругой несимметричной по толщине пластинки. Для описания кинематики пакета приняты гипотезы ломаной нормали. Заполнитель – легкий. Аналитическое решение получено с помощью метода усреднения в динамических задачах вязкоупругости с использованием гипотезы подобия ядер релаксации материалов слоев.

Обозначения

h_k	–	толщина k-го слоя ($k = 1, 2, 3$)
$\psi(x,t)$	–	сдвиг в заполнителе
$q(r,t)$	–	внешняя возмущающая распределенная нагрузка
$w(r,t)$	–	прогиб пластинки
$u(r,t)$	–	радиальное перемещение срединной плоскости заполнителя
G_k	–	модуль сдвига
G_k^*	–	оператор линейной вязкоупругости
$\Gamma_k(t)$	–	ядра релаксации материалов слоев пластинки
ρ_k	–	плотность материала k-го слоя
r_0	–	радиус пластинки
v_n	–	фундаментальная ортонормированная система собственных функций
d_n	–	нормировочный множитель
J_0, I_0	–	функции Бесселя и Макдональда нулевых порядков
β_n	–	собственные числа
ε_1	–	некоторый малый параметр
ω_n	–	частоты собственных колебаний
R_{cn}, R_{sn}	–	косинус- и синус-образы Фурье ядра $k_n\Gamma_3(t)$
A_n, B_n	–	константы интегрирования пластинки
$U_2(x,y)$	–	функция Ломмеля двух переменных
δ_{nk}	–	дельта-функция Кронекера

Рассматривается несимметричная по толщине круглая трехслойная пластинка, материалы слоев которой в процессе деформирования проявляют наследственные линейно-вязкоупругие свойства. Система координат $r\varphi z$ связывается со срединной плоскостью заполнителя (рис. 1). Толщины несущих слоев $h_1 \neq h_2$, в легком заполнителе $h_3 = 2c$. Для описания кинематики пакета приняты гипотезы ломаной нормали: в несущих слоях справедливы гипотезы Кирхгофа, в заполнителе нормаль остается прямолинейной, не изменяет длину, но поворачивается на некоторый дополнительный угол $\psi(r,t)$. Перпендикулярно к пластинке на внешний слой действует внешняя возмущающая распределенная нагрузка $q(r,t)$. Прогиб $w(r,t)$ пластинки и радиальное перемещение $u(r,t)$ срединной плоскости заполнителя замыкают систему искомых функций.

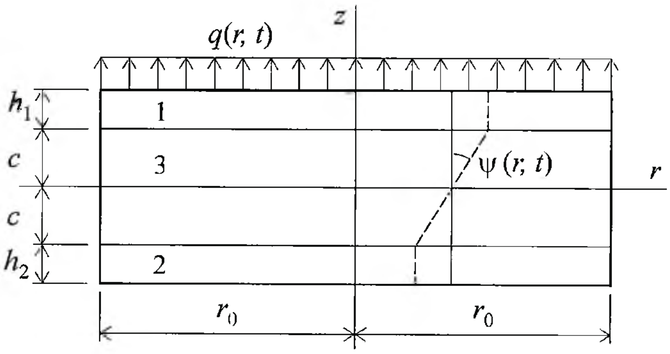

Рис. 1. Поперечное сечение пластинки.

Система уравнений, описывающая движение соответствующей упругой пластинки без учета инерции вращения нормали, получена ранее [1] с помощью вариационного принципа Гамильтона. Из нее формально следуют интегро-дифференциальные уравнения для линейно-вязкоупругой пластинки после замены модулей сдвига G_k операторами линейной вязкоупругости G_k^*:

$$G_k^* f(t) \equiv G_k(1-\Gamma_k^*)f(t) \equiv G_k\left(f(t) - \int_0^t \Gamma_k(t-\tau)f(\tau)d\tau\right),$$

где k – номер слоя.

В результате получим

$$\begin{cases} L_2(a_1^* u + a_2^* \psi - a_3^* w_{,r}) = 0; \\ L_2(a_2^* u + a_4^* \psi - a_5^* w_{,r}) = 0; \\ L_3(a_3^* u + a_5^* \psi - a_6^* w_{,r}) - M_0 \ddot{w} = -q, \end{cases} \tag{1}$$

где коэффициенты a_i^* и дифференциальные операторы L_2 (оператор Бесселя), L_3 определяются соотношениями

$$K_k + \frac{4}{3}G_k^* \equiv K_k^+; \quad K_k - \frac{2}{3}G_k^* \equiv K_k^-;$$

$$\begin{cases} a_1^* = \sum_{k=1}^{3} h_k K_k^+; \\ a_2^* = c(h_1 K_1^+ - h_2 K_2^+); \\ a_3^* = h_1\left(c + \dfrac{h_1}{2}\right)K_1^+ - h_2\left(c + \dfrac{h_2}{2}\right)K_2^+; \\ a_4^* = c^2\left(h_1 K_1^* + h_2 K_2^+ + \dfrac{2}{3} c K_3^+\right); \\ a_5^* = c\left[h_1\left(c + \dfrac{h_1}{2}\right)K_1^+ + h_2\left(c + \dfrac{h_2}{2}\right)K_2^+ + \dfrac{2}{3} c^2 K_3^+\right]; \\ a_6^* = h_1\left(c^2 + ch_1 + \dfrac{h_1^2}{3}\right)K_1^+ + h_2\left(c^2 + ch_2 + \dfrac{h_2^2}{3}\right)K_2^+ + \dfrac{2}{3} c^3 K_3^+; \\ L_2(g) \equiv \left(\dfrac{1}{r}(rg)_{,r}\right)_{,r} \equiv g_{,rr} + \dfrac{g_{,r}}{r} - \dfrac{g}{r^2}; \\ L_3(g) \equiv \dfrac{1}{r}(rL_2(g))_{,r} \equiv g_{,rr} + \dfrac{2g_{,rr}}{r} - \dfrac{g_{,r}}{r^2} + \dfrac{g}{r^3}; \end{cases} \tag{2}$$

запятая в нижнем индексе обозначает операцию дифференцирования по следующей за ней координате; две точки над буквой – вторую производную по времени; $\Gamma_k(t)$ – ядра релаксации материалов слоев; $M_0 = (\rho_1 h_1 + {}$ ${}+\rho_2 h_2 + \rho_3 h_3) r_0^2$; ρ_k, h_k– плотность материала и толщина k-го слоя; r_0 – радиус пластинки.

В дальнейшем будем предполагать, что ядра релаксации материалов слоев пластинки подобны и их можно выразить через ядро релаксации заполнителя:

$$\Gamma_k(t) = l_k \Gamma_3(t), \quad l_k = \text{const}. \tag{3}$$

Относительно ядра $\Gamma_3(t)$ далее полагаем, что оно пропорционально некоторому малому положительному параметру, т.е. удовлетворяет условию

$$0 \le \int_0^t \Gamma_3(\tau) d\tau << 1, \quad \Gamma_3(\tau) \ge 0. \tag{4}$$

Распределенная нагрузка $q(r,t)$ считается малой и представляется в виде разложения в ряд по фундаментальной ортонормированной системе собственных функций v_n, построенной при решении соответствующей задачи теории упругости [1]:

$$q(r,t) = \varepsilon_1 M_0 \sum_{n=0}^{\infty} v_n q_n(t), \tag{5}$$

$$v_n \equiv v_n(r) \equiv \frac{1}{d_n}\left[J_0(\beta_n r) - \frac{J_0(\beta_n)}{I_0(\beta_n)} I_0(\beta_n r)\right],$$

где d_n – нормировочный множитель; J_0, I_0 – функции Бесселя и Макдональда нулевых порядков; β_n – собственные числа; ε_1 – некоторый малый параметр.

В операторах линейной вязкоупругости a_m^* $(m = 1, ..., 6)$, приведенных в (2), можно выделить ядро релаксации заполнителя. Тогда

$$a_m^* = a_m - a'_m \Gamma_3^*, \tag{6}$$

где

$$a_1 = \sum_{k=1}^{3} K_{k0}; \quad a_2 = c(K_{10} - K_{20}); \quad a_3 = \sum_{k=1}^{3} K_{k1};$$

$$a_4 = K_{32} + c^2(K_{10} + K_{20}); \quad a_5 = K_{32} + c(K_{11} - K_{21}); \quad a_6 = \sum_{k=1}^{3} K_{k2};$$

$$a'_1 = \frac{4}{3}\sum_{k=1}^{3} l_k G_{k0}; \quad a'_2 = \frac{4}{3} c(l_1 G_{10} - l_2 G_{20}); \quad a'_3 = \frac{4}{3}\sum_{k=1}^{3} l_k G_{k1};$$

$$a'_4 = \frac{4}{3}(G_{32} + c^2(l_1 G_{10} + l_2 G_{20})); \quad a'_5 = \frac{4}{3}(G_{32} + c(l_1 G_{11} - l_2 G_{21}));$$

$$a'_6 = \frac{4}{3}\sum_{k=1}^{3} l_k G_{k2};$$

$$K_{km} = \int_{h_k} \left(K_k + \frac{4}{3} G_k\right) z^m dz; \quad G_{km} = \int_{h_k} G_k z^m dz \quad (m = 0, 1, 2).$$

Решение системы интегро-дифференциальных уравнений (1) предполагается искать в виде разложения в ряд по системе собственных функций v_n:

$$\begin{cases} w(r,t) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} v_n T_n(t); \\ \psi(r,t) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (b_1 v_{n,r} + C_1 r + C_2 / r) T_n(t); \\ u(r,t) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (b_2 v_{n,r} + C_3 r + C_4 / r) T_n(t). \end{cases} \tag{7}$$

Константы интегрирования C_1, C_2, C_3, C_4 появляются после двукратного интегрирования каждого из первых двух уравнений системы (1). Причем в дальнейшем следует положить $C_2 = C_4 = 0$, исходя из условия гладкости решения в начале координат.

Подстановка выражений (3), (5)–(7) в третье уравнение системы (1) приводит к следующему уравнению относительно неизвестной функции $T_n(t)$:

$$L_3(a_3(b_1 v_{n,r} + C_1 r) + a_5(b_1 v_{n,r} + C_3 r) - a_6 v_{n,r}) T_n - M_0 v_n \ddot{T}_n =$$

$$= -\varepsilon_1 M_1 v_n q_n + L_3(a_3'(b_1 v_{n,r} + C_1 r) + a_5'(b_2 v_{n,r} + C_3 r) - a_6' v_{n,r}) \Gamma_3^* T_n, \quad (8)$$

где

$$\Gamma_3^* T_n \equiv \int_0^t \Gamma_3(t-\tau) T_n(\tau) d\tau; \quad b_1 = \frac{a_3 a_4 - a_2 a_5}{a_1 a_4 - a_2^2}; \quad b_2 = \frac{a_1 a_5 - a_2 a_3}{a_1 a_4 - a_2^2}.$$

Поскольку функции v_n являются собственными, для них справедливо соотношение

$$L_3(a_3(b_1 v_{n,r} + C_1 r) + a_5(b_1 v_{n,r} + C_3 r) - a_6 v_{n,r}) = -M_0 \omega_n^2 v_n,$$

где ω_n – частоты собственных колебаний, определяемые через собственные числа β_n [1]:

$$\omega_n^2 = \frac{\beta_n^4}{M^4}, \quad M^4 = \frac{M_0 a_1 (a_1 a_4 - a_2^2)}{(a_1 a_6 - a_3^2)(a_1 a_4 - a_2^2) - (a_1 a_5 - a_2 a_3)^2}.$$

По аналогии для оператора в правой части уравнения (8) можно записать

$$L_3(a_3'(b_1 v_{n,r} + C_1 r) + a_5'(b_1 v_{n,r} + C_3 r) - a_6' v_{n,r}) = -M_0 \omega_n'^2 v_n, \quad (9)$$

где величины типа частот ω_n' определяются через обобщенные собственные числа β_n' по аналогичным формулам,

$$\omega_n'^2 = \frac{(a_1' a_6' - a_3'^2)(a_1' a_4' - a_2'^2) - (a_1' a_5' - a_2' a_3')^2}{a_1'(a_1' a_4' - a_2'^2) M_0} \beta'^4.$$

Величины β_n', как и собственные числа β_n, определяются из трансцендентных алгебраических уравнений, получаемых при удовлетворении граничным условиям [1], если параметры a_m заменить a_m'. При заделке края пластинки $\beta_n' = \beta_n$. Для решения уравнения (8) применим предложенный в [2] метод усреднения для динамических задач вязкоупругости. В этом случае предполагается существование в последнем члене уравнения малого параметра ε, который в окончательных результатах следует положить равным единице, так как малость интегральных членов обеспечивается условием (4). Поэтому в дальнейшем $\Gamma_3(t)$ заменяем $\varepsilon\Gamma_3(t)$. В результате для функции $T_n(t)$ из (8) с учетом (9) получаем уравнение

$$\ddot{T}_n + \omega_n^2 T_n = \varepsilon_1 q_n + \varepsilon\omega_n k_n \int_0^t \Gamma_3(t-\tau) T_n(\tau) d\tau, \quad k_n = \omega_n' / \omega_n. \tag{10}$$

Решение уравнения типа (10) изучено в монографии [2] для случая малых сил. Применительно к нашей задаче имеем

$$T_n = \left[A_n \cos\omega_n \left(1 + \frac{1}{2} R_{cn}\right) t + B_n \sin\omega_n \left(1 + \frac{1}{2} R_{cn}\right) t \right] \exp\left(-\frac{\omega_n}{2} R_{sn} t\right) +$$

$$+ \frac{2}{\omega_n} \sqrt{\frac{q_{1n}^2 + q_{2n}^2}{R_{cn}^2 + R_{sn}^2}} \cos(\omega_n t + \varphi_1 - \varphi_2), \tag{11}$$

где R_{cn}, R_{sn} – два основных Фурье-образа ядра $k_n \Gamma_3(t)$,

$$R_{cn} = k_n \int_0^\infty \Gamma_3(\tau) \cos(\omega_n \tau) d\tau; \quad R_{sn} = k_n \int_0^\infty \Gamma_3(\tau) \sin(\omega_n \tau) d\tau;$$

$$q_{1n} = \frac{1}{\omega_n} \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T q_n(t) \sin(\omega_n t) dt; \quad q_{2n} = \frac{1}{\omega_n} \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T q_n(t) \cos(\omega_n t) dt; \tag{12}$$

$$\varphi_1 = \operatorname{arctg} \frac{R_{sn}}{R_{cn}}; \quad \varphi_2 = \operatorname{arctg} \frac{q_{1n}}{q_{2n}}.$$

Константы A_n, B_n определяются из начальных условий движения пластинки:

$$A_n = \int_0^1 w(r,0) v_n r dr - \frac{2}{\omega_n} \sqrt{\frac{q_{1n}^2 + q_{2n}^2}{R_{cn}^2 + R_{sn}^2}} \cos(\varphi_1 - \varphi_2);$$

$$\tag{13}$$

$$B_n = \frac{1}{\omega_n \left(1 + \frac{1}{2} R_{cn}\right)} \left[\frac{\omega_n R_{sn}}{2} A_n + 2 \sqrt{\frac{q_{1n}^2 + q_{2n}^2}{R_{cn}^2 + R_{sn}^2}} \sin(\varphi_1 - \varphi_2) + \int_0^1 \dot{w}(r,0) v_n r dr \right].$$

Таким образом, поперечные колебания круглой трехслойной пластинки, слои которой обладают линейно-вязкоупругими свойствами, описываются выражениями (7) с учетом (11)–(13) и того, что

$$v_{n,r} = -\frac{\beta_n}{d_n}\left[J_1(\beta_n r) - \frac{J_0(\beta_n)}{I_0(\beta_n)} I_1(\beta_n r)\right];$$

$$\{C_1, C_3\} = \{b_1, b_2\}\frac{\beta_n}{d_n}\left[J_1(\beta_n) - \frac{J_0(\beta_n)}{I_0(\beta_n)} I_1(\beta_n)\right].$$

В качестве примера определим параметры колебаний для частного случая симметричной по толщине трехслойной пластинки: $h_1 = h_2; K_1 = K_2;$ $G_1 = G_2; R_1(t) \equiv R_2(t)$, находящейся под действием “резонансной” нагрузки:

$$q(t) = D\cos\omega_k t + E\sin\omega_k t \quad (D, E, k - \text{const}).$$

Начальные условия движения для определенности принимаются следующими:

$$w(r, 0) = w_0 \sin\frac{\pi(1-r^2)}{2}; \quad \dot{w}(r, 0) = 0 \quad (w_0 - \text{const}). \tag{14}$$

Тогда характеристики движения (12), соответствующие k-й гармонике, будут

$$q_k(t) = D_k \cos\omega_k t + E_k \sin\omega_k t;$$

$$D_k = \frac{D}{Md_k\beta_k}\left[J_1(\beta_k) - \frac{J_0(\beta_k)}{I_0(\beta_k)} I_1(\beta_k)\right];$$

$$E_k = \frac{E}{Md_k\beta_k}\left[J_1(\beta_k) - \frac{J_0(\beta_k)}{I_0(\beta_k)} I_1(\beta_k)\right];$$

$$q_{1k} = \frac{E_k}{2\omega_k}, \quad q_{2k} = \frac{D_k}{2\omega_k}; \quad \varphi_2 = \operatorname{arctg}\frac{D_k}{E_k} \quad (q_{1n} = q_{2n} = 0,\ n \neq k).$$

Константы интегрирования определяются из соотношений (13) с помощью начальных условий (14):

$$A_n = \frac{w_0\beta_n^2}{\pi d_n}\left[U_2(\pi, \beta_n) - \frac{J_0(\beta_n)}{I_0(\beta_n)} U_2(\pi, i\beta_n)\right] -$$

$$-\frac{\delta_{nk}}{\omega_k^2}\sqrt{\frac{D_k^2 + E_k^2}{R_{ck}^2 + R_{sk}^2}}\cos(\varphi_1 - \varphi_2);$$

$$B_n = \frac{R_{sn}}{2\left(1 + \frac{1}{2}R_{cn}\right)} A_n + \frac{\delta_{nk}}{\omega_k^2\left(1 + \frac{1}{2}R_{cn}\right)}\sqrt{\frac{D_k^2 + E_k^2}{R_{ck}^2 + R_{sk}^2}}\sin(\varphi_1 - \varphi_2),$$

где $U_2(x,y)$ – функция Ломмеля двух переменных; δ_{nk} – дельта-функция Кронекера. Прогиб и относительный сдвиг в заполнителе следуют из соотношений (7). Радиальное перемещение срединной плоскости заполнителя можно положить равным нулю в силу симметрии пластинки по толщине.

Численно исследован логарифмический декремент колебаний R_{sn}, который характеризует демпфирующую способность трехслойной пластинки. График изменения величины R_{sn} / k_n в зависимости от относительной толщины c заполнителя показан на рис. 2. В защемленной по контуру трехслойной пластинке с увеличением толщины заполнителя логарифмический декремент нелинейно возрастает. В качестве материала несущих слоев использовали сплав Д-16Т, заполнителем служил фторопласт. Соответствующие механические характеристики материалов приведены в [3].

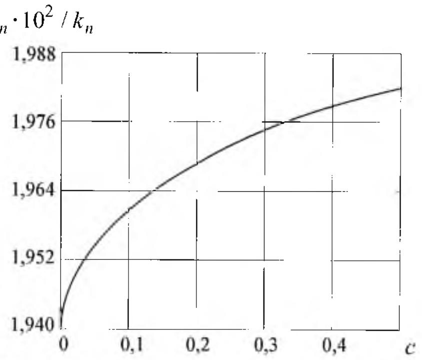

Рис. 2. Логарифмический декремент колебаний.

Работа выполнена при финансовой поддержке Фондов фундаментальных исследований Республики Беларусь и Российской Федерации.

Р е з ю м е

Розглянуто вільні та вимушені коливання круглої тришарової в’язкопружної несиметричної по товщині пластинки. Для опису кінематики пакета прийнято гіпотези ломаної нормалі. Заповнювач – легкий. Аналітичне рішення отримано за допомогою методу усереднення в динамічних задачах в’язкопружності з використанням гіпотези подібності ядер релаксації матеріалів шарів.

1. *Старовойтов Э. И.* Осесимметричные колебания круглой трехслойной пластинки, возбужденные тепловым ударом // Изв. АН БССР. Сер. Физ.-техн. наук. – 1988. – № 3. – С. 3 – 10.
2. *Ильюшин А. А., Победря Б. Е.* Основы математической теории термовязкоупругости. – М.: Наука, 1970. – 280 с.
3. *Старовойтов Э. И.* К описанию термомеханических свойств некоторых конструкционных материалов // Пробл. прочности. – 1988. – № 4. – С. 11 – 15.

Поступила 05. 09. 2000