УДК 539.56:621.81.539

Напряженное состояние элементов конструкций в зоне концентраторов напряжений с трещинами при различных видах нагружения

С. В. Добровольский

Ижевский государственный технический университет, Ижевск, Россия

Предлагается метод определения полей местных напряжений и упругих деформаций в окрестности мелких, промежуточных и глубоких трещин при растяжении, изгибе или кручении призматических и цилиндрических брусьев с боковыми и кольцевыми надрезами. Получены соотношения, позволяющие определять значения коэффициентов интенсивности напряжений для таких трещин в зависимости от номинальных напряжений и размеров надреза и величину главных напряжений в зоне трещины в зависимости от коэффициента интенсивности напряжений и основных геометрических размеров для наиболее типичных концентраторов напряжений, характерных для реальных конструкций и условий нагружения.

Основы механики упругого деформирования и хрупкого разрушения материалов с трещинами развиты в работах [1–3]. Внутренняя поперечная трещина в растянутой бесконечной тонкой пластине моделируется предельно вытянутым элептическим отверстием, одна из осей которого и радиусы кривизны на второй оси стремятся к нулю. Для таких условий местное напряженно-деформированное состояние (НДС) в окрестности вершины трещины определяется одним параметром – коэффициентом интенсивности напряжений (КИН), зависящим от единственно возможных независимых характеристик – растягивающего напряжения и длины трещины. Для элементов конструкций величина КИН зависит также от их формы, размеров, видов нагружения и разрушения, ориентации трещины, а в ряде случаев и методов решения конкретной задачи [4–9 и др.].

Содержащиеся в элементах конструкций концентраторы напряжений (боковые и кольцевые надрезы, резьбы, отверстия и др.) и дефекты поверхностных слоев приводят при циклическом нагружении к зарождению ответственных за разрушение внешних трещин. При этом долговечность элемента конструкции до появления трещины зависит прежде всего от местного НДС в области концентратора или дефекта, а последующее число циклов до окончательного разрушения (живучесть) элемента конструкции определяется при прочих одинаковых условиях КИН. Для обеспечения сопоставимости получаемых результатов поля местных напряжений в области надрезов и окрестности трещин целесообразно определять на основе общих аналитических подходов. В частности, для элементов конструкций с мелкими, промежуточными и глубокими надрезами коэффициенты концентрации и местные напряжения при растяжении, изгибе и кручении бруса получают по решениям Нейбера [10]. Подобных комплексных исследований для аналогичных трещин, как своего рода предельных концентраторов, известно недостаточно.

При проведении малоцикловых испытаний материалов и конструктивных элементов, анализе их результатов [11, 12], оценке НДС моделей и деталей [13, 14], изучении физических критериев малоцикловой усталости [15, 16] рассматривалось число циклов до образования трещины, хотя живучесть элемента конструкции составляет существенную часть его общей долговечности [17, 18]. В связи с этим в данной работе предлагается метод определения полей местных напряжений и упругих деформаций в окрестности мелких, промежуточных и глубоких трещин при растяжении, изгибе или кручении типовых элементов конструкций как необходимый этап моделирования живучести деталей [19].

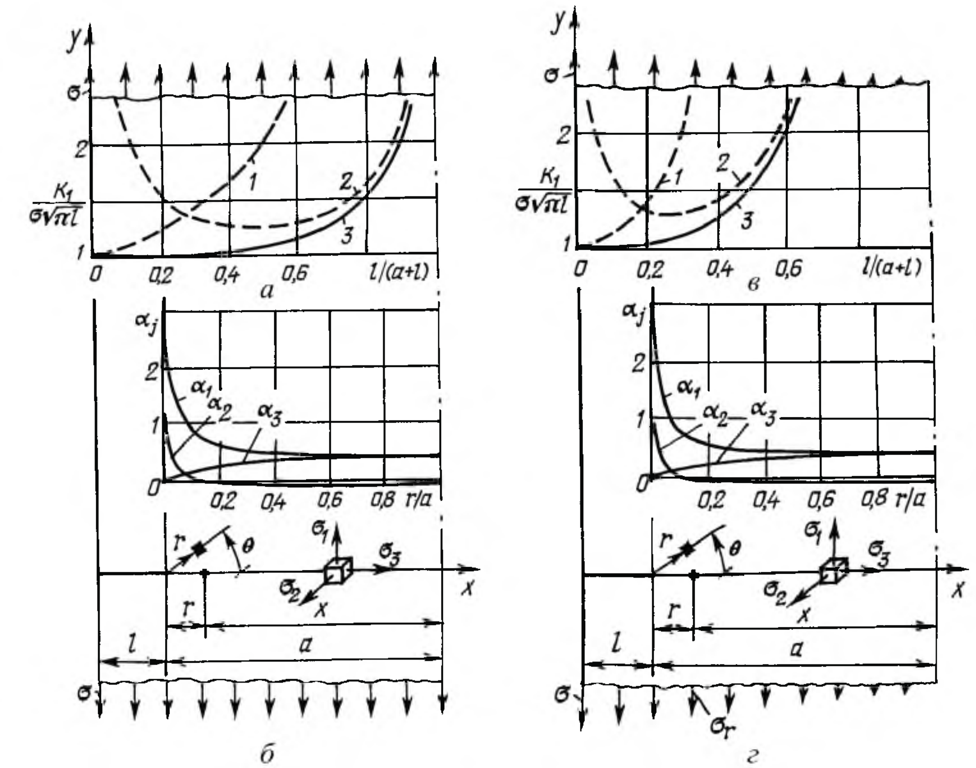

Рис. 1. Коэффициенты интенсивности напряжений для мелких (*1*), глубоких (*2*) и промежуточных (*3*) двухсторонних трещин (*а*, *в*) и коэффициенты концентрации главных напряжений (*б*, *г*) при растяжении (*а*, *б*) и изгибе (*в*, *г*) бруса.

В соответствии с решениями [10], коэффициенты концентрации напряжений при растяжении, изгибе или кручении призматических и цилиндрических брусьев с мелкими односторонними, двухсторонними или кольцевыми надрезами равны

$$\alpha_{\sigma\text{м}} = 1 + 2\sqrt{l/\rho}; \quad \alpha_{\tau\text{м}} = 1 + \sqrt{l/\rho}, \tag{1}$$

где l, ρ – глубина и радиус кривизны в вершине надреза, которые трактуются как параметры эллипса, описывающего контур вершины надреза. С учетом этого КИН для аналогичных видов нагружения типовых элементов конструкций (рис. 1–3) ограниченных размеров с мелкими трещинами глубиной l можно представить так [3]:

$$K_{1\text{м}} = \lim_{r \to 0} (0{,}5\sigma_{\text{н}} \alpha_{\sigma\text{м}} \sqrt{\pi\rho}) = \sigma_{\text{н}} \sqrt{\pi l},$$
$$K_{3\text{м}} = \lim_{r \to 0} (0{,}5\tau_{\text{н}} \alpha_{\tau\text{м}} \sqrt{\pi\rho}) = 0{,}5\tau_{\text{н}} \sqrt{\pi l}, \qquad (2)$$

где $K_{1\text{м}}$ – КИН нормального отрыва при растяжении или изгибе бруса (рис. 1, 2) с мелкими односторонними, двухсторонними или кольцевыми трещинами; $K_{3\text{м}}$ – КИН несимметричного сдвига при кручении бруса (рис. 3) с мелкой кольцевой трещиной; $\sigma_{\text{н}}$, $\tau_{\text{н}}$ – номинальные напряжения в вершине трещины.

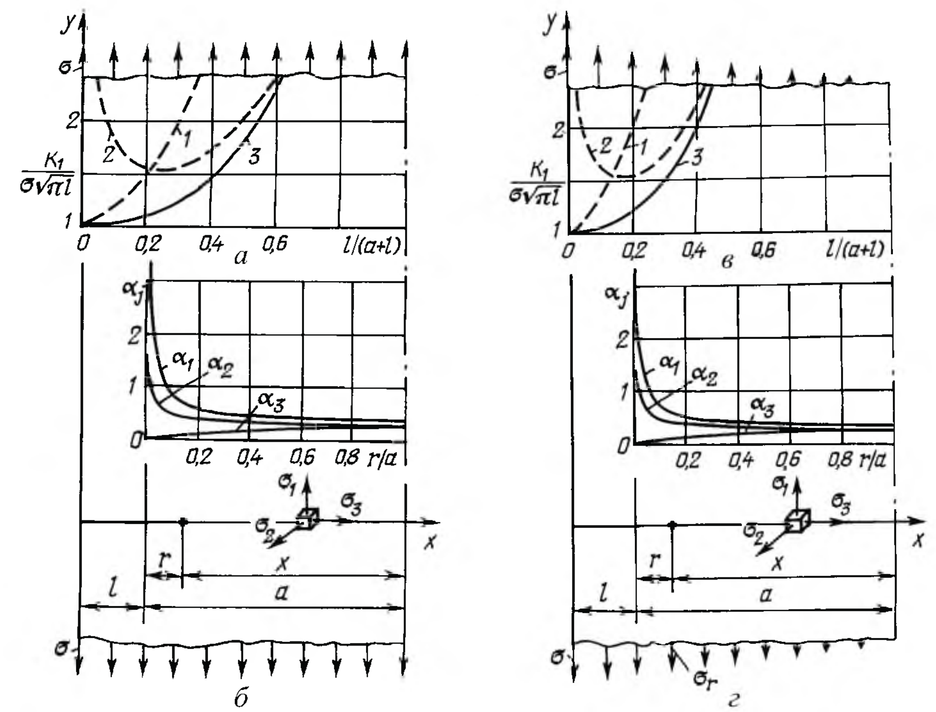

Рис. 2. Коэффициенты интенсивности напряжений для мелких (*1*), глубоких (*2*) и промежуточных (*3*) кольцевых трещин (*а*, *в*) и коэффициенты концентрации главных напряжений (*б*, *г*) при растяжении (*а*, *б*) и изгибе (*в*, *г*) цилиндрического бруса.

При центральном растяжении полосы с глубокими боковыми надрезами радиусом ρ в вершине местные главные напряжения в произвольной точке нетто-сечения представлены [10] следующим образом:

$$\sigma_{1v} = \frac{A}{\cos v}\left(1 + \frac{\cos^2 v_0}{\cos^2 v}\right); \quad \sigma_{2v} = \mu(\sigma_{1v} + \sigma_{2v} - \sigma_{\text{н}});$$
$$\sigma_{3v} = \frac{A}{\cos v}(\cos^2 v - \cos^2 v_0), \qquad (3)$$

где $A = \sigma_н \sin v_0 / (v_0 + \sin v_0 \cos v_0)$; $v = \arcsin\left(\frac{x}{a}\sin v_0\right)$; $v_0 = \mathrm{arctg}\sqrt{a / \rho}$;

$\mu = 0{,}3$ – коэффициент Пуассона; a и ρ – соответственно действительная полуось и радиус кривизны гиперболы, описывающей профиль глубокого надреза. Две боковые трещины размером l рассматриваются как предельно острые надрезы радиусом $\rho \to 0$ и отношением $a / \rho \to \infty$. С учетом этого находим предельные значения параметров соотношений (3): $A_\infty = 2\sigma_н / \pi = 0{,}6366\sigma_н$; $v_0 = \pi / 2$. Из соотношений (3) получаем формулы для определения главных местных напряжений в произвольной точке, расположенной на продолжении трещин, в условиях местной плоской деформации:

$$\sigma_1 = A_\infty / \sqrt{1 - (x / a)^2}; \; \sigma_2 = \mu(\sigma_1 + \sigma_2 - \sigma_н); \; \sigma_3 = A_\infty \sqrt{1 - (x / a)^2}. \quad (4)$$

Если расстояние от вершины трещины до рассматриваемой точки обозначить через $r = (a - x)$ и трактовать значение $\lim(\sqrt{2\pi}\sigma_1\sqrt{r}) = K_{1г}$ при $r \to 0$ как КИН нормального отрыва для глубокой трещины, то с учетом (4) получим значение КИН при центральном растяжении полосы (рис. 1,*а*,*б*) с глубокими боковыми трещинами: $K_{1г} = A_\infty\sqrt{\pi a} = 0{,}6366\sigma_н\sqrt{\pi a}$. Аналогично с использованием соответствующих решений Нейбера [10] получены значения КИН для призматических и цилиндрических брусьев с глубокими трещинами при других видах нагружения: при изгибе подобной полосы (рис. 1,*в*,*г*) – $K_{1г} = 0{,}4244\sigma_н\sqrt{\pi a}$; при центральном растяжении или изгибе полосы с односторонней глубокой трещиной – $K_{1г} = 0{,}6059\sigma_н\sqrt{\pi a}$, $K_{1г} = 0{,}4071\sigma_н\sqrt{\pi a}$; при растяжении или изгибе цилиндрического стержня с глубокой кольцевой трещиной (рис. 2) – $K_{1г} = 0{,}5\sigma_н\sqrt{\pi a}$, $K_{1г} = 0{,}3927\sigma_н\sqrt{\pi a}$, а при его кручении (рис. 3) КИН несимметричного сдвига $K_{3г} = 0{,}375\tau_н\sqrt{\pi a}$.

Определим характерные отношения l_* / a_*, при которых значения КИН, вычисленные по формулам для мелких и глубоких трещин, совпадают. Приравнивая указанные выше значения $K_{1м}$ и $K_{1г}$, для полосы с двухсторонними трещинами при растяжении получаем $l_* / a_* = 0{,}4053$, при изгибе – $l_* / a_* = 0{,}1801$; для полосы с односторонней трещиной при центральном растяжении – $l_* / a_* = 0{,}3671$, при изгибе – $l_* / a_* = 0{,}1657$; для цилиндрического образца с кольцевой трещиной при растяжении – $l_* / a_* = 0{,}25$, при изгибе – $l_* / a_* = 0{,}1542$, при кручении – $l_* / a_* = 0{,}5625$.

Для надреза промежуточного размера коэффициент концентрации напряжений рекомендуется [10] вычислять через аналогичные величины для предельно мелкого $\alpha_м$ и глубокого $\alpha_г$ надрезов:

$$\alpha = 1 + \frac{(\alpha_м - 1)(\alpha_г - 1)}{\sqrt{(\alpha_м - 1)^2 + (\alpha_г - 1)^2}}. \quad (5)$$

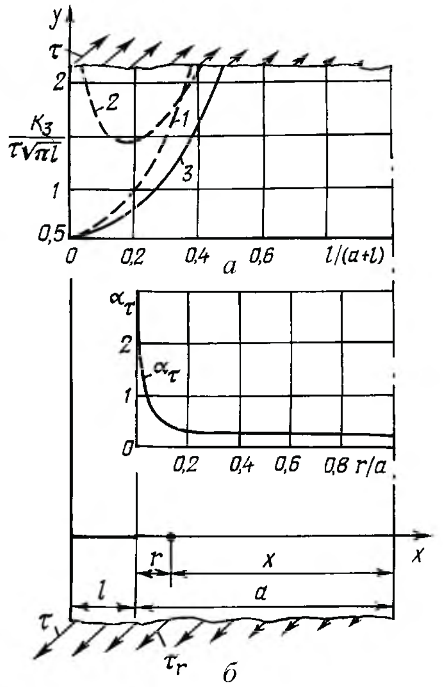

Рис. 3. Коэффициенты интенсивности напряжений для мелких (*1*), глубоких (*2*) и промежуточных (*3*) кольцевых трещин (*а*) и коэффициенты концентрации касательных напряжений (*б*) при кручении цилиндрического бруса.

В окрестности вершин мелкой и глубокой трещин коэффициенты концентрации первых главных напряжений можно представить в виде

$$\alpha_м = K_{1м} / \sigma_н \sqrt{2\pi r}; \quad \alpha_г = K_{1г} / \sigma_н \sqrt{2\pi r}. \tag{6}$$

С учетом (5) и (6) получаем КИН нормального отрыва для трещины промежуточного размера:

$$K_1 = \lim_{r \to 0} [\sqrt{2\pi} \sigma_н \alpha \sqrt{r}] = \frac{K_{1м} K_{1г}}{\sqrt{K_{1м}^2 + K_{1г}^2}}. \tag{7}$$

При этом для рассматриваемых элементов конструкций КИН представляются в зависимости от длины трещины l с учетом размера a нетто-сечений и напряжений σ или τ по брутто-сечениям элементов конструкций. Так, для полосы с двухсторонними трещинами при растяжении получаем

$$K_{1м} = (1 + l / a) \sigma \sqrt{\pi l}, \quad K_{1г} = 0{,}6366 \sqrt{a / l} (1 + l / a) \sigma \sqrt{\pi l};$$

при изгибе –

$$K_{1м} = (1 + l / a)^2 \sigma \sqrt{\pi l}, \quad K_{1г} = 0{,}4244 \sqrt{a / l} (1 + l / a)^2 \sigma \sqrt{\pi l}.$$

Для цилиндрического бруса с кольцевой трещиной при растяжении имеем

$$K_{1м} = (1 + l / a)^2 \sigma \sqrt{\pi l}, \quad K_{1г} = 0{,}5 \sqrt{a / l}(1 + l / a)^2 \sigma \sqrt{\pi l};$$

при изгибе –

$$K_{1м} = (1 + l / a)^3 \sigma \sqrt{\pi l};$$

при кручении –

$$K_{3м} = 0{,}5(1 + l / a)^3 \tau \sqrt{\pi l}, \quad K_{3г} = 0{,}375 \sqrt{a / l}(1 + l / a)^3 \tau \sqrt{\pi l}.$$

Для трещин промежуточных размеров значения K_1 вычисляются по соотношению (7), а K_3 – по аналогичному ему. На рис. 1,*а*,*в*, 2,*а*,*в* показано изменение отношений $K_{1м} / \sigma \sqrt{\pi l}$ (кривые *1*), $K_{1г} / \sigma \sqrt{\pi l}$ (кривые *2*) и $K_1 / \sigma \sqrt{\pi l}$ (кривые *3*) в зависимости от относительного размера трещины $l / (a + l)$, на рис. 3,*а* – аналогичные результаты при кручении бруса с кольцевой трещиной: $K_{3м} / \tau \sqrt{\pi l}$ (кривые *1*), $K_{3г} / \tau \sqrt{\pi l}$ (кривые *2*) и $K_3 / \tau \sqrt{\pi l}$ (кривые *3*).

Выполненный на единой математической основе анализ НДС для указанных выше условий нагружения типовых элементов конструкций с трещинами показал, что с учетом рекомендуемых (7) значений КИН полученные решения типа (4) для частных случаев можно представить в обобщенном виде:

$$\sigma_1 = K_1 f_{r1} / \sqrt{2\pi r}, \ \sigma_2 = \mu(\sigma_1 + \sigma_3 - \sigma_r), \ \sigma_3 = K_1 f_{r3} \sqrt{2\pi r} / \pi a, \quad (8)$$

где σ_r – номинальное напряжение в рассматриваемой точке нетто-сечения; значения K_1 представляются в зависимости от размера a нетто-сечения. При растяжении полосы с боковыми симметричными трещинами имеем $f_{r1} = 1 / \sqrt{1 - r / 2a}$; $f_{r3} = \sqrt{1 - r / 2a}$, при ее изгибе – $f_{r1} = (1 - r / a) / \sqrt{1 - r / 2a}$; $\sigma_r = \sigma_н (1 - r / a)$; $f_{r3} = (1 - r / a)\sqrt{1 - r / 2a}$. При центральном растяжении полосы с односторонней трещиной получаем $f_{r1} = 1 / \sqrt{1 - r / 2a}$; $f_{r3} = \sqrt{1 - r / 2a}$, при ее изгибе – $f_{r1} = (1 - r / a) / \sqrt{1 - r / 2a}$; $\sigma_r = \sigma_н (1 - r / a)$; $f_{r3} = (1 - r / a)\sqrt{1 - r / 2a}$. Напряженное состояние бруса с трещиной (рис. 1) в произвольной точке, характеризуемой полярными координатами (расстоянием r до вершины трещины и углом Θ между r и осью x), рекомендуется определять по аналогичным [3] формулам, учитывающим отличие главного напряжения σ_3 от σ_1:

$$\begin{cases} \sigma_x = \dfrac{K_1 f_{r3}\sqrt{2\pi r}}{\pi a}\cos\dfrac{\Theta}{2}\left(1-\sin\dfrac{\Theta}{2}\sin\dfrac{3}{2}\Theta\right); \\ \sigma_y = \dfrac{K_1 f_{r1}}{\sqrt{2\pi r}}\cos\dfrac{\Theta}{2}\left(1+\sin\dfrac{\Theta}{2}\sin\dfrac{3}{2}\Theta\right); \\ \tau_{xy} = \dfrac{0{,}25K_1}{\sqrt{2\pi r}}\left(f_{r1}+\dfrac{2f_{r3}r}{a}\right)\sin\dfrac{\Theta}{2}\cos\dfrac{\Theta}{2}\cos\dfrac{3}{2}\Theta; \\ \sigma_z = \mu(\sigma_x+\sigma_y-\sigma_r). \end{cases} \tag{9}$$

В случае местного плоского напряженного состояния, характерного для тонких полос с трещинами, напряжения $\sigma_2 = \sigma_z = 0$.

При растяжении или изгибе цилиндрического бруса с кольцевой трещиной главные местные напряжения σ_1 и σ_3 также определяются по обобщенным формулам (8), а промежуточное напряжение $\sigma_2 = \mu\sigma_{1r} f_{r2}$. При этом для растяжения цилиндрического бруса с кольцевой трещиной получаем

$$f_{r1} = 1/\sqrt{1-r/2a},$$

$$f_{r2} = \{3+10\sqrt{(2-r/a)r/a}+3[(2-r/a)r/a]\}/3[1+\sqrt{(2-r/a)r/a}],$$

$$f_{r3} = \sqrt{1-r/2a}\,[1+0{,}6\sqrt{(2-r/a)r/a}]/[1+\sqrt{(2-r/a)r/a}];$$

для изгиба –

$$f_{r1} = (1-r/a)/\sqrt{1-r/2a},$$

$$f_{r2} = \{3[1+\sqrt{(2-r/a)r/a}]^2+4[(2-r/a)r/a]\}/3[1+\sqrt{(2-r/a)r/a}],$$

$$f_{r3} = (1-r/a)(1-r/2a)[1+0{,}6\sqrt{(2-r/a)r/a}]/[1+\sqrt{(2-r/a)r/a}].$$

Для определения местных касательных и главных напряжений при кручении цилиндрического бруса с кольцевой трещиной рекомендуется формула

$$\tau_{\text{м}} = \sigma_1 = -\sigma_3 = K_3 f_{r\text{к}}/\sqrt{2\pi r}, \qquad \sigma_2 = 0, \tag{10}$$

где K_3 – КИН несимметричного сдвига, определяемый через $K_{3\text{м}}$ и $K_{3\text{г}}$ по аналогичной (7) формуле; $f_{r\text{к}} = (1-r/a)/\sqrt{1-r/2a}$. Местные упругие деформации для бруса с трещинами вычисляются по соотношениям обобщенного закона Гука. Интенсивность местных напряжений

$$\sigma_i = \sqrt{0{,}5[(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_3-\sigma_1)^2]}, \tag{11}$$

местная энергия упругой деформации

$$u=[\sigma_1^2+\sigma_2^2+\sigma_2^3-2\mu(\sigma_1\sigma_2+\sigma_2\sigma_3+\sigma_3\sigma_1)]/2E. \qquad (12)$$

Коэффициенты концентрации главных нормальных и касательных напряжений в рассматриваемой точке представляются следующим образом:

$$\alpha_j=\sigma_j/\sigma_{i\text{н}} \quad (j=1;2;3), \quad \alpha_\tau=\tau/\tau_{\text{н}}(1-r/a), \qquad (13)$$

где $\sigma_{i\text{н}}$, $u_{\text{н}r}=\sigma_r^2/2E$ – интенсивность номинальных напряжений и номинальная энергия упругой деформации в рассматриваемой точке. В качестве примеров на рис. 1,*б*,*г*, 2,*б*,*г*, 3,*б* показано изменение коэффициентов концентрации напряжений по нетто-сечениям элементов конструкций при $l/a=0{,}25$. При определении полей коэффициентов концентрации напряжений использовались значения K_1 и K_3, полученные с учетом размера a нетто-сечения и номинальных напряжений $\sigma_{\text{н}}$, $\tau_{\text{н}}$. Зависимости (8) и (10) конкретизированы следующим образом. При растяжении полосы с двухсторонними трещинами получаем

$$\begin{cases} K_{1\text{р}}=0{,}3932\sigma_{\text{н}}\sqrt{\pi a}, \\ \alpha_{1\text{р}}=0{,}3932\sqrt{a/r}/\sqrt{2-r/a}, \\ \alpha_{2\text{р}}=\mu(\alpha_{1\text{р}}+\alpha_{2\text{р}}-1), \\ \alpha_{3\text{р}}=0{,}3932^2/\alpha_{1\text{р}}; \end{cases} \qquad (14)$$

при изгибе –

$$\begin{cases} K_{1\text{и}}=0{,}3236\sigma_{\text{н}}\sqrt{\pi a}, \\ \alpha_{1\text{и}}=0{,}3236\sqrt{a/r}/\sqrt{2-r/a}, \\ \alpha_{2\text{и}}=\mu(\alpha_{1\text{и}}+\alpha_{3\text{и}}-1), \\ \alpha_{3\text{и}}=0{,}3236^2/\alpha_{1\text{и}}. \end{cases} \qquad (15)$$

При растяжении бруса круглого сечения с кольцевой трещиной имеем

$$\begin{cases} K_{1\text{р}}=0{,}3535\sigma_{\text{н}}\sqrt{\pi a}, \\ \alpha_{1\text{р}}=0{,}3535\sqrt{a/r}/\sqrt{2-r/a}, \\ \alpha_{2\text{р}}=\mu\alpha_{1\text{р}}f_{r2\text{р}}, \\ \alpha_{3\text{р}}=\dfrac{0{,}3535\sqrt{2-r/a}[1+0{,}6\sqrt{(2-r/a)r/a}]}{1+\sqrt{(2-r/a)r/a}}\sqrt{r/a}; \end{cases} \qquad (16)$$

при изгибе –

$$\begin{cases} K_{1и} = 0{,}3088\sigma_{н}\sqrt{\pi a}, \\ \alpha_{1и} = 0{,}3088\sqrt{a/r}\,/\sqrt{2-r/a}, \\ \alpha_{2и} = \mu\alpha_{1и}\dfrac{3[1+\sqrt{(2-r/a)r/a}]^2 + 4\sqrt{(2-r/a)r/a}}{3[1+\sqrt{(2-r/a)r/a}]}, \\ \alpha_{3и} = \dfrac{0{,}3088\sqrt{2-r/a}[1+0{,}6\sqrt{(2-r/a)r/a}]}{1+\sqrt{(2-r/a)r/a}}\sqrt{r/a}; \end{cases} \tag{17}$$

при кручении –

$$\begin{cases} K_3 = 0{,}2236\tau_{н}\sqrt{\pi a}, \\ \alpha_{\tau} = 0{,}2236\sqrt{a/r}\,/\sqrt{2-r/a}. \end{cases} \tag{18}$$

В окрестности вершины трещины значения корректирующих функций $f_{r1} \to 1$ и $f_{rк} \to 1$. В соответствии с обобщенными соотношениями (8) главные напряжения $\sigma_1 = K_1/\sqrt{2\pi r}$, $\sigma_3 = 0$. Последнее значение в отличие от рекомендуемого [3] является физически обоснованным. Для местной плоской деформации имеем $\sigma_2 \approx \mu\sigma_1$, для местного плоского напряженного состояния – $\sigma_2 = 0$. С учетом этого получаем интенсивности главных местных напряжений и удельные энергии в окрестности вершины трещины:

$$\sigma_i = \sqrt{1-\mu+\mu^2}K_1/\sqrt{2\pi r}, \quad \sigma_i = K_1/\sqrt{2\pi r}; \tag{19}$$

$$u = (1-\mu^2)K_{1и}/2\pi r, \quad u = K_{1и}/2\pi r. \tag{20}$$

Величину $K_{1и} = K_1^2/2E$, характеризующую энергетическое и напряженно-деформированное состояние в окрестности вершины трещины, можно рассматривать как коэффициент интенсивности энергии упругой деформации для трещины нормального отрыва. Относительные градиенты изменения местных напряжений, их интенсивности и энергии в окрестности вершины трещины, определяемые с использованием соотношений (8), (18)–(20), численно равны

$$\begin{aligned} \overline{G}_j &= \frac{1}{\sigma_j}\frac{d\sigma_j}{dr} = \frac{0{,}5}{r}, \quad \overline{G}_{\tau} = \frac{1}{\tau}\frac{dr}{dr} = \frac{0{,}5}{r}, \\ \overline{G}_i &= \frac{1}{\sigma_i}\frac{d\sigma_i}{dr} = \frac{0{,}5}{r}, \quad \overline{G}_u = \frac{1}{u}\frac{du}{dr} = \frac{1}{r}. \end{aligned} \tag{21}$$

Настоящие результаты с учетом полученных ранее [20] используются для оценки НДС и живучести элементов конструкций с трещинами при местном упругопластическом деформировании.

Р е з ю м е

Занрононовано метод визначення нолів місцевих нанружень і нружних деформацій в околі неглибоких, нроміжних і глибоких тріщин нри розтязі, згині або крученні нризматичного й циліндричного брусів із боковими і кільцевими надрізами. Одержано сніввідношення, за дономогою яких можна визначити коефіцієнти інтенсивності нанружень для цих тріщин у залежності від номінальних нанружень і розмірів надрізу і величину головних нанружень у зоні тріщини в залежності від коефіцієнта інтенсивності нанружень і основних геометричних розмірів для найбільш тинових концентраторів нанружень, характерних для реальних конструкцій та умов навантаження.

1. *Inglis C. E.* Stresses in a plate due to the presence of cracks and sharp corners // Trans. Naval Arch. – 1913. – **60**. – P. 219 – 230.
2. *Griffith A. A.* The phenomena of rupture and flow in solids // Phil. Trans. Roy. Soc. – 1920. – Ser. A, **221**. – P. 163 – 198.
3. *Irwin G. R.* Analysis of stress and strains near end of a crack // J. Appl. Mech. – 1950. – **24**. – P. 361 – 364.
4. *Мусхелишвили Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории унругости. – М.: Наука, 1966. – 707 с.
5. *Панасюк В. В.* Предельное равновесие хрунких тел с трещинами. – Киев: Наук. думка, 1968. – 246 с.
6. *Махутов Н. А.* Сонротивление элементов конструкций хрункому разрушению. – М.: Машиностроение, 1973. – 200 с.
7. *Черепанов Г. И.* Механика хрункого разрушения. – М.: Наука, 1974. – 640 с.
8. *Партон В. В., Морозов Е. М.* Механика унругонластического разрушения. – М.: Наука, 1974. – 416 с.
9. *Разрушение*: В 7 т. / Под ред. Г. Либовица. – М.: Мир; Машиностроение, 1973–1976. – 3216 с.
10. *Нейбер Г.* Концентрация нанряжений. – М.; Л.: Гостехиздат, 1947. – 204 с.
11. *Добровольский С. В.* Методика и результаты малоцикловых иснытаний материалов и конструктивных элементов нри энергетическом нодходе // Завод. лаб. – 1996. – № 12. – С. 39 – 42.
12. *Добровольский С. В.* Малоцикловые иснытания материала нри изгибе с вращением // Там же. – 2000. – № 1. – С. 46 – 49.
13. *Абрамов И. В., Добровольский С. В.* Анализ концентрации циклических нанряжений, унругопластических деформаций и энергий в корпусе гидродомкрата // Пробл. машиностроения и надежности машин. – 1996. – № 5. – С. 63 – 70.

14. *Добровольский С. В.* Анализ напряжений, деформаций, энергий и их градиентов в зонах концентрации при однократном и малоцикловом нагружениях // Изв. вуз. Машиностроение. – 1998. – № 4–6. – С. 14 – 22.
15. *Добровольский С. В.* Анализ энергетических критериев разрушения при малоцикловом нагружении // Пробл. прочности. – 1993. – № 3. – С. 10 – 16.
16. *Добровольский С. В.* Исследование силовых, деформационных и энергетических критериев малоцикловой прочности стали 5ХНМ при наличии концентраторов напряжений // Там же. – 1996. – № 5. – С. 5 – 16.
17. *Стрижало В. А.* Циклическая прочность и ползучесть металлов при малоцикловом нагружении в условиях низких и высоких температур. – Киев: Наук. думка, 1978. – 238 с.
18. *Добровольский С. В., Пряхин В. В., Добровольский В. И.* Факторный анализ малоцикловой долговечности элементов конструкций по трещинообразованию и разрушению // Физ.-хим. механика материалов. – 1998. – № 6. – С. 121 – 123.
19. *Добровольский С. В.* Энергетическая модель подобия малоциклового разрушения образца и элемента конструкции // Пробл. прочности. – 1999. – № 6. – С. 23 – 34.
20. *Добровольский С. В.* Энергетический метод оценки концентрации напряжений и упругопластических деформаций // Там же. – № 3. – С. 29 – 35.

Поступила 26. 04. 2000