

Резонанс второго порядка пластины, содержащей протяженные дефекты целостности

Н. П. Плахтиенко

Институт механики им. С. П. Тимошенко НАН Украины, Киев, Украина

Рассмотрена задача о вынужденных поперечных колебаниях прямоугольной пластины постоянной толщины, содержащей конечное число не пересекающихся поверхностных продольных дефектов целостности типа трещин с затупленными концами. На основе принципа Остроградского–Гамильтона и метода Рунца составлена система обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка, которая описывает вынужденные колебания системы при субгармоническом резонансе второго порядка.

Предложено приближенное трехчленное выражение закона колебаний по одной из форм пластины, что отвечает закону баланса подведенной и рассеянной энергии при вынужденных колебаниях. Приведены результаты численного моделирования резонанса второго порядка.

Рассматривается задача о вынужденных поперечных колебаниях прямоугольной пластины постоянной толщины h_0 , содержащей конечное число N не пересекающихся поверхностных протяженных дефектов целостности. Указанными дефектами могут быть либо обыкновенные трещины, либо разрывы целостности между поверхностью пластины и инородными включениями, содержащимися в ее однородном материале. В последнем случае концы разрывов считаем затупленными и в математическом отношении они не являются источником сингулярных особенностей для величин напряжения и деформаций в окрестности трещин [1]. В дальнейшем изложении ограничимся рассмотрением именно таких дефектов-трещин.

Предположим, что глубина дефектов Δ_n вдоль линии их пролегания – переменная: $\Delta_n = \Delta_n(x, y)$, $n = \overline{1, N}$. Очевидно, что жесткость пластины в окрестности пролегания трещин зависит от знака кривизны линий, трансверсальных по отношению к i -й трещине. Это обуславливает нелинейность рассматриваемой задачи. Механизм этой нелинейности порожден явлением циклического открывания и закрывания трещин. Можно считать, что при закрытой трещине изгибная жесткость пластины не изменяется, при открытой – имеет место локальное ослабление жесткости. Количественное ослабление можно интерпретировать как местное уменьшение толщины накопителя потенциальной энергии пластины, аппроксимируемой некоторой клинообразной областью с прямым углом у вершины и высотой, равной глубине Δ_n трещины, ширина основания этого клина равна $2\Delta_n$. Своей затупленной вершиной клин обращен внутрь пластины. Зададим некоторые параметры линий, ограничивающих клинообразную область ослабления. Пусть $L_n(x, y) = 0$ – замкнутая кривая, ограничивающая на поверхности пластины n -ю область ослабления (рис. 1). Указанная кривая имеет ось симметрии, проходящую точки от A_n до B_n , $n = \overline{1, N}$. Перпендикуляр, опущенный с кривой $L_n(x, y)$ на ось симметрии в точку $P(x, y)$, равен глубине

дефектов в этой точке пластины. Таким образом, сечение области ослабления плоскостью, перпендикулярной оси симметрии, является равнобедренным треугольником с прямым углом у вершины. Множество точек $P_i(x_i, y_i)$, удовлетворяющих условию $L_n(x_i, y_i) < 0$, будем называть множеством точек ослабления пластины и обозначать его D_n .

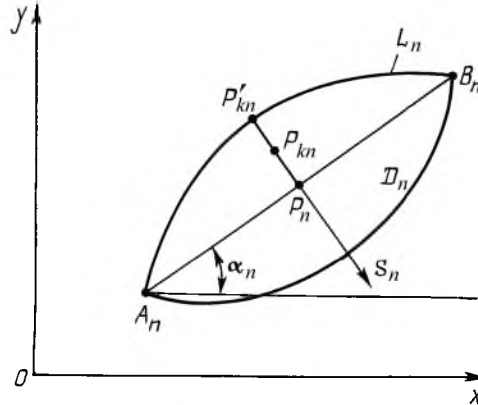


Рис. 1. Геометрические характеристики области ослабления от n -го поверхностного протяженного дефекта целостности пластины.

Определим функцию эффективной толщины пластины $h(x, y)$.
Для всех $P_k(x_k, y_k) \notin D_n$ имеем

$$h(x, y) = h_0 = \text{const.} \quad (1)$$

Для точек $P_k = P_{kn} \in D_n$ функцию $h(x, y)$ определим как разность $h_0 - \rho_{kn}$, где ρ_{kn} – кратчайшее расстояние между точкой $P_{kn}(x, y)$ и точкой P'_{kn} , лежащей на продолжении до пересечения с кривой $L_n(x, y) = 0$ перпендикуляра, опущенного с точки $P_{kn}(x, y)$ на ось симметрии кривой $L_n(x, y)$. Следовательно,

$$h(x, y) = h_0 - \rho_{kn}(x, y), \quad x, y \in D_n, \quad n = \overline{1, N}. \quad (2)$$

Выразим эффективную толщину пластины в областях ослабления через ее кривизну. Обозначим через $W(x, y)$ перемещение пластины в поперечном направлении, отнесенное к ее срединной поверхности. Считаем перемещение и наклоны сечения пластины малыми величинами по сравнению с ее толщиной. Пренебрегая величинами второго порядка малости, вычисляем кривизны $K_n(x, y, t)$ линий на пластине в направлении \vec{S}_n , перпендикулярном осям трещин A_nB_n :

$$K_n(x, y, t) = W''_{S_n S_n} = W''_{xx} \sin^2 \alpha_n + W''_{xy} \sin 2\alpha_n + W''_{yy} \cos^2 \alpha_n, \quad (3)$$

где α_n – угол наклона линии n -й трещины к оси Ox .

Считаем, что для тех точек линий $A_n B_n$, для которых $K_n(x, y, t)|_{A_n B_n} > 0$, трещина закрыта и, следовательно, сечение пластины в области D_n не ослаблено, при $K_n(x, y, t)|_{A_n B_n} < 0$ имеется локальное ослабление пластины.

Таким образом, толщина пластины в областях ослабления $D_n, n = \overline{1, N}$, является функцией координат x, y и времени t и может быть выражена таким равенством:

$$h_n(x, y) = h_0 + [h_n(x, y) - h_0] \frac{1}{2} \{1 - \text{sign}[W''_{S_n S_n}(x, y, t)]|_{A_n B_n}\}, \quad (4)$$

$$x, y \in D_n, n = \overline{1, N}.$$

Формулу (4) можно распространить на всю область пластины, формально положив $W''_{S_n S_n} > 0$, если $x, y \notin D_n, n = \overline{1, N}$.

Для сокращения выкладок целесообразно разрывную функцию $\text{sign } z$ выразить через непрерывную функцию $\text{arctg } z$ [2], положив $\text{sign } z = \frac{2}{\pi} \text{arctg } \mu z$, где $\mu \approx 10 / \Delta_n$ – большой параметр, выбираемый из условия, чтобы интеграл от производной сигнатурной функции на длине $0,2 \Delta_n$ был близок единице, например 0,995.

Функцию $h_n(x, y) = h_n(x, y, W''_{S_n S_n}(x, y)|_{A_n B_n})$ целесообразно представить в форме, содержащей малый параметр:

$$h_n(\cdot) = V_n(x, y) + \varepsilon U_n(x, y) \frac{2}{\pi} \text{arctg}(\mu W''_{S_n S_n}(x, y)|_{A_n B_n}), \quad n = \overline{1, N}, \quad (5)$$

где

$$V_n(x, y) = \frac{1}{2}(h_0 + h_n(x, y)), \quad \varepsilon U_n(x, y) = \frac{1}{2}(h_0 - h_n(x, y)). \quad (6)$$

Здесь $U_n(x, y)$ – малая по норме функция. Уравнения поперечных колебаний пластины составим, воспользовавшись вариационным принципом Остроградского–Гамильтона, а действие $S = T - \Pi$, где T, Π – кинетическая и потенциальная энергии пластины соответственно, будем минимизировать согласно методу Ритца

$$S = \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \sum_{n=0}^N \iint_{D_n} \left[m(x, y) \left(\frac{\partial W}{\partial t} \right)^2 - \right. \right. \\ \left. \left. - \chi \left(V_n(x, y) + \varepsilon U_n(x, y) \frac{2}{\pi} \text{arctg}(\mu W''_{S_n S_n}) \right)^3 \left(\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right)^2 \right) \right] \right\} dt$$

$$+2\sigma \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + 2(1-\sigma) \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \right)^2 + f(x,y,t)W \Bigg] dx dy dt, \quad (7)$$

где $\chi = \frac{E}{12(1-\sigma^2)}$; E и σ – соответственно модуль упругости и коэффициент Пуассона материала пластины; $m(x,y)$ – погонная масса пластины; $f(x,y,t)$ – распределенная нагрузка. Здесь индекс $n=0$ отвечает области пластины, не занятой подобластями D_n , в которой согласно изложенному выше следует формально полагать $W''_{S_0 S_0} > 0$.

Согласно методу Ритца, класс функций, на которых отыскивается минимум действия S , задается формулой

$$W(x,y) = \sum_{i=0}^M a_i(t) \psi_i(x,y), \quad (8)$$

$\psi_i(x,y)$ – известные координатные функции, выбираемые из условия, чтобы удовлетворялись геометрические условия на краях пластины; $a_i(t)$ – искомые функции времени, определяемые из условия минимума функционала (7).

Подставляя (8) в (7) и приравнивая нулю коэффициенты при вариациях δa_j , получаем систему уравнений

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^M (m_{ij} \ddot{a}_i + C1_{ij}(a_1, \dots, a_M, \varepsilon) a_i) + \\ & + \sum_{i,k=1}^M \varepsilon C2_{ikj}(a_1, \dots, a_n, \varepsilon) a_i a_k = e_j(t), \quad j = \overline{1, M}; \end{aligned} \quad (9)$$

$$m_{ij} = \int_0^a \int_0^b m(x,y) \psi_i(x,y) \psi_j(x,y) dx dy; \quad (10)$$

$$\begin{aligned} C1_{ij}(a_i, \dots, a_M, \varepsilon) = & \chi \sum_{n=0}^N \left\{ \iint_{D_n} (V_n(x,y) + \varepsilon U_n(x,y)) \times \right. \\ & \left. \times \frac{2}{\pi} \arctg \left(\mu \sum_{s=1}^M a_s(t) \varphi_{sn}(x) \right)^3 \Phi_{ij}(x,y) dx dy \right\}; \end{aligned}$$

$$\varphi_{sn} = \psi_s(x, y_n(x)), \quad y_n(x) = \operatorname{tg} \alpha_n(x - x_{A_n}) + y_{A_n}; \quad (11)$$

$$\Phi_{ij}(x, y) = \psi''_{ixx}\psi''_{jxx} + \psi''_{iyy}\psi''_{jyy} + \sigma\psi''_{ixx}\psi''_{jyy} + 2(1 - \sigma)\psi''_{ixy}\psi''_{jxy}; \quad (12)$$

$$\begin{aligned} & \chi C2_{ikj}(a_1, \dots, a_n \varepsilon) = \\ & = \varepsilon \chi \frac{3}{2} \sum_{n=0}^N \left\{ \iint_{D_n} \left[V_n(x, y) + \varepsilon U_n(x, y) \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} \left(\mu \sum_{s=1}^M a_s(t) \varphi_{sn}(x) \right) \right]^2 \times \right. \\ & \left. \times \frac{2}{\pi} \mu \left[1 + \left(\mu \sum_{s=1}^M a_s(t) \varphi_{sn}(x) \right)^2 \right]^{-1} \Phi_{ik}(x, y) \varphi_{jn}(x) dx dy \right\}; \quad (13) \end{aligned}$$

$$e_j(t) = \frac{1}{2} \int_0^a \int_0^b f(x, y, t) \varphi_j(x, y) dx dy, \quad (14)$$

где a, b – длина и ширина пластины.

Систему уравнений (9) необходимо дополнить членами вида $\sum b_{ij} \dot{\alpha}_i$ в левой части равенств, отображающими наличие диссипации энергии при колебаниях пластины, где b_{ij} – коэффициенты диссипативной функции Рэлея $\operatorname{Re} = \sum_{i,j=1}^M b_{ij} \dot{\alpha}_i \dot{\alpha}_j$.

Как видно, численный анализ системы уравнений (9) сопряжен с вычислением коэффициентов $C1_{ij}(\cdot)$, $C2_{ikj}(\cdot)$ на каждом шаге интегрирования, что делает вычисление чрезмерно временнозатратным. Затраты времени можно существенно уменьшить, если использовать представление координатных функций $\psi_i(x, y)$ в виде произведения двух функций, каждая из которых зависит от одной переменной

$$\psi_i(x, y) = X_i(x) Y_i(y). \quad (15)$$

При малых колебаниях члены уравнений (9), вводимые трехиндексными коэффициентами, имеют второй порядок малости и могут быть опущены, при этом задача остается нелинейной, благодаря зависимости коэффициентов $C1_{ij}(\cdot)$ от искомых функций. Если в методе Ритца воспользоваться одночленным представлением (8), то слагаемые с трехиндексными коэффициентами не появятся в силу свойств дельта-функции $\int_{-\Delta}^{\Delta} \delta(x) x^n dx = 0$.

Одночленное представление (8) является физически содержательным при расчете вынужденных резонансных колебаний удлиненных пластин, у которых спектр продольных колебаний хорошо разделен. В этом случае коэффициент $C1(a_1, \varepsilon)$ можно представить в виде

$$C1_{11}(a_1 \varepsilon) = \overline{C1_{11}}(\varepsilon) + \overline{\varepsilon C1_{11}}(\varepsilon) \text{sign}(a_1), \quad (16)$$

где

$$\overline{C1_{11}}(\varepsilon) = \chi \sum_{n=0}^N \iint (V_n^3(x, y) + 3V(x, y)\varepsilon^2 U_n^2(x, y)) \Phi_{11}(x, y) dx dy; \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \overline{\varepsilon C1_{11}}(\varepsilon) = \varepsilon \chi \sum_{n=0}^N \iint_{D_n} [3U_n(x, y)V_n^2(x, y) + \varepsilon^2 U_n^3(x, y)] \times \\ \times \Phi_{11}(x, y) \text{sign} \varphi_{1n}(x) dx dy. \end{aligned} \quad (18)$$

Точное определение величин $\overline{C1_{11}}(\varepsilon)$, $\overline{\varepsilon C1_{11}}(\varepsilon)$ достаточно громоздко, что существенно ограничивает возможность аналитического исследования. Однако, учитывая наличие малого параметра ε , условия $\rho < h_0$, а также малость площадей областей D_n , указанные интегралы можно просто вычислить с погрешностью, пропорциональной ε^2 , $(\rho / h_0)^2$. В качестве примера рассмотрим однородную прямоугольную пластинку постоянной толщины, шарнирно опертую по краям. В этом случае $m(x, y) = m_0 = \text{const}$,

$$\psi_1(x, y) = \sin \frac{p\pi x}{a} \sin \frac{q\pi y}{b}, \quad p, q - \text{целые числа}. \quad (19)$$

При вычислении коэффициентов $\overline{C1_{ij}}$ приходится иметь дело с интегралами вида

$$\left. \begin{aligned} J_{sn} \\ J_{cn} \end{aligned} \right\} = \sum_{n=0}^N \iint_{D_n} \frac{\sin^2 \frac{p\pi x}{a} \sin^2 \frac{q\pi y}{b}}{\cos^2 \frac{p\pi x}{a} \cos^2 \frac{q\pi y}{b}} \rho_n(x, y) dx dy. \quad (20)$$

Для случая, когда длина стоячих волн значительно превышает ширину области $D_n \left(\frac{a}{p}, \frac{b}{q} \gg 2 \max_{x, y \in D_n} \rho_x(x, y) \right)$, указанные интегралы можно приближенно представить в виде

$$\begin{aligned} J_{sn} &= S_n(l_n, \alpha_n, a, b) V_n, \\ J_{cn} &= C_n(l_n, \alpha_n, a, b) V_n, \quad n = \overline{J, N}, \end{aligned}$$

где $S_n(\cdot)$, $C_n(\cdot)$ – средние значения произведений квадратов соответственно синусов и косинусов, на областях D_n ; l_n – длина n -й трещины; V_n – объем области ослабления от n -й трещины. Вычисление величин $S_n(\cdot)$, $C_n(\cdot)$ также достаточно громоздко. Для преодоления этого область D_n заменим крестообразной областью, составленной из двух прямоугольников D_{S_n} , D_{C_n} шириной r_n с ограничивающими их линиями, параллельными координатным осям с суммарной площадью, совпадающей с площадью ослабления D_n . Центры тяжести площадей прямоугольников и областей D_n совпадают. Общая площадь ослабления пластины от n -й трещины вычисляется как удвоенная площадь под кривой $\rho_n(x, y)$, определяющей максимальную глубину n -й трещины:

$$S_n = 2 \int_{A_n}^{B_n} \rho_n(x, y_n(x)) dx. \quad (21)$$

В этом случае простые вычисления дают

$$r_n = S_n (l_n \sin \alpha_n + l_n \cos \alpha_n)^{-1}.$$

Таким образом, интегрирование по области D_n заменяем интегрированием по областям D_{S_n} , D_{C_n} . Обозначим x_{T_n} , y_{T_n} – координаты центра тяжести площади области D_n n -й трещины, тогда короткие неэлементарные вычисления дают

$$\left. \begin{aligned} S_n(l_n, \alpha_n, a, b) \\ C_n(l_n, \alpha_n, a, d) \end{aligned} \right\} = \frac{1}{2(\sin \alpha_n + \cos \alpha_n)} \left[\sin \alpha_n \left(1 \pm \cos \frac{2\pi p x_{T_n}}{a} \right) \times \right. \\ \times \left(1 \pm \frac{b}{l_{sn} \pi j} \cos \frac{2\pi q y_{T_n}}{b} \sin \frac{\pi q l_{sn}}{b} \right) + \cos \alpha_n \left(l \pm \cos \frac{2\pi q}{b} y_{T_n} \right) \times \\ \left. \times \left(l \pm \frac{a}{l_{cn} \pi i} \cos \frac{2\pi p x_{T_n}}{a} \sin \frac{\pi p l_{cn}}{a} \right) \right]. \quad (22)$$

Здесь “+” относится к безразмерной функции $S_n(\cdot)$, “–” – к функции $C_n(\cdot)$.

Таким образом, пренебрегая в формуле (17) величинами, пропорциональными ε^2 , находим

$$\overline{C1}_{11} = \chi \left[\frac{1}{4} ab h_0^3 (R + P) - 3h_0^2 \sum_{n=1}^N V_n (S_n(\cdot)R + C_n(\cdot)P) \right], \quad (23)$$

где

$$R = \pi^2 \left[\left(\frac{p}{a} \right)^4 + \left(\frac{q}{b} \right)^4 + 6 \left(\frac{p}{a} \right)^2 \left(\frac{q}{b} \right)^2 \right]; \quad P = 2\pi^4 (1 - \sigma) \left(\frac{p}{a} \right)^2 \left(\frac{q}{b} \right)^2.$$

При вычислении величины $\overline{\varepsilon C_{111}}$ по формуле (18) необходимо определять области знакопостоянства функций вида $\varphi_{sn}(x) = \psi_s(x, y_n(x))$, отвечающих учету в ряде (8) лишь одного s -го члена. В рассматриваемом случае

$$\begin{aligned} \varphi_{sn}(x) = & - \left(\frac{p^2}{a^2} \sin^2 \alpha_n + \frac{q^2}{b^2} \cos^2 \alpha_n \right) \pi^2 \sin \frac{p\pi x}{a} \sin \frac{q\pi y_n(x)}{b} + \\ & + pq \frac{\pi^2}{ab} \sin 2\alpha_n \cos \frac{p\pi x}{a} \cos \frac{q\pi y_n(x)}{b}. \end{aligned} \quad (24)$$

При произвольных $p \neq 0, q \neq 0, \alpha_n \neq 0, \frac{\pi}{2}$ это можно сделать только численно.

Рассмотрим частный случай N параллельных оси Oy дефектов $\alpha_n = \frac{\pi}{2}, n = \overline{l, N}$. В этом случае знак $\varphi_{sn}(x)$ определяется первым слагаемым формулы (24), следовательно, $\text{sign } \varphi_{sn}(x) = -1$, и после неэлементарных вычислений находим

$$\overline{\varepsilon C_{111}} = \varepsilon \frac{2h_0^2}{3} \sum_{n=1}^N V_n (S_n(\cdot)R + C_n(\cdot)P). \quad (25)$$

Пусть на пластину действует распределенная нагрузка, изменяющаяся по гармоническому закону, тогда дифференциальное уравнение для определения функции одночленного представления прогиба пластины по методу Ритца имеет вид

$$m_{11}\ddot{a}_1 + b_{11}\dot{a}_1 + (\overline{C_{111}} + \overline{\varepsilon C_{111}} \text{sign } a_1) a_1 = e_1 \cos \theta t. \quad (26)$$

В этом случае приближенное трехчленное периодическое решение уравнения (26) можно представить в виде

$$a_1(\tau) = A_0 + A_1 \cos(\nu\tau + \beta_1 + \beta_{\text{кор}}) + A_2 \cos(2\nu\tau + \beta_2), \quad (27)$$

где согласно работам [3, 4] имеем

$$A_1 = f_1 [(\Omega_c^2 - \nu^2)^2 + \lambda^2 \nu^2]^{-1/2}, \quad \text{tg } \beta_1 = \nu \lambda (\nu^2 - \Omega_c^2)^{-1},$$

$$\Omega_c = 2 \frac{\Omega_1 \Omega_2}{\Omega_1 + \Omega_2}, \quad \Omega_{1,2}^2 = \frac{\overline{C1_{11}} \mp \varepsilon \overline{C1_{11}}}{m_{11}}, \quad \tau = \Omega_1 t,$$

$$\lambda = \frac{b_{11}}{m_{11} \Omega_1}, \quad f_1 = \frac{e_1}{m_{11} \Omega_1^2}, \quad \nu = \frac{\theta}{\Omega_1},$$

$$\beta_2 = \gamma_2 + 2\beta_1, \quad \operatorname{tg} \gamma_2 = \frac{2A_2 \lambda \nu}{\left(4A_2 \nu^2 - \frac{1}{2} \Phi_{01}(A_0, A_1, A_2)\right)} \frac{Q_{12}(A_0, A_1, A_2)}{Q_{22}(A_0, A_1, A_2)},$$

$$A_0 = q_{02} A_2, \quad A_2 = q_{21} A_1,$$

$$\left. \begin{array}{l} Q_{12}(A_0, A_1, A_2) \\ Q_{22}(A_0, A_1, A_2) \end{array} \right\} = \frac{1}{2} (\Phi_{20}(A_0, A_1, A_2) \pm \Phi_{22}(A_0, A_1, A_2)).$$

Здесь знак “+” (“-”) отвечает Q_{12} (Q_{22});

$$\Phi_{01}(A_0, A_1, A_2) = 2A_2 + \frac{4\Delta}{\pi} \left(\frac{\pi}{4} A_2 + A_0 - \frac{1}{6} \frac{A_0^3}{A_2^2} - \frac{A_0 A_1^2}{4A_2^2} \right),$$

$$\Phi_{20}(A_0, A_1, A_2) = \frac{\Delta}{\pi} \left(\frac{A_1^2}{2A_2} + \frac{A_0^2 A_1^2}{4A_2^3} + \frac{A_1^4}{24A_2^3} \right),$$

$$\Phi_{22}(A_0, A_1, A_2) = -\frac{\Delta}{\pi} \left(\frac{A_1^2}{2A_2} - \frac{7}{32} \frac{A_0^2 A_1^2}{A_2^3} - \frac{7}{192} \frac{A_1^4}{A_2^3} \right),$$

$$\Delta = \omega_2^2 - 1, \quad \omega_2^2 = \frac{\Omega_2^2}{\Omega_1^2}.$$

Отношение $q_{02} = A_0 / A_2$ определяется решением следующей системы уравнений методом последовательных приближений:

$$\frac{\Delta}{\pi} \left(\frac{A_0}{A_2} \right)^2 + \frac{A_0}{A_2} (\Delta + 2) + \frac{2\Delta}{\pi} W(A_0, A_1, A_2) = 0,$$

где

$$W(A_0, A_1, A_2) = \frac{2\Delta}{\pi} \left(\frac{A_1^2}{4A_2^2} + \frac{1}{64} \frac{A_1^4}{A_2^4} + \frac{1}{24} \frac{A_0^4}{A_2^4} + \frac{1}{2} \frac{A_0^2 A_1^2}{A_2^4} \right) + \frac{1}{6} \frac{A_0 A_2 D(\nu, \Omega_{c2})}{A_1^2 G(A_0, A_1)};$$

$$D(\nu, \Omega_{c2}) = -4\nu^2 + \Omega_{c2}^2; \quad \Omega_{c2}^2 = \Omega_c^2 - \frac{\Delta}{\pi} \frac{A_0 A_1^2}{A_2^3};$$

$$G(A_0, A_1) = \frac{15}{32} \left(\frac{A_0}{A_1} \right)^2 + \frac{15}{192}; \quad q_{21} = q_{21}(\nu) = Z^{-1/4};$$

$$Z = \frac{2\pi^2}{\Delta^2} \left(4\lambda^2 \nu^2 + \sqrt{16\lambda^4 \nu^4 + \frac{\Delta^2}{4\pi^2} \left(\frac{D}{G} \right)^2} \right).$$

За начальные приближения берутся значения q_{02}, q_{21} , отвечающие $D = 0$; $\beta_{\text{кор}}$ – корректирующая добавка к фазе первой гармоники решения (27), вводимая с целью сбалансирования рассеиваемой W_p и подводимой $W_{\text{п}}$ мощностей осциллятора (26) за один период колебаний*:

$$W_p = \int_0^{2\pi/\nu} \lambda \dot{a}^2(\tau) d\tau = \lambda \nu \pi (A_1^2 + 4q_{21}^2 A_1^2),$$

$$W_{\text{п}} = \int_0^{2\pi/\nu} f_1 \cos(\nu\tau) \dot{a}(\tau) d\tau = -\pi f A_1 \sin(\beta_1 + \beta_{\text{кор}}).$$

Приравнивая $W_p = W_{\text{п}}$, получаем

$$\beta_{\text{кор}} = -\arcsin \left[\frac{\lambda A_1 \nu (1 + 4q_{21}^2)}{f} \right] - \beta_1.$$

Как показывают численно-аналитические исследования (26) [3, 4], слабый резонанс наступает при $\left| \frac{K_2 - K_1}{\lambda K_2} \right| \approx 1 \dots 5$ с потерей изгибной жесткости на 1...5%, сильный резонанс имеет место при

$$\left| \frac{K_2 - K_1}{\lambda K_2} \right| \approx 10 \dots 50,$$

где

$$K_{1,2} = \overline{C1_{11}} \mp \varepsilon \overline{C1_{11}}.$$

Последний случай реализуется при большом числе односторонне расположенных трещин.

* Указанная корректировка фазы первой гармоники решения (27) выполнена по предложению члена редколлегии журнала проф. В. В. Матвеева.

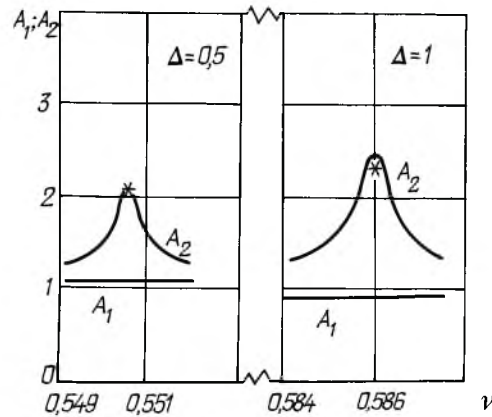


Рис. 2. Амплитудно-частотные характеристики первой и второй гармоники при сильном резонансе второго порядка пластины, ослабленной дефектами целостности.

На рис. 2 приведены амплитудно-частотные кривые для $A_1(\nu)$, $A_2(\nu)$, отвечающие сильному резонансу второго порядка при $\lambda = 0,02$, $\Omega_1 = 1$, $\Omega_2 = \sqrt{1,5}$, $\sqrt{2}$, $f_1 = 1$. Как видно, с увеличением Δ частотные кривые смещаются вправо и заметно возрастают. Звездочкой показаны амплитуды второй гармоники, полученные непосредственным интегрированием уравнения вида (26) методом Рунге-Кутты с постоянным шагом $\frac{\pi}{20\Omega_c}$. Случай

$\Delta = 0,5$ и 1 достаточно точно описывается приведенными формулами. Следует заметить, что амплитудно-частотные кривые сильного резонанса являются достаточно острыми, они расположены в диапазонах, которые на порядок уже, чем диапазон реализации главного резонанса. Последний имеет ширину $\nu_2 - \nu_1 \approx \lambda$, а резонанс второго порядка расположен в диапазоне $\nu_2 - \nu_1 \approx \lambda/20$.

Изложенные исследования обобщают и уточняют результаты работы [5] и могут быть полезны для решения вопросов оценки трещиноватости конструктивных элементов машин, приборов и строительных изделий, а также вопросов дефектоскопии [6].

Резюме

Розглянуто задачу про вимушені поперечні коливання прямокутної пластини постійної товщини, яка містить скінченне число поверхневих поздовжніх дефектів цілісності, що не перетинаються, типу тріщин із затупленими кінцями. На основі принципу Остроградського–Гамільтона і методу Рітца складено систему звичайних нелінійних диференціальних рівнянь другого порядку, що описує вимушені коливання системи при субгармонічному резонансі другого порядку.

Запропоновано наближений тричленний вираз закону коливань за однією з форм пластини, що відповідає закону балансу підведеної і розсіяної енергій при вимушених коливаннях. Приведено результати чисельного моделювання резонансу другого порядку.

1. *Мураками Ю.* Справочник по коэффициентам интенсивности напряжений. В 2 т. – М.: Мир, 1990. – 1112 с.
2. *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике для научных работников и инженеров. – М.: Наука, 1974. – 831 с.
3. *Плахтиенко Н. П.* К диагностике кусочно-постоянной жесткости при нелинейных резонансах // Прикл. механика. – 1991. – **27**, № 10. – С. 112 – 120.
4. *Плахтиенко Н. П.* Метод определения параметров кусочно-постоянной жесткости при нелинейных резонансных колебаниях // Там же. – 1993. – **29**, № 2. – С. 74 – 81.
5. *Плахтиенко Н. П., Ясинский С. А.* О резонансе второго порядка при колебаниях балки, содержащей поперечную трещину // Пробл. прочности. – 1995. – № 2. – С. 56 – 63.
6. *Цифанский С. А., Магоне М. А., Ожиганов В. М.* Об использовании нелинейных эффектов для обнаружения трещин в стержневых элементах конструкций // Дефектоскопия. – 1985. – № 3. – С. 77 – 82.

Поступила 16. 12. 98