УДК 531.391:539.4.011.2

Динамика одноосного растяжения вязкоупругого деформационно упрочняемого тела в системе с одной степенью свободы. Сообщение 4. Воздействие внешней силы на составное тело

М. С. Ковальченко

Институт проблем материаловедения им. И. Н. Францевича НАН Украины, Киев, Украина

Рассмотрены реологическая модель и динамика открытой механической системы, включающей упругий элемент машины и составное тело из двух последовательно соединенных необратимо деформируемых тел, с одной степенью свободы под действием внешней силы. При нагружении системы ниже предела упругости обоих тел движение механической системы описывается классической динамической системой второго порядка, в то время как при нагружении выше предела упругости одного из тел – динамической системой третьего порядка, а выше предела упругости обоих тел – динамической системой из двух дифференциальных уравнений третьего порядка. Решения этой динамической системы имеют характер затухающих колебаний с повышением фактора затухания по мере увеличения отношений упругих жесткостей и деформационных упрочнений к вязким сопротивлениям деформируемых тел.

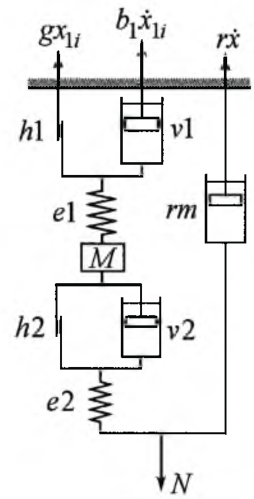

Рис. 1. Реологическая модель механического воздействия внешней силы N на два последовательно соединенных вязкоупругих деформационно упрочняемых тела. ($e1$, $v1$, $h1$ – соответственно упругий, вязкий и деформационно упрочняемый элемент первого тела; $e2$, $v2$, $h2$ – то же второго тела; M – приведенная масса системы; rm – вязкий элемент внешней среды.)

Полученные ранее результаты [1–3] и их анализ дают основание и возможность их дальнейшего обобщения на более сложный случай составного тела из двух последовательно соединенных необратимо деформируемых тел. Рассмотрим реологическую модель из двух последовательно соединенных необратимо деформируемых тел с пределами упругости (рис. 1). Модель охватывает ряд явлений. В простейшем случае она описывает одновременное растяжение двух последовательно соединенных через упругий элемент образцов из различных материалов. В то же время модель соответствует растяжению двухслойного или в общем случае многослойного (с идентичными слоями) композита, образованного различными вязкоупругими деформационно упрочняемыми телами, при условии сохранения сплошности границы раздела слоев. Это условие в полной мере выполняется при сжатии слоистого тела. Кроме того, модель также пригодна для описания сжатия деформируемого тела на необратимо деформируемой подложке. Рассматриваемая модель состоит из вязкоупругих деформационно упрочняемых тел *1* и *2*, вязкого элемента внешней среды rm и приведенной массы системы M. Один из упругих элементов включает в себя также и упругий элемент машины, поскольку общую упругую податливость системы при последовательном соединении элементов можно представить как сумму податливостей этих элементов. Одним из тел может быть вязкоупругое тело Кельвина, последовательно соединенное с упругим элементом машины, например с $e2$. Представленная модель реализуется при превышении действующей силой пределов упругости обоих тел. До предела упругости одного из тел, а именно имеющего меньший предел упругости, система соответствует вязкоупругому телу Кельвина с параллельно соединенным упругим и вязким элементами, и ее динамика описывается [1] классической динамической системой второго порядка. Когда же сила превышает меньший из пределов упругости, динамика нагружения рассматриваемой модели описывается динамической системой третьего порядка [1, 2]. И наконец, если сила превысит и более высокий предел упругости второго тела, то возникает качественно новая динамическая система, анализ которой приведен ниже.

Как и в ранее рассмотренных случаях, фундаментальный закон сохранения энергии выразим в виде обобщенного уравнения Ламба [4], устанавливающего соотношение между скоростью изменения полной энергии системы и ее рассеяния в деформируемых телах и внешней среде под действием внешней силы N со скоростью $\dot{x}$:

$$\frac{d}{dt}(E_k + E_p + U_s) + 2W = N\dot{x}, \tag{1}$$

где t – время; x – обобщенная координата (смещение от исходного состояния или общее удлинение системы); E_k, E_p – кинетическая и потенциальная энергия; U_s – внутренняя энергия деформируемого тела; $2W$ – скорость диссипации энергии в системе; точка над переменной обозначает дифференцирование по времени. При этом

$$\begin{aligned} &2E_k = M\dot{x}^2; \quad 2E_p = c_1x_{1e}^2 + c_2x_{2e}^2; \\ &2U_s = g_1x_{1i}^2 + g_2x_{2i}^2; \quad 2W = b_1\dot{x}_{1i}^2 + b_2\dot{x}_{2i}^2 + r\dot{x}^2, \end{aligned} \tag{2}$$

где $x = x_{1e} + x_{1i} + x_{2e} + x_{2i}$; x_{1e} и x_{2e} – упругие удлинения деформируемых тел *1* и *2* соответственно; x_{1i} и x_{2i} – неупругие (вязкие) удлинения; c_1 и c_2 – упругие жесткости; g_1 и g_2 – деформационные упрочнения; b_1 и b_2 – вязкие сопротивления соответственно тел *1* и *2*; r – обобщенное вязкое сопротивление внешней среды; M – приведенная масса. Величины c, b и g определяются соотношениями (6), приведенными в сообщении [1].

Подставляя (2) в (1), дифференцируя и собирая члены с одинаковыми индексами, получаем

$$(N - M\ddot{x} - r\dot{x})\dot{x} =$$

$$= c_1x_{1e}\dot{x}_{1e} + c_2x_{2e}\dot{x}_{2e} + (b_1\dot{x}_{1i} + g_1x_{1i})\dot{x}_{1i} + (b_2\dot{x}_{2i} + g_2x_{2i})\dot{x}_{2i}, \tag{3}$$

откуда после преобразования

$$\dot{x} = \frac{c_1 x_{1e}}{N - M\ddot{x} - r\dot{x}} \dot{x}_{1e} + \frac{c_2 x_{2e}}{N - M\ddot{x} - r\dot{x}} \dot{x}_m +$$

$$+ \frac{b_1 x_{1i} + g_1 x_{1i}}{N - M\ddot{x} - r\dot{x}} \dot{x}_{1i} + \frac{b_2 \dot{x}_2 + g_2 x_{2i}}{N - M\ddot{x} - r\dot{x}} \dot{x}_2 = \dot{x}_{1e} + \dot{x}_{2e} + \dot{x}_{1i} + \dot{x}_{2i} \qquad (4)$$

следуют условия рассматриваемой модели

$$c_1 x_{1e} = c_2 x_{2e} = b_1 \dot{x}_{1i} + g_1 x_{1i} = b_2 \dot{x}_{2i} + g_2 x_{2i} = N - M\ddot{x} - r\dot{x}, \qquad (5)$$

которые дают возможность выразить упругие удлинения через общее удлинение системы x и его производные:

$$x_{1e} = \frac{1}{c_1}(N - M\ddot{x} - r\dot{x}); \quad x_{2e} = \frac{1}{c_2}(N - M\ddot{x} - r\dot{x}). \qquad (6)$$

Скорости необратимых удлинений тел составляют:

$$\dot{x}_{1i} = \frac{1}{b_1}(N - M\ddot{x} - r\dot{x} - g_1 x_{1i}); \quad \dot{x}_2 = \frac{1}{b_2}(N - M\ddot{x} - r\dot{x} - g_2 x_{2i}). \qquad (7)$$

Из условий (5) можно составить систему из четырех дифференциальных уравнений, которые помимо общей скорости $\dot{x}$ и общего ускорения $\dot{x}$ содержат шесть неизвестных величин: $x_{1e}, x_{1i}, \dot{x}_{1i}, x_{2e}, x_{2i}$ и $\dot{x}_{2i}$. Поэтому в данном случае не представляется возможным выразить их через общее удлинение и его производные. Однако с учетом аддитивности общего удлинения и его производных эту систему, записанную в виде

$$\begin{aligned}
&b_1 \dot{x}_{1i} + g x_{1i} = N - M(\ddot{x}_{1e} + \ddot{x}_{1i} + \ddot{x}_{2e} + \ddot{x}_{2i}) - r(\dot{x}_{1e} + \dot{x}_{1i} + \dot{x}_{2e} + \dot{x}_{21});\\
&c_1 x_{1e} = N - M(\ddot{x}_{1e} + \ddot{x}_{1i} + \ddot{x}_{2e} + \ddot{x}_{2i}) - r(\dot{x}_{1e} + \dot{x}_{1i} + \dot{x}_{2e} + \dot{x}_{2i});\\
&b_2 \dot{x}_{2i} + g_2 x_{2i} = N - M(\ddot{x}_{1e} + \ddot{x}_{1i} + \ddot{x}_{2e} + \ddot{x}_{2i}) - r(\dot{x}_{1e} + \dot{x}_{1i} + \dot{x}_{2e} + \dot{x}_{2i});\\
&c_1 x_{1e} = N - M(\ddot{x}_{1e} + \ddot{x}_{1i} + \ddot{x}_{2e} + \ddot{x}_{2i}) - r(\dot{x}_{1e} + \dot{x}_{1i} + \dot{x}_{2e} + \dot{x}_{2i}),
\end{aligned} \qquad (8)$$

путем объединения попарно упругих и вязких удлинений $x_1 = x_{1i} + x_{1e}$ и $x_2 = x_{2i} + x_{2e}$ можно преобразовать в систему из двух дифференциальных уравнений:

$$M\ddot{x}_1 + (b_1 + r)\dot{x}_1 - b_1 \dot{x}_{1e} + g_1(x_1 - x_{1e}) = N - M\ddot{x}_2 - r\dot{x}_2; \qquad (9а)$$

$$M\bar{x}_2 + (b_2 + r)\dot{x}_2 - b_2 \bar{x}_{2e} + g_2(x_2 - x_{2e}) = N - M\bar{x}_1 - r\bar{x}_1. \qquad (9б)$$

Выражая согласно соотношению (6) упругие удлинения x_{1e}, x_{2e} и их производные через общее удлинение $x = x_1 + x_2$ и его производные, имеем

$$M\ddot{x}_1 + (b_1 + r)x_1 - \frac{b_1}{c_1}(\dot{N} - M(\dddot{x}_1 + \dddot{x}_2) - r(\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2)) +$$

$$+gx_1 - \frac{g_1}{c_1}(N - M(\dddot{x}_1 + \dddot{x}_2) - r(\dddot{x}_1 + \dddot{x}_2)) = N - M\ddot{x}_2 - r\dot{x}_2; \qquad (10а)$$

$$M\ddot{x}_2 + (b_2 + r)x_2 - \frac{b_2}{c_2}(\dot{N} - M(\dddot{x}_1 + \dddot{x}_2) - r(\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2)) +$$

$$+gx_2 - \frac{g_2}{c_2}(N - M(\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2) - r(\dot{x}_1 + \dot{x}_2)) = N - M\ddot{x}_1 - r\dot{x}_1. \qquad (10б)$$

После преобразований получим систему дифференциальных уравнений третьего порядка:

$$\dddot{x}_1 + \alpha_3\ddot{x}_1 + \alpha_2\dot{x}_1 + \alpha_1 x + \dddot{x}_2 + \alpha_3\ddot{x}_2 + \left(\alpha_2 - \frac{c_1}{M}\right)\dot{x}_2 =$$

$$= \frac{1}{M}\left(\dot{N} + \frac{c_1 + g_1}{b_1}N\right); \qquad (11а)$$

$$\dddot{x}_1 + \beta_3\ddot{x}_1 + \left(\beta_2 - \frac{c_2}{M}\right)\dot{x}_1 + \dddot{x}_2 + \beta_3\ddot{x}_2 + \beta_2\dot{x}_2 + \beta_1 x_2 =$$

$$= \frac{1}{M}\left(\dot{N} + \frac{c_2 + g_2}{b_2}N\right), \qquad (11б)$$

где

$$\alpha_1 = \frac{c_1 g_1}{M b_1}; \quad \alpha_2 = \frac{c_1}{M}\left(1 + \frac{r}{b_1}\left(1 + \frac{g_1}{c_1}\right)\right); \quad \alpha_3 = \frac{c_1 + g_1}{b_1} + \frac{r}{M};$$

$$\beta_1 = \frac{c_2 g_2}{M b_2}; \quad \beta_2 = \frac{c_2}{M}\left(1 + \frac{r}{b_2}\left(1 + \frac{g_2}{c_2}\right)\right); \quad \beta_3 = \frac{c_2 + g_2}{b_2} + \frac{r}{M}.$$

Воздействие переменной силы. Для решения этой системы дифференциальных уравнений операторным методом преобразуем ее в систему уравнений, содержащих изображения с комплексной переменной. Это преобразование приводит к системе алгебраических уравнений:

$$(s^3+\alpha_3 s^2+\alpha_2 s+\alpha_1)X_1(s)+s\left(s^2+\alpha_3 s+\alpha_2-\frac{c_s}{M}\right)X_2(s)=$$

$$=\left(s+\frac{c_1+g_1}{b_1}\right)\frac{N(s)}{M}-\frac{N_0}{M}+x_{1(0)}(s^2+\alpha_3 s+\alpha_2)+\dot{x}_{1(0)}(s+\alpha_3)+$$

$$+\ddot{x}_{1(0)}+x_{2(0)}\left(s^2+\alpha_3 s+\alpha_2-\frac{c_1}{M}\right)+\dot{x}_{2(0)}(s+\alpha_3)+\ddot{x}_{2(0)}; \qquad (12а)$$

$$s\left(s^2+\beta_3 s+\beta_2-\frac{c_2}{M}\right)X_1(s)+(s^3+\beta_3 s^2+\beta_2 s+\beta_1)X_2(s)=$$

$$=\left(s+\frac{c_2+g_2}{b_2}\right)\frac{N(s)}{M}-\frac{N_0}{M}+x_{1(0)}\left(s^2+\beta_3 s+\beta_2-\frac{c_2}{M}\right)+\dot{x}_{1(0)}(s+\beta_3)+$$

$$+\ddot{x}_{1(0)}+x_{2(0)}(s^2+\beta_3 s+\beta_2)+\dot{x}_{2(0)}(s+\beta_3)+\ddot{x}_{2(0)}, \qquad (12б)$$

где $X_1(s)$, $X_2(s)$ и $N(s)$ – однозначные функции комплексной переменной s (изображение), связанные соответственно с однозначными функциями $x_1(t)$, $x_2(t)$ и $N(t)$ действительной переменной t (оригинал) интегральным преобразованием Лапласа; $x_{1(0)}=x_{1(t=0)}$; $\dot{x}_{1(0)}=\dot{x}_{1(t=0)}$; $\ddot{x}_{1(0)}=\ddot{x}_{1(t=0)}$, аналогично записываем для $x_{2(0)}$. Решение системы (12) дает явные выражения для каждой из переменных:

$$X_1(s)=\frac{1}{P(s)}((\gamma_{12}s^2+\gamma_{11}s+\gamma_{10})N(s)+x_{1(0)}s^3+\psi_{12}s^2+\psi_{11}s+\psi_{10}); \qquad (13а)$$

$$X_2(s)=\frac{1}{P(s)}((\gamma_{22}s^2+\gamma_{21}s+\gamma_{20})N(s)+x_{2(0)}s^3+\psi_{22}s^2+\psi_{21}s+\psi_{20}), \qquad (13б)$$

где

$$P(s)=s^4+\varepsilon_3 s^3+\varepsilon_2 s^2+\varepsilon_1 s+\varepsilon_0;$$

$$\varepsilon_0=\frac{M}{c_1+c_2}\alpha_1\beta_1; \quad \varepsilon_1=\frac{M}{c_1+c_2}(\alpha_1\beta_2+\alpha_2\beta_1);$$

$$\varepsilon_2=\frac{1}{c_1+c_2}\left(M(\alpha_1\beta_3+\alpha_3\beta_1)+\alpha_2 c_2+c_1\left(\beta_2-\frac{c_2}{M}\right)\right);$$

$$\varepsilon_3 = \frac{1}{c_1 + c_2}(M(\alpha_1 + \beta_1) + \alpha_3 c_2 + \beta_3 c_1);$$

$$\gamma_{10} = \frac{\beta_1(c_1 + g_1)}{(c_1 + c_2)b_1}; \quad \gamma_{11} = \frac{1}{c_1 + c_2}\left(\beta_1 + \beta_2 \frac{c_1 + g_1}{b_1} - \left(\alpha_2 - \frac{c_1}{M}\right)\frac{c_2 + g_2}{b_2}\right);$$

$$\gamma_{12} = \frac{1}{c_1 + c_2}\left(\beta_2 + \beta_3 \frac{c_1 + g_1}{b_1} + \frac{c_1}{M} - \alpha_2 - \alpha_3 \frac{c_2 + g_2}{b_2}\right);$$

$$\gamma_{20} = \frac{\alpha_1(c_2 + g_2)}{(c_1 + c_2)b_2}; \quad \gamma_{21} = \frac{1}{c_1 + c_2}\left(\alpha_1 + \alpha_2 \frac{c_2 + g_2}{b_2} - \left(\beta_2 - \frac{c_2}{M}\right)\frac{c_1 + g_1}{b_1}\right);$$

$$\gamma_{22} = \frac{1}{c_1 + c_2}\left(\alpha_2 + \alpha_3 \frac{c_2 + g_2}{b_2} + \frac{c_2}{M} - \beta_2 - \beta_3 \frac{c_1 + g_1}{b_1}\right);$$

$$\psi_{10} = \frac{M}{c_1 + c_2}\left(x_{1(0)}\alpha_2\beta_1 + x_{2(0)}\beta_1\left(\alpha_2 - \frac{c_1}{M}\right) + \right.$$

$$\left. + (\dot{x}_{1(0)} + \dot{x}_{2(0)})\alpha_3\beta_1 + \left(\ddot{x}_{1(0)} + \ddot{x}_{2(0)} - \frac{N_0}{M}\right)\beta_1\right);$$

$$\psi_{11} = \frac{M}{c_1 + c_2}\left(x_{1(0)}\left(\alpha_3\beta_1 + \alpha_2 \frac{c_2}{M} + \frac{c_1}{M}\left(\beta_2 - \frac{c_2}{M}\right)\right) + x_{2(0)}\alpha_3\beta_1 + \right.$$

$$+ (\dot{x}_{1(0)} + \dot{x}_{2(0)})\left(\beta_1 + \alpha_3\beta_2 - \beta_3\left(\alpha_2 - \frac{c_1}{M}\right)\right) +$$

$$\left. + \left(\ddot{x}_{1(0)} + \ddot{x}_{2(0)} - \frac{N_0}{M}\right)\left(\beta_2 - \alpha_2 + \frac{c_1}{M}\right)\right);$$

$$\psi_{12} = \frac{M}{c_1 + c_2}\left(x_{1(0)}\left(\beta_1 + \beta_3 \frac{c_1}{M} + \alpha_3 \frac{c_2}{M}\right) + x_{2(0)}\beta_1 + \right.$$

$$\left. + (\dot{x}_{1(0)} + \dot{x}_{2(0)})\left(\beta_2 - \alpha_2 + \frac{c_1}{M}\right) + \left(\ddot{x}_{1(0)} + \ddot{x}_{2(0)} - \frac{N_0}{M}\right)(\beta_3 - \alpha_3)\right);$$

$$\psi_{20} = \frac{M}{c_1 + c_2}\left(x_{1(0)}\alpha_1\left(\beta_2 - \frac{c_1}{M}\right) + x_{2(0)}\alpha_1\beta_2 + (\dot{x}_{1(0)} + \dot{x}_{2(0)})\alpha_1\beta_3 + \right.$$

$$+\left(\ddot{x}_{1(0)}+\ddot{x}_{2(0)}-\frac{N_0}{M}\right)\alpha_1\Bigg);$$

$$\psi_{21}=\frac{M}{c_1+c_2}\left(x_{1(0)}\alpha_1\beta_3+x_{2(0)}\left(\alpha_1\beta_3+\alpha_2\frac{c_2}{M}+\frac{c_1}{M}\left(\beta_2-\frac{c_2}{M}\right)\right)+\right.$$

$$+(\dot{x}_{1(0)}+\dot{x}_{2(0)})\left(\alpha_1+\alpha_2\beta_3-\alpha_3\left(\beta_2-\frac{c_2}{M}\right)\right)+$$

$$\left.+\left(\ddot{x}_{1(0)}+\ddot{x}_{2(0)}-\frac{N_0}{M}\right)\left(\alpha_2-\beta_2+\frac{c_2}{M}\right)\right);$$

$$\psi_{22}=\frac{M}{c_1+c_2}\left(x_{1(0)}\alpha_1+x_{2(0)}\left(\alpha_1+\alpha_3\frac{c_2}{M}+\beta_3\frac{c_1}{M}\right)+\right.$$

$$\left.+(\dot{x}_{1(0)}+\dot{x}_{2(0)})\left(\alpha_2-\beta_2+\frac{c_2}{M}\right)+\left(\ddot{x}_{1(0)}+\ddot{x}_{2(0)}-\frac{N_0}{M}\right)(\alpha_3-\beta_3)\right).$$

Разложение левых частей уравнений (13а и б) на множители приводит к выражениям

$$X_1(s)=\left(\frac{A_1}{s-s_1}+\frac{B_1}{s-s_2}+\frac{C_1}{s-s_3}+\frac{D_1}{s-s_4}\right)N(s)+$$

$$+\frac{A_{1\psi}}{s-s_1}+\frac{B_{1\psi}}{s-s_2}+\frac{C_{1\psi}}{s-s_3}+\frac{D_{1\psi}}{s-s_4};\tag{14а}$$

$$X_2(s)=\left(\frac{A_2}{s-s_1}+\frac{B_2}{s-s_2}+\frac{C_2}{s-s_3}+\frac{D_2}{s-s_4}\right)N(s)+$$

$$+\frac{A_{2\psi}}{s-s_1}+\frac{B_{2\psi}}{s-s_2}+\frac{C_{2\psi}}{s-s_3}+\frac{D_{2\psi}}{s-s_4},\tag{14б}$$

где

$$A_1=\frac{\gamma_{12}s_1^2+\gamma_{11}s_1+\gamma_{10}}{(s_1-s_2)(s_1-s_3)(s_1-s_4)};\quad B_1=\frac{\gamma_{12}s_2^2+\gamma_{11}s_2+\gamma_{10}}{(s_2-s_1)(s_2-s_3)(s_2-s_4)};$$

$$C_1=\frac{\gamma_{12}s_3^2+\gamma_{11}s_3+\gamma_{10}}{(s_3-s_1)(s_3-s_2)(s_3-s_4)};\quad D_1=\frac{\gamma_{12}s_4^2+\gamma_{11}s_4+\gamma_{10}}{(s_4-s_1)(s_4-s_2)(s_4-s_3)};$$

$$A_{1\psi}=\frac{x_{1(0)}s_1^3+\psi_{12}s_1^2+\psi_{11}s_1+\psi_{10}}{(s_1-s_2)(s_1-s_3)(s_1-s_4)};$$

$$B_{1\psi} = \frac{x_{1(0)} s_2^3 + \psi_{12} s_2^2 + \psi_{11} s_2 + \psi_{10}}{(s_2 - s_1)(s_2 - s_3)(s_2 - s_4)};$$

$$C_{1\psi} = \frac{x_{1(0)} s_3^3 + \psi_{12} s_3^2 + \psi_{11} s_3 + \psi_{10}}{(s_3 - s_1)(s_3 - s_2)(s_3 - s_4)};$$

$$D_{1\psi} = \frac{x_{1(0)} s_4^3 + \psi_{12} s_4^2 + \psi_{11} s_4 + \psi_{10}}{(s_4 - s_1)(s_4 - s_2)(s_4 - s_3)};$$

$$A_2 = \frac{\gamma_{22} s_1^2 + \gamma_{21} s_1 + \gamma_{20}}{(s_1 - s_2)(s_1 - s_3)(s_1 - s_4)}; \quad B_2 = \frac{\gamma_{22} s_2^2 + \gamma_{21} s_2 + \gamma_{20}}{(s_2 - s_1)(s_2 - s_3)(s_2 - s_4)};$$

$$C_2 = \frac{\gamma_{22} s_3^2 + \gamma_{21} s_3 + \gamma_{20}}{(s_3 - s_1)(s_3 - s_2)(s_3 - s_4)}; \quad D_2 = \frac{\gamma_{22} s_4^2 + \gamma_{21} s_4 + \gamma_{20}}{(s_4 - s_1)(s_4 - s_2)(s_4 - s_3)};$$

$$A_{2\psi} = \frac{x_{2(0)} s_1^3 + \psi_{22} s_1^2 + \psi_{21} s_1 + \psi_{20}}{(s_1 - s_2)(s_1 - s_3)(s_1 - s_4)};$$

$$B_{2\psi} = \frac{x_{2(0)} s_2^3 + \psi_{22} s_2^2 + \psi_{21} s_2 + \psi_{20}}{(s_2 - s_1)(s_2 - s_3)(s_2 - s_4)};$$

$$C_{2\psi} = \frac{x_{2(0)} s_3^3 + \psi_{22} s_3^2 + \psi_{21} s_3 + \psi_{20}}{(s_3 - s_1)(s_3 - s_2)(s_3 - s_4)};$$

$$D_{2\psi} = \frac{x_{2(0)} s_4^3 + \psi_{22} s_4^2 + \psi_{21} s_4 + \psi_{20}}{(s_4 - s_1)(s_4 - s_2)(s_4 - s_3)};$$

s_1, s_2, s_3 и s_4 – корни полинома $P(s)$. Для определения последних необходимо решить уравнение четвертой степени:

$$s^4 + \varepsilon_3 s^3 + \varepsilon_2 s^2 + \varepsilon_1 s + \varepsilon_0 = 0. \tag{15}$$

Решение уравнения (15) методом Феррари [5], описанным в [6], основывается на совпадении корней этого уравнения с корнями двух квадратных уравнений:

$$s^2 + a_{1(s)} s + b_{1(s)} = 0; \tag{16а}$$

$$s^2 + a_{2(s)} s + b_{2(s)} = 0. \tag{16б}$$

Коэффициенты уравнений (16) выражаются через коэффициенты уравнения (15)

$$a_{1(s)}=\frac{\varepsilon_3}{2}+\sqrt{\left(\frac{\varepsilon_3}{2}\right)^2-\varepsilon_2+Z},\quad b_{1(s)}=\frac{Z}{2}+\delta\sqrt{\left(\frac{Z}{2}\right)^2-\varepsilon_0},$$
$$a_{2(s)}=\frac{\varepsilon_3}{2}-\sqrt{\left(\frac{\varepsilon_3}{2}\right)^2-\varepsilon_2+Z},\quad b_{2(s)}=\frac{Z}{2}-\delta\sqrt{\left(\frac{Z}{2}\right)^2-\varepsilon_0},\tag{17}$$

где

$$\delta=+1,\quad \text{если}\quad \frac{1}{2}\varepsilon_3 Z-\varepsilon_1>0;$$

$$\delta=-1,\quad \text{если}\quad \frac{1}{2}\varepsilon_3 Z-\varepsilon_1<0;$$

Z – наибольший действительный корень кубического уравнения:

$$z^3-\varepsilon_2 z^2+(\varepsilon_1\varepsilon_3-4\varepsilon_0)z+\varepsilon_0(4\varepsilon_2-\varepsilon_3^2)-\varepsilon_1^2=0.\tag{18}$$

Решение кубического уравнения изложено в [2]. В общем случае кубическое уравнение всегда имеет хотя бы один действительный корень z_3, который и следует ввести в выражения для коэффициентов квадратных уравнений.

При реальных управляющих параметрах динамической системы (11) уравнение (15) имеет два комплексно сопряженных и два действительных корня

$$s_{1,2}=-p_1\pm iq_1,\quad s_{3,4}=-p_2\pm q_2.\tag{19}$$

В случае сравнительно небольших величин отношений упругих жесткостей и деформационных упрочнений к вязким сопротивлениям тел квадратное уравнение (16а) имеет комплексно сопряженные корни

$$p_1=\frac{a_{1(s)}}{2},\quad q_1=\sqrt{b_{1(s)}-\left(\frac{a_{1(s)}}{2}\right)^2},$$

уравнение (16б) – действительные корни

$$p_2=\frac{a_{2(s)}}{2},\quad q_2=\sqrt{\left(\frac{a_{2(s)}}{2}\right)^2-b_{2(s)}}.$$

При больших величинах указанных отношений уравнение (16б) имеет комплексно сопряженные корни, а уравнение (16а) – действительные корни. В этом случае в выражениях (19) p_1, q_1 и p_2, q_2 следует поменять местами.

Преобразование системы (14) к действительной переменной t дает решение системы дифференциальных уравнений (11):

$$x_1(t)=\int_0^t N(\tau)(A_1e^{s_1(t-\tau)}+B_1e^{s_2(t-\tau)}+C_1e^{s_3(t-\tau)}+D_1e^{s_4(t-\tau)})d\tau+$$

$$+A_{1\psi}e^{s_1t}+B_{1\psi}e^{s_2t}+C_{1\psi}e^{s_3t}+D_{1\psi}e^{s_4t}; \qquad (20а)$$

$$x_2(t)=\int_0^t N(\tau)(A_2e^{s_1(t-\tau)}+B_2e^{s_2(t-\tau)}+C_2e^{s_3(t-\tau)}+D_2e^{s_4(t-\tau)})d\tau+$$

$$+A_{2\psi}e^{s_1t}+B_{2\psi}e^{s_2t}+C_{2\psi}e^{s_3t}+D_{2\psi}e^{s_4t}. \qquad (20б)$$

После преобразования членов с комплексными показателями в тригонометрические функции получим в явном виде периодические решения:

$$x_1(t)=e^{-p_1t}\left(\int_0^t N(\tau)e^{p_1\tau}(A_{10}\sin q_1(t-\tau)+B_{10}\cos q_1(t-\tau))d\tau+\right.$$

$$\left.+A_{11}\sin q_1t+B_{11}\cos q_1t\right)+\int_0^t N(\tau)(C_1e^{s_3(t-\tau)}+D_1e^{s_4(t-\tau)})d\tau+$$

$$+C_{1\psi}e^{s_3t}+D_{1\psi}e^{s_4t}; \qquad (21а)$$

$$x_2(t)=e^{-p_1t}\left(\int_0^t N(\tau)e^{p_1\tau}(A_{20}\sin q_1(t-\tau)+B_{20}\cos q_1(t-\tau))d\tau+\right.$$

$$\left.+A_{21}\sin q_1t+B_{21}\cos q_1t\right)+\int_0^t N(\tau)(C_2e^{s_3(t-\tau)}+D_2e^{s_4(t-\tau)})d\tau+$$

$$+C_{2\psi}e^{s_2t}+D_{2\psi}e^{s_4t}, \qquad (21б)$$

где коэффициенты в меру их сходства целесообразно выразить общими соотношениями соответственно для первого и второго уравнений системы, обозначив при этом индексом $k=1$ соответствие первому уравнению для переменной x_1 и индексом $k=2$ – второму уравнению для переменной x_2:

$$A_{k0}=\frac{\gamma_{k2}((p_1^2-q_1^2)Y_{pq}-4p_1(p_2-p_1)q_1^2)}{q_1L_1L_2}+$$

$$+\frac{\gamma_{k1}(2(p_2-p_1)q_1^2-p_1Y_{pq})+\gamma_{k0}Y_{pq}}{q_1L_1L_2};$$

$$L_1:=(p_2-p_1-q_2)^2+q_1^2;\quad L_2:=(p_2-p_1+q_2)^2+q_1^2;$$

$$Y_{pq}:=(p_2-p_1)^2-q_1^2-q_2^2;$$

$$B_{k0}=-\frac{2\gamma_{k2}(p_1Y_{pq}+(p_2-p_1)(p_1^2-q_1^2))-\gamma_{k1}(Y_{pq}+2p_1(p_2-p_1))}{L_1L_2}-$$

$$-\frac{2\gamma_{k0}(p_2-p_1)}{L_1L_2};$$

$$C_k=\frac{\gamma_{k2}s_3^2+\gamma_{k1}s_3+\gamma_{k0}}{2q_2L_3};\quad D_k=-\frac{\gamma_{k2}s_4^2+\gamma_{k1}s_4+\gamma_{\kappa 0}}{2q_2L_4};$$

$$L_3:=(p_1-p_2+q_2)^2+q_1^2;\quad L_4:=(p_1-p_2=q_2)^2+q_1^2;$$

$$A_{k1}=\frac{1}{q_1L_1L_2}(x_{k(0)}Z_{a1}+\psi_{k2}Z_{a2}+\psi_{k1}Z_{a3}+\psi_{k0}Y_{pq});$$

$$Z_{a1}:=2(p_2-p_1)(3p_1^2-q_1^2)q_1^2-p_1(p_1^2-3q_1^2)Y_{pq};$$

$$Z_{a2}:=(p_1^2-q_1^2)Y_{pq}-4p_1(p_2-p_1)q_1^2;$$

$$Z_{a3}:=2(p_2-p_1)q_1^2-p_1Y_{pq};$$

$$B_{k1}=\frac{1}{L_1L_2}(x_{k(0)}Z_{b1}-\psi_{k2}Z_{b2}+\psi_{k1}Z_{b3}-2\psi_{k0}(p_2-p_1));$$

$$Z_{b1}:=(3p_1^2-q_1^2)Y_{pq}+2p_1(p_2-p_1)(p_1^2-3q_1^2);$$

$$Z_{b2}:=2(p_1Y_{pq}+(p_2-p_1)(p_1^2-q_1^2));$$

$$Z_{b3}:=Y_{pq}+2p_1(p_2-p_1);$$

$$C_{k\psi}=\frac{x_{k(0)}s_3^3+\psi_{k2}s_3^2+\psi_{k1}s_3+\psi_{k0}}{2q_2L_3};$$

$$D_{k\psi}=\frac{x_{k(0)}s_4^3+\psi_{k2}s_4^2+\psi_{k1}s_4+\psi_{k0}}{2q_2L_4}.$$

Для расчета приведенных выше коэффициентов необходимы величины скоростей и ускорений. Они могут быть выражены общим соотношением

$$x_{km} = e^{-p_1 t}(A_{km} \sin q_1 t + B_{km} \cos q_1 t) + C_{km} e^{s_3 t} + D_{km} e^{s_4 t}, \tag{22}$$

где первый индекс $k=1$ указывает на первое и $k=2$ – на второе из уравнений системы, второй индекс $m=2$ – на скорость $x_{k2}(t):=\dot{x}_k(t)$ и $m=3$ – на ускорение $x_{k3}(t):=\ddot{x}_k(t)$. При этом

$$A_{k2} = NA_{k0} - p_1 A_{k1} - q_1 B_{k1}; \quad B_{k2} = NB_{k0} - p_1 B_{k1} + q_1 A_{k1};$$

$$C_{k2} = NC_k + s_3 C_{k\psi}; \quad D_{k2} = ND_k + s_4 D_{k\psi};$$

$$A_{k3} = A_{k0}(\dot{N} - p_1 N) - q_1 NB_{k0} + (p_1^2 - q_1^2)A_{k1} + 2p_1 q_1 B_{k1};$$

$$B_{k3} = B_{k0}(\dot{N} - p_1 N) + q_1 NA_{k0} + (p_1^2 - q_1^2)B_{k1} - 2p_1 q_1 A_{k1};$$

$$C_{k3} = C_k(\dot{N} + s_3 N) + s_3^2 C_{k\psi}; \quad D_{k3} = D_k(\dot{N} + s_4 N) + s_4^2 D_{k\psi}.$$

Постоянная скорость нагружения системы. При постоянной скорости нагружения ($\dot{N}_0 = \text{const}$) система дифференциальных уравнений (11) принимает вид

$$\dddot{x}_1 + \alpha_3 \ddot{x}_1 + \alpha_2 \dot{x}_1 + \alpha_1 x_1 + \dddot{x}_2 + \alpha_3 \ddot{x}_2 + \left(\alpha_2 - \frac{c_1}{M}\right)\dot{x}_2 =$$

$$= \frac{1}{M}\left(\dot{N}_0 + \frac{c_1 + g_1}{b_1}(N_0 + \dot{N}_0 t)\right); \tag{23а}$$

$$\dddot{x}_1 + \beta_3 \ddot{x}_1 + \left(\beta_2 - \frac{c_2}{M}\right)\dot{x}_1 + \dddot{x}_2 + \beta_3 \ddot{x}_2 + \beta_2 \dot{x}_2 + \beta_1 x_2 =$$

$$= \frac{1}{M}\left(\dot{N}_0 + \frac{c_2 + g_2}{b_2}(N_0 + \dot{N}_0 t)\right), \tag{23б}$$

где N_0 – начальная сила при $t=0$. Решение системы операторным методом приводит к следующему результату:

$$x_1(t) = e^{-p_1 t}(\widetilde{A}_{11} \sin q_1 t + \widetilde{B}_{11} \cos q_1 t) + \widetilde{C}_{11} e^{s_3 t} + \widetilde{D}_{11} e^{s_4 t} + J_1 t + K_1; \tag{24а}$$

$$x_2(t) = e^{-p_1 t}(\widetilde{A}_{21} \sin q_1 t + \widetilde{B}_{21} \cos q_1 t) + \widetilde{C}_{21} e^{s_3 t} + \widetilde{D}_{21} e^{s_4 t} + J_2 t + K_2, \tag{24б}$$

где при принятых выше обозначениях индексов

$$\widetilde{A}_{k1}=\frac{1}{q_1L_1L_2}(x_{k0}Z_{a1}+\widetilde{\psi}_{k2}Z_{a2}+\widetilde{\psi}_{k1}Z_{a3}+\widetilde{\psi}_{k0}Y_{pq}-J_kZ_{a4}+K_kZ_{a5});$$

$$\widetilde{B}_{k1}=\frac{1}{L_1L_2}(x_{k0}Z_{b1}-\widetilde{\psi}_{k2}Z_{b2}+\widetilde{\psi}_{k1}Z_{b3}-\widetilde{\psi}_{k0}Y_{pq}+J_kZ_{b4}+K_kZ_{b5});$$

$Z_{a1},Z_{a2},Z_{a3},Z_{b1},Z_{b2},Z_{b3}$ определены выше и

$$Z_{a4}:=(p_2(2p_1+p_2)-q_1^2)Y_{pq}-4p_2(p_2-p_1)q_1^2;$$

$$Z_{a5}:=(p_2^2-q_2^2)(2(p_2-p_1)q_1^2-p_1Y_{pq});$$

$$Z_{b4}:=2((p_2-p_1)(p_2(2p_1+p_2)-q_1^2)-2p_2Y_{pq});$$

$$Z_{b5}:=(p_2^2-q_2^2)(2p_1(p_2-p_1)+Y_{pq});$$

$$\widetilde{C}_{k1}=\frac{x_{k(0)}s_3^3+\widetilde{\psi}_{k2}s_3^2+\widetilde{\psi}_{k1}s_3+\widetilde{\psi}_{k0}-J_k(p_1^2+q_1^2-2p_1s_4)}{2q_2L_3}+$$

$$+\frac{K_k(p_1^2+q_1^2)s_4}{2q_2L_3};$$

$$\widetilde{D}_{k1}=-\frac{x_{k(0)}s_4^3+\widetilde{\psi}_{k2}s_4^2+\widetilde{\psi}_{k1}s_4+\widetilde{\psi}_{k0}-J_k(p_1^2+q_1^2-2p_1s_3)}{2q_2L_4}-$$

$$-\frac{K_k(p_1^2+q_1^2)s_3}{2q_2L_4};$$

$$J_1=\frac{\beta_1(c_1+g_1)}{\varepsilon_0(c_1+c_2)b_1}\dot{N}_0;\quad J_2=\frac{\alpha_1(c_2+g_2)}{\varepsilon_0(c_1+c_2)b_2}\dot{N}_0;$$

$$K_k=\frac{1}{\varepsilon_0}(m_k-2J_k(p_2(p_1^2+q_1^2)+p_1(p_2^2-q_2^2)));$$

$$m_1=\frac{1}{c_1+c_2}\left(\beta_1\frac{c_1+g_1}{b_1}N_0+\left(\beta_1+\beta_2\frac{c_1+g_1}{b_1}-\left(\alpha_2-\frac{c_1}{M}\right)\frac{c_2+g_2}{b_2}\right)\dot{N}_0\right);$$

$$m_2 = \frac{1}{c_1 + c_2}\left(\alpha_1 \frac{c_2 + g_2}{b_2} N_0 + \left(\alpha_1 + \alpha_2 \frac{c_2 + g_2}{b_2} - \left(\beta_2 - \frac{c_2}{M}\right)\frac{c_1 + g_1}{b_1}\right)\dot{N}_0\right);$$

$$\widetilde{\psi}_{10} = \frac{M}{c_1 + c_2}\left(x_{1(0)}\alpha_2\beta_1 + x_{2(0)}\beta_1\left(\alpha_2 - \frac{c_1}{M}\right) + (\ddot{x}_{1(0)} + \ddot{x}_{2(0)})\alpha_3\beta_1 + \right.$$

$$+(\ddot{x}_{1(0)} + \ddot{x}_{2(0)})\beta_1 + \left(\beta_2 \frac{c_1 + g_1}{b_1} - \left(\alpha_2 - \frac{c_1}{M}\right)\frac{c_2 + g_2}{b_2}\right)\frac{N_0}{M} +$$

$$\left. + \left(\beta_2 - \alpha_3 \frac{c_2 + g_2}{b_2} - \alpha_2 + \frac{c_1}{M}\right)\frac{\dot{N}_0}{M}\right);$$

$$\widetilde{\psi}_{11} = \frac{M}{c_1 + c_2}\left(x_{1(0)}\left(\alpha_3\beta_1 + \alpha_2 \frac{c_2}{M} + \frac{c_1}{M}\left(\beta_2 - \frac{c_2}{M}\right)\right) + x_{2(0)}\alpha_3\beta_1 + \right.$$

$$+(\ddot{x}_{1(0)} + \dot{x}_{2(0)})\left(\beta_1 + \alpha_3\beta_2 - \beta_3\left(\alpha_2 - \frac{c_1}{M}\right)\right) +$$

$$\left. +(\ddot{x}_{1(0)} + \ddot{x}_{2(0)})\left(\beta_2 - \alpha_2 + \frac{c_1}{M}\right) + \left(\beta_3 \frac{c_1 + g_1}{b_1} - \alpha_3 \frac{c_2 + g_2}{b_2}\right)\frac{N_0}{M}\right);$$

$$\widetilde{\psi}_{20} = \frac{M}{c_1 + c_2}\left(x_{1(0)}\alpha_1\left(\beta_2 - \frac{c_2}{M}\right) + x_{2(0)}\alpha_1\beta_2 + (\dot{x}_{1(0)} + \dot{x}_{2(0)})\alpha_1\beta_3 + \right.$$

$$+(\ddot{x}_{1(0)} + \ddot{x}_{2(0)})\alpha_1 + \left(\alpha_2 \frac{c_2 + g_2}{b_2} - \left(\beta_2 - \frac{c_2}{M}\right)\frac{c_1 + g_1}{b_1}\right)\frac{N_0}{M} +$$

$$\left. + \left(\alpha_2 - \beta_2 + \frac{c_2}{M} - \beta_3 \frac{c_1 + g_1}{b_1}\right)\frac{\dot{N}_0}{M}\right);$$

$$\widetilde{\psi}_{21} = \frac{M}{c_1 + c_2}\left(x_{1(0)}\alpha_1\beta_3 + x_{2(0)}\left(\alpha_1\beta_3 + \alpha_2 \frac{c_2}{M} + \frac{c_1}{M}\left(\beta_2 - \frac{c_2}{M}\right)\right) + \right.$$

$$+(\ddot{x}_{1(0)} + \dot{x}_{2(0)})\left(\alpha_1 + \alpha_2\beta_3 - \alpha_3\left(\beta_2 - \frac{c_2}{M}\right)\right) +$$

$$\left. +(\ddot{x}_{1(0)} + \ddot{x}_{2(0)})\left(\alpha_2 - \beta_2 + \frac{c_2}{M}\right) + \left(\alpha_3 \frac{c_2 + g_2}{b_2} - \beta_3 \frac{c_1 + g_1}{b_1}\right)\frac{N_0}{M}\right);$$

$$\widetilde{\psi}_{12} = \psi_{12}; \quad \widetilde{\psi}_{22} = \psi_{22}.$$

Скорости и ускорения определяются соотношениями:

$$\dot{x}_k(t) = e^{-p_1 t}(\widetilde{A}_{k2} \sin q_1 t + \widetilde{B}_{k2} \cos q_1 t) + \widetilde{C}_{k2} e^{s_3 t} + \widetilde{D}_{k2} e^{s_4 t} + J_k; \quad (25)$$

$$\ddot{x}_k(t) = e^{-p_1 t}(\widetilde{A}_{k3} \sin q_1 t + \widetilde{B}_{k2} \cos q_1 t) + \widetilde{C}_{k3} e^{s_3 t} + \widetilde{D}_{k3} e^{s_4 t}, \quad (26)$$

где индекс k тот же, что и в соотношении (22); коэффициенты $\widetilde{A}_{k2}, \widetilde{B}_{k2}$, $\widetilde{C}_{k2}, \widetilde{D}_{k2}, \widetilde{A}_{k3}, \widetilde{B}_{k3}, \widetilde{C}_{k3}$ и $\widetilde{D}_{k3}$ определяются по значениям $\widetilde{A}_{k1}, \widetilde{B}_{k1}, \widetilde{C}_{k1}$ и $\widetilde{D}_{k1}$ с использованием формул, относящихся к соотношению (22), в которых следует опустить члены, содержащие силу N.

Воздействие постоянной силы. В случае воздействия на механическую систему постоянной силы N_0 полученное решение несколько упрощается. В выражениях для коэффициентов и в решении исчезают величины J_k, а формулы для K_k принимают вид

$$K_1 = \frac{\beta_1(c_1 + g_1)}{\varepsilon_0(c_1 + c_2)b_1} N_0; \quad K_2 = \frac{\alpha_1(c_2 + g_2)}{\varepsilon_0(c_1 + c_2)b_2} N_0.$$

Кроме того, в выражениях для $\widetilde{\psi}_{k1}$ следует исключить члены, содержащие скорость нагружения $\dot{N}_0$.

При воздействии постоянной силы по истечении переходного процесса, описываемого указанным выше решением, механическая система приходит в состояние статического равновесия, в котором общие удлинения тел *1* и *2* (рис. 1) достигают предельных значений, определяемых соотношениями

$$x_1 = \left(\frac{1}{c_1} + \frac{1}{g_1}\right) N_0 \quad \text{и} \quad x_2 = \left(\frac{1}{c_2} + \frac{1}{g_2}\right) N_0.$$

При снятии внешней силы упругие элементы, не соединенные с вязкими элементами, разгружаются, и результирующее необратимое удлинение системы

$$x_1 = x_{1i} + x_{2i} = \left(\frac{1}{g_1} + \frac{1}{g_2}\right) N_0.$$

Отметим, что в переходных процессах необратимое удлинение тел $x_{1i}(t)$ и $x_{2i}(t)$ определяется по величинам $x_1(t), x_2(t)$ соответственно с помощью формулы (25) [1], в которой вместо $x(t)$ следует подставить либо $x_1(t)$, либо $x_2(t)$.

Ниже приведены результаты расчета поведения рассмотренной системы при ее статическом нагружении постоянной силой $N_0 = 1000$ Н. При расчете использовали следующие параметры: для системы – $M = 1000$ кг, $r = 1000$ Н·с/м; для первого тела – $c_1 = 10$ МН/м, $g_1 = 5$ МН/м, $b_1 = 5$ МН·с/м; для второго тела – $c_2 = 8$ МН/м, $g_2 = 2$ МН/м, $b_2 = 3$ МН·с/м. Предел упругости первого тела принят равным 600 Н, второго – 300 Н. Расчет выполнялся по программам, написанным автором на алгоритмическом языке FORTRAN.

При указанных выше параметрах и нарастании силы до предела упругости второго тела система ведет себя как классическая неавтономная динамическая система второго порядка, решение которой представлено в сообщении [2]. Поскольку при переходе к более сложной системе необходимо определение удлинений двух тел, в настоящей работе приведено соответствующее решение системы из двух тел по изложенному выше методу. Из этого решения следуют простые соотношения между упругими удлинениями первого x_1 и второго x_2 тела и общим удлинением системы x:

$$x_1 = \frac{c_2}{c_1 + c_2} x; \quad x_2 = \frac{c_1}{c_1 + c_2} x, \tag{27}$$

что существенно упрощает задачу. Такие же соотношения должны сохраняться для скоростей и ускорений. Поэтому они были использованы для определения доли первого и второго тела в общем упругом удлинении на последующих этапах расчета при переходе системы от менее сложного к более сложному виду. Результаты расчета приведены на рис. 2. При этом в последовательно соединенных элементах действует одинаковая сила [2], временная зависимость которой представлена на рис. 3. Эти результаты коррелируют с данными, приведенными в сообщении [2] для неавтономной динамической системы третьего порядка.

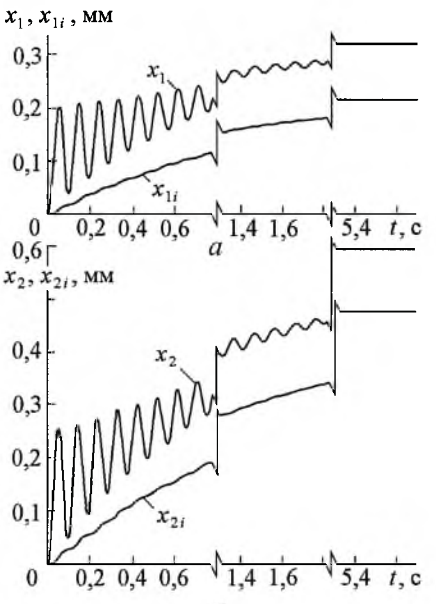

Рис. 2. Временные зависимости общих удлинений x_1, x_2 и необратимых удлинений x_{1i}, x_{2i} соответственно для первого (*а*) и второго (*б*) вязкоупругих деформационно упрочняемых тел, обладающих пределом упругости, при статическом воздействии постоянной силы N_0.

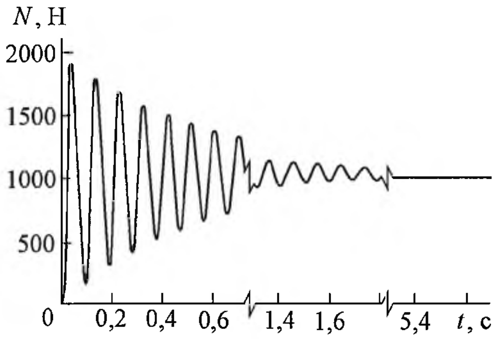

Рис. 3. Осцилляция силы в последовательно соединенных элементах системы при статическом нагружении.

Если ни одно из тел не имеет предела упругости, то на самой ранней стадии статического нагружения системы в течение до 0,02 с при положительной силе наблюдается малое отрицательное удлинение, переходящее затем в положительное, закономерно возрастающее с повышением силы в процессе нагружения. Если же начальная скорость превышает 10^{-5} м/с, то эффект обратной реакции на внешнее воздействие исчезает. Можно предположить, что подобная реакция на внешнее воздействие характерна для сложных динамических систем.

Резюме

Розглянуто реологічну модель та динаміку відкритої механічної системи, до якої входять пружний елемент машини і складене тіло з двох послідовно з'єднаних необоротно деформівних тіл, з одним ступенем свободи під дією зовнішньої сили. При навантаженні системи нижче границі пружності обох тіл рух механічної системи описується класичною динамічною системою другого порядку, в той час як при навантаженні вище границі пружності одного з тіл – динамічною системою третього порядку, а вище границі пружності обох тіл – динамічною системою з двох диференційних рівнянь третього порядку. Розв'язки цієї динамічної системи мають характер затухаючих коливань з підвищенням фактора затухання по мірі зростання відношення пружних жорсткостей та деформаційних зміцнень до в'язкого опору деформівних тіл.

1. *Ковальченко М. С.* Динамика одноосного растяжения вязкоупругого деформационно упрочняемого тела в системе с одной степенью свободы. Сообщ. 1. Предписанное движение системы // Пробл. прочности. – 1998. – № 4. – С. 16 – 27.

2. *Ковальченко М. С.* Динамика одноосного растяжения вязкоупругого деформационно упрочняемого тела в системе с одной степенью свободы. Сообщ. 2. Воздействие внешней силы // Там же. – 1998. – № 5. – С. 12 – 26.

3. *Ковальченко М. С.* Динамика одноосного растяжения вязкоупругого деформационно упрочняемого тела в системе с одной степенью свободы. Сообщ. 3. Гидравлическое нагружение системы // Там же. – 2000. – № 1. – С. 42 – 61.
4. *Ламб Г.* Гидродинамика. – М.; Л.: Гостехиздат, 1947. – 704 с.
5. *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике для научных работников и инженеров / Пер. с англ. – М.: Наука, 1973. – С. 44 – 45.
6. *Анго А.* Математика для электро- и радиоинженеров / Пер. с франц. – М.: Наука, 1965. – С. 675 – 676.

Поступила 23. 02. 2000