

Некоторые аспекты колебаний упругого тела с “дышащей” несплошностью материала

В. В. Матвеев, А. П. Бовсуновский

Институт проблем прочности НАН Украины, Киев, Украина

Представлены результаты аналитических, численных и экспериментальных исследований некоторых вибрационных признаков повреждения при резонансных, суб- и суперрезонансных режимах колебаний упругого тела с “дышащей” несплошностью материала в широком диапазоне соотношения частот возбуждения и собственной частоты колебательной системы (0,25...2,0). Выполнена оценка пределов применимости полученных аналитических решений.

Введение. Колебания упругих тел с так называемыми “дышащими” несплошностями материала, т.е. несплошностями, которые при положительном значении внутренних сил раскрываются, а при отрицательном – закрываются, и тело деформируется как цельное, представляют особый интерес. Скачкообразное изменение жесткости тела, происходящее в момент закрытия или раскрытия несплошности и определяющее несимметричную билинейность восстанавливающей силы (упругой характеристики тела), обуславливает существенную нелинейность колебательной системы. Нарушения сплошности материала возникают в результате несовершенств технологии изготовления и в процессе эксплуатации и могут быть как рассеянными по объему тела, так и локальными. Характерным примером систем с дышащим локальным нарушением сплошности материала являются элементы конструкций с трещиной (трещинами) усталости.

В последнее десятилетие значительно возрос интерес к исследованию особенностей нелинейных колебаний упругих тел с дышащей (закрывающейся) трещиной с целью выявления наиболее эффективных вибрационных диагностических признаков усталостного повреждения элементов конструкций. Об этом свидетельствуют многочисленные публикации [1–9] в международных журналах, в которых представлены главным образом результаты исследований теоретического характера.

В большей части работ в качестве вибрационного признака повреждения (ВПП) рассматривают изменение собственных частот конструктивных элементов [10], реже пытаются использовать параметры высших гармонических и постоянной составляющих спектра периодического колебательного процесса, а также такие характеристики, как асимметрия волны цикла колебаний по длительности и максимальному отклонению на полупериодах разного знака. Наименее исследованным, по-видимому, является влияние параметров дышащей трещины на характеристики суб- и супергармонических колебаний упругих тел.

В данной работе представлен анализ результатов исследований, выполненных в отделе колебаний и вибрационной надежности ИПП НАН Украины, начиная со второй половины 90-х годов. В частности, показано влияние параметров закрывающейся несплошности материала на собст-

венные частоты и формы колебаний упругого тела, на параметры постоянной и гармонических составляющих колебательного процесса в области основного, суб- и суперрезонансов. В качестве конкретного примера упругого тела рассмотрены призматические стержни с закрывающимися трещинами нормального отрыва.

1. Собственные частоты колебаний. Собственная частота колебаний тела с закрывающейся трещиной, которое можно представить в виде нелинейной одномассовой системы с асимметричной билинейной упругой характеристикой (рис. 1), определяется по известной формуле

$$\omega = \frac{2\omega_0\omega'}{\omega_0 + \omega'}, \quad (1)$$

где ω_0 – собственная частота упругого тела при отсутствии несплошности, т.е. при закрытой трещине; ω' – собственная частота колебаний тела с несплошностью, т.е. при раскрытой трещине.

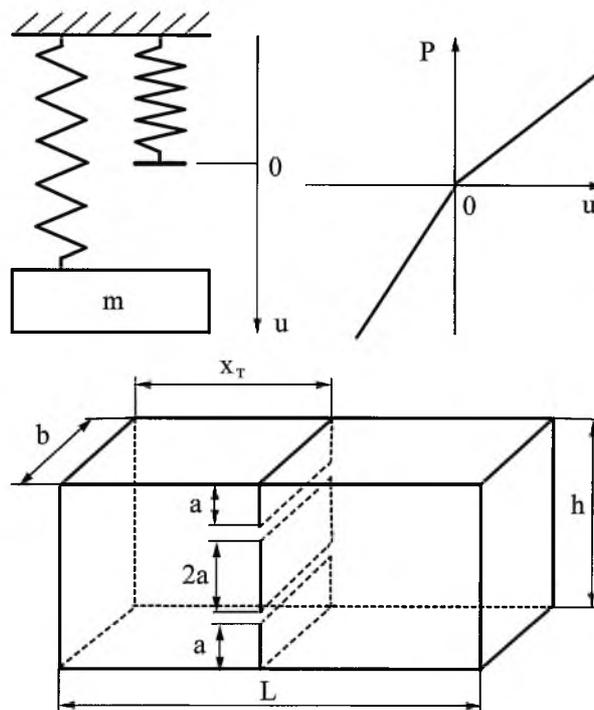


Рис. 1. Модель тела с трещиной.

Значение частот ω' и ω можно выразить через параметр α , определяющий относительное изменение жесткости тела при закрытой (K_0) и открытой (K') трещине

$$\alpha = \frac{K_0 - K'}{K_0}, \quad (2)$$

следующим образом [11]:

$$\omega' = \omega_0 \sqrt{1 - \alpha}; \quad \omega = \frac{2\sqrt{1 - \alpha}}{1 + \sqrt{1 - \alpha}} \omega_0. \quad (3)$$

В качестве характерного примера влияния трещины на собственные частоты колебаний упругого тела рассмотрим призматический стержень длиной L прямоугольного поперечного сечения ($b \times h$) с одной краевой трещиной размером a либо с двумя симметричными размером a каждая, или с одной центральной сквозной размером $2a$, расположенными на расстоянии x_T от крайнего сечения (рис. 1).

Приближенное значение относительного изменения жесткости стержня при продольных и изгибных колебаниях определяется выражением [11, 12]

$$\alpha = D(h/L, x_T) H_I(\gamma) [1 + D(h/L, x_T) H_I(\gamma)]^{-1}, \quad (4)$$

которое получено из условия равенства при одинаковых условиях нагружения потенциальной энергии деформации стержня с открытой трещиной, т.е. при жесткости $K' = (1 - \alpha)K_0$, сумме потенциальной энергии деформации стержня без трещины при начальной жесткости K_0 и дополнительной энергии, обусловленной наличием трещины и выраженной через коэффициент интенсивности напряжений

$$K_I = \frac{P(x_T)}{S_2} \sqrt{\pi a} F_I(\gamma),$$

где $P(x_T)$ – внутреннее усилие в поперечном сечении, эквивалентное осевому усилию при продольных колебаниях и изгибающему моменту – при изгибных; $\gamma = a/h$ – относительная длина трещины; $F_I(\gamma)$ – безразмерная функция, определяемая по справочным данным; S_2 – геометрическая характеристика поперечного сечения стержня, эквивалентная в случае продольных колебаний площади сечения, а при изгибных колебаниях – осевому моменту сопротивления площади сечения. В выражении (4)

$$D(h/L, x_T) = 2\pi \frac{bh^2 S_1}{RS_2^2} \frac{P^2(x_T)}{\int_0^L P^2(x) dx}; \quad H_I(\gamma) = \int_0^\gamma \gamma F_I^2(\gamma) d\gamma, \quad (5)$$

где S_1 – геометрическая характеристика поперечного сечения, равная bh при продольных колебаниях и $bh^3/12$ – при изгибных; $R=1$ – в случае одной краевой трещины, $R=2$ – в случае двух симметричных или одной центральной трещины при продольных колебаниях.

Ранее [12] выражения для безразмерной функции $H_I(\gamma)$, полученные с использованием имеющихся в справочной литературе [13] формул для функции $F_I(\gamma)$, представлены для всех указанных выше типов трещин. В настоящей работе ограничимся двумя примерами значений $H_I(\gamma)$:

в случае двух симметричных трещин при продольных колебаниях ($R = 2$; $\gamma = 2a / h$)

$$H_I(\gamma) = 0,62945\gamma^2 - 0,11519\gamma^3 + 0,45865\gamma^4 - 0,89974\gamma^5 + \\ + 1,13852\gamma^6 - 0,54644\gamma^7 + 0,95157\gamma^8;$$

в случае одной краевой трещины при изгибных колебаниях ($R = 1$; $\gamma = a / h$)

$$H_I(\gamma) = 0,6295\gamma^2 - 1,0472\gamma^3 + 4,602\gamma^4 - 9,9752\gamma^5 + \\ + 20,2948\gamma^6 - 32,9933\gamma^7 + 47,0408\gamma^8.$$

Оценка достоверности приведенного аналитического решения (4), (5) выполнена численно (методом конечных элементов) и экспериментально на примере определения собственной частоты колебаний консольного стержня ($L = 150$ мм; $h = 20$ мм; $a = 1 \dots 8$ мм; $x_T = 0,07L$) с открытой трещиной при продольных и изгибных колебаниях по первой форме ($i = 1$). Для рассматриваемых условий закрепления стержня:

при продольных колебаниях –

$$D(h / L, x_T) = 4 \frac{\pi h}{RL} \cos^2 k_i x_T;$$

при изгибных колебаниях –

$$D(h / L, x_T) = 24 \frac{\pi h}{RL} \left[S(k_i x_T) - \frac{S(k_i L)}{T(k_i L)} T(k_i x_T) \right]^2,$$

где $S(kx) = 0,5(\operatorname{ch} kx + \cos kx)$; $T(kx) = 0,5(\operatorname{sh} kx + \sin kx)$; $k_i = \pi(2i - 1) / L$.

Сопоставление данных расчета по формулам (3) и (4) с результатами численного и натурного экспериментов показало, что аналитическое решение для продольных колебаний можно с достаточной точностью использовать при наличии двух симметричных трещин в диапазоне значений $0 \leq \gamma \leq 0,8$ (расхождение результатов не превышало 6%), а в случае наличия одной краевой трещины – в диапазоне $0 \leq \gamma < 0,1$ (при $\gamma = 0,1$ расхождение результатов достигало 9...15%). Относительно высокая погрешность предложенного подхода в последнем случае объясняется возникновением дополнительного изгиба стержня, который в расчете не учитывался. При изгибных колебаниях расхождение результатов не превышало 4% в диапазоне значений $0 \leq \gamma \leq 0,6$, а при $0,6 < \gamma \leq 0,8$ составило 13%.

Аналитическая зависимость (4) и формулы (3) позволяют рассчитать относительное изменение собственной частоты колебаний стержней с открытой

$$\beta' = \frac{\omega_0 - \omega'}{\omega_0} = 1 - \sqrt{1 - \alpha}$$

и закрывающейся

$$\beta = \frac{\omega_0 - \omega}{\omega_0} = \frac{1 - \sqrt{1 - \alpha}}{1 + \sqrt{1 - \alpha}}$$

поперечными трещинами нормального отрыва разного типа, размера и места расположения при разных отношениях высоты поперечного сечения и длины, условиях закрепления и формах продольных и изгибных (в рамках технической теории) колебаний стержня. Следует заметить, что при изгибных колебаниях стержня билинейная восстанавливающая сила и соответствующая ей частота ω характерны для одной краевой трещины. Наличие двух симметричных трещин или одной центральной обуславливает одинаковое изменение жесткости стержня на разных полуциклах колебаний.

Приведенные на рис. 2 зависимости $\beta(\gamma)$ иллюстрируют влияние размера и относительного расположения закрывающейся трещины на собственные частоты изгибных колебаний консольного стержня. Как видно, влияние формы колебаний существенно зависит от места расположения трещины. Расчеты также показали, что изменение частоты изгибных колебаний стержня с краевой трещиной более чем в три раза превышает изменение частоты продольных колебаний.

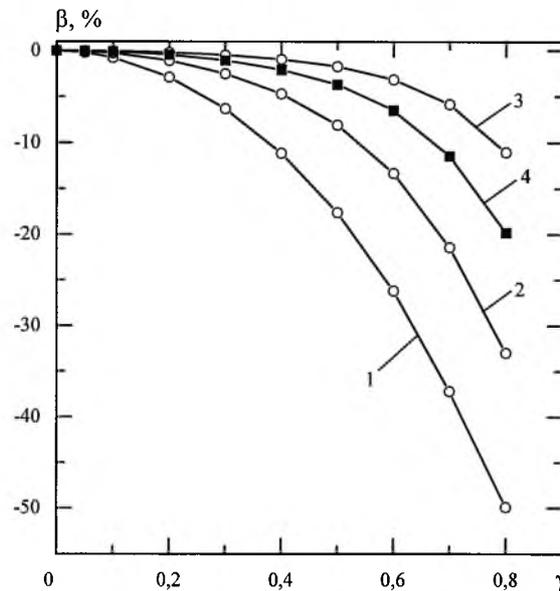


Рис. 2. Зависимости относительного изменения собственной частоты изгибных колебаний консольного стержня ($h/L = 0,0627$) от относительной длины краевой закрывающейся трещины: 1, 4 – первая форма колебаний, соответственно $x_T/L = 0,1$, $x_T/L = 0,5$; 2 – вторая форма колебаний, $x_T/L = 0,1$; 3 – третья форма колебаний, $x_T/L = 0,1$.

2. Колебания при основном резонансе. Упругое тело с закрывающейся несплошностью материала при колебаниях по одной из собственных форм моделируется в виде колебательной системы с одной степенью свободы (рис. 1). Колебания такой системы описываются дифференциальным уравнением

$$\frac{d^2 u}{dt^2} + \omega^2 \left[u + \varepsilon f \left(u, \frac{du}{dt} \right) \right] = \varepsilon F_0 \cos \nu t, \quad (6)$$

где

$$\varepsilon f(u) = [1 - 0,5\alpha(1 + \text{sign } u)]u - \quad (7)$$

так называемая функция дыхания несплошности материала; ε – малый параметр.

Решение дифференциального уравнения (6), полученное с использованием асимптотического метода нелинейной механики во втором приближении, позволило определить значения постоянной составляющей A_0 и амплитуд A_n высших гармоник в цикле перемещения при свободных и резонансных колебаниях:

$$a_0 = \frac{A_0}{A_1} = \frac{\alpha}{\pi}; \quad a_n = \frac{A_n}{A_1} = (-1)^{n/2} \frac{2\alpha}{\pi(n^2 - 1)^2}; \quad n = 2, 4, \dots \quad (8)$$

Как видно, полученное приближенное решение выявляет постоянную составляющую и четные гармоники, наиболее значимой из которых является вторая ($n=2$). Ее величина незначительно отличается от суммы амплитуд четных гармоник $\sum_{n=2,4,\dots} a_n \approx 1,188a_2$.

Разложение в ряд Фурье точного решения дифференциального уравнения свободных колебаний одномассовой билинейной системы [14], полученного методом припасовывания, определяет сложные для анализа зависимости коэффициентов гармонических составляющих от параметров повреждения. Сравнительный анализ точного решения с приближенным (8) показал [15], что в важном с практической точки зрения диапазоне значений $0 < \alpha \leq 0,3$ решение (8) обеспечивает приемлемую точность определения наиболее значимых параметров a_0 и a_2 гармонических составляющих колебаний.

Эксперимент, выполненный с помощью разработанной системы [15] гармонического анализа процесса деформирования консольных образцов ($h/L = 0,0627$ и $0,133$) с закрывающейся краевой трещиной усталости при изгибных колебаниях по первой форме, свидетельствует [16], что результаты расчета по формулам (8) и (4) качественно, а в ряде случаев и количественно (рис. 3) соответствуют данным эксперимента. Однако в других случаях наблюдалось существенное количественное отличие результатов расчета от эксперимента: например, отличие амплитуд второй гармоники для образца из стали 08X18H10 при $\gamma \geq 0,2$ достигало 60%. Это

объясняется тем, что процессы изменения деформации и перемещения сечений стержня при наличии трещины различаются. Причины и степень этого различия требуют дополнительного исследования.

Заметим, что относительные величины a_0 , a_2 и $\sum_{n=2,4,\dots} a_n$ являются

небольшими даже в случае значительных трещин, что затрудняет широкое практическое использование метода высших гармоник при резонансных колебаниях. Кроме того, представление модели упругого тела с трещиной в виде колебательной системы с одной степенью свободы не позволяет учесть различие формы колебаний тела при открытой и закрытой трещине, а также возникновение при переходе обобщенной координаты через нулевое значение других, отличных от рассматриваемой, форм колебаний, которые обуславливают дополнительное искажение формы, регистрируемой в эксперименте волны колебаний. Оценка соотношения между амплитудами основной и сопутствующих форм колебаний, выполненная для исследованных ранее образцов [17], показала, что амплитуды сопутствующих второй и третьей форм колебаний не превышали 3% амплитуды первой (основной в данном случае) формы в диапазоне значений $0 < \gamma \leq 0,87$ и $0,011 \leq x_T / L \leq 0,277$. В то же время амплитуды сопутствующих первой и третьей форм колебаний составляли уже 13% амплитуды второй формы. Таким образом, в зависимости от геометрии стержня, параметров трещины и номера основной формы колебаний амплитуды сопутствующих форм, возникающих при закрытии и раскрытии трещины, могут достигать существенных величин.

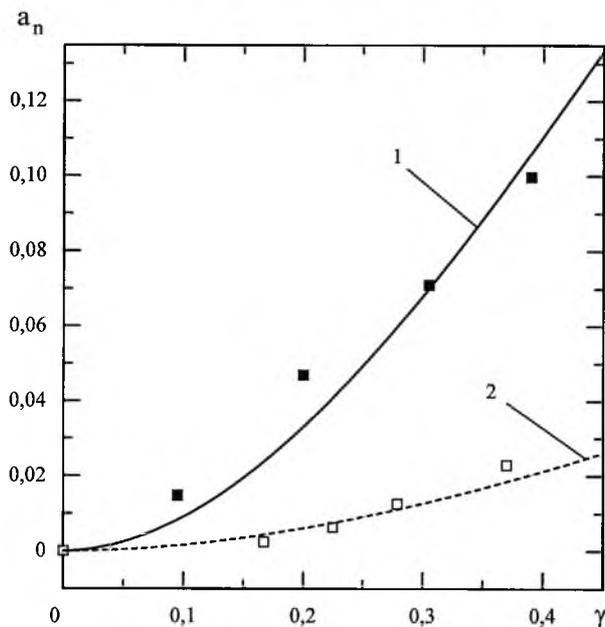


Рис. 3. Экспериментальные (точки) и расчетные (линии) зависимости значений a_0 (1) и a_2 (2) от относительной длины трещины для образцов из стали 08Х18Н10 (сплошная линия) и 15Х2НМФА (штриховая линия).

Разрешающую способность метода высших гармоник можно значительно повысить, рассматривая не перемещение, а процесс ускорения (индекс “у”). Полагая возможность прямого дифференцирования полученного решения для перемещения, найдем $a_0^y = 0$; $a_n^y = n^2 a_n$.

В качестве ВПП можно использовать также относительную разность полупериодов $\Delta\bar{T}$ и максимальных отклонений волны перемещения $\Delta\bar{u}$ на полупериодах разного знака, приближенные значения которых определяются с использованием формул (8) по следующим выражениям:

$$\Delta\bar{T} = \frac{1 - \sqrt{1 - \alpha}}{1 + \sqrt{1 - \alpha}}; \quad \Delta\bar{u} = \frac{\alpha}{\pi} \left[1 + \sum_{n=2,4,\dots} \frac{2}{(n^2 - 1)^2} \right] \approx 0,393\alpha.$$

Анализ этих выражений показывает, что зависимость $\Delta\bar{T}(\alpha)$ совпадает с зависимостью относительного изменения собственной частоты колебаний стержня с закрывающейся трещиной $\beta(\alpha)$, а величина $\Delta\bar{u}$ незначительно отличается от a_0 ($\Delta\bar{u} \approx 1,234a_0$).

3. Субрезонансные колебания. Как известно, возможность возникновения гармонических колебаний с частотой, отличающейся от частоты гармонического возбуждения, является особенностью нелинейных систем.

Рассмотрим возможность определения амплитуды субгармонических колебаний порядка $1/S$ при воздействии на колебательную систему с билинейной упругой характеристикой (рис. 1) гармонической вынуждающей силы $q_0 \cos \nu t$, частота которой в S (целое число) раз больше собственной частоты системы. Полагаем [18], что такое высокочастотное возмущение способно поддерживать периодические низкочастотные колебания нелинейной системы, если его частота ν совпадает с частотой $S\omega$ одной из гармоник свободных колебаний, т.е. если вынуждающая сила окажется в резонансе с этой гармоникой перемещения системы и будет способна совершать на этом перемещении работу, необходимую для преодоления сил сопротивления.

С целью упрощения дальнейшего изложения результатов приближенного аналитического расчета ограничимся исследованием субрезонанса порядка $1/2$. Примем, что при действии на систему вынуждающей силы в ней наряду с вынужденными колебаниями на частоте ν , равной удвоенной частоте свободных колебаний ($\nu = 2\omega$), а именно

$$u = A \cos(\nu t - \psi), \quad (9)$$

могут поддерживаться свободные колебания, которые для функции дыхания системы (7) можно в первом приближении представить в виде [19]

$$u = A_{1/2} \left[a_0 + \cos\left(\frac{\nu}{2} t - \varphi\right) + \sum_{n=2,4,\dots} a_n \cos n\left(\frac{\nu}{2} t - \varphi\right) \right]. \quad (10)$$

Значения амплитуды A и сдвига фаз ψ в выражении (9) примем равными их значениям для эквивалентной линейной системы с собственной частотой ω и вязким трением

$$A \approx \frac{q_0}{3\omega^2}; \quad \operatorname{tg} \psi = \frac{4\lambda}{3\omega}, \quad (11)$$

где λ – коэффициент демпфирования.

Используя условие энергетического баланса за период колебаний $T = 2\pi / \omega$ в режиме резонанса ($\varphi = \pi / 2$) и учитывая, что $\sum_{n=2,4,\dots} n^2 a_n^2 = 0,020154\alpha^2$ и $a_2 = 2\alpha / 9\pi$, получаем выражение для опреде-

ления приближенного значения наиболее значимой из рассматриваемого спектра (10) амплитуды $A_{1/2}$ гармоники, частота которой равна частоте свободных колебаний ω :

$$A_{1/2} \approx \frac{\alpha q_0 (1 + \sqrt{1 - \alpha})}{9\pi\lambda\omega_0 (1 + 0,020154\alpha^2)\sqrt{1 - \alpha}} \approx \frac{\alpha q_0 (1 + \sqrt{1 - \alpha})}{9\pi\lambda\omega_0 \sqrt{1 - \alpha}}. \quad (12)$$

Как видно, амплитуда $A_{1/2}$ является функцией параметра α .

Таким образом, возникновение субрезонансного режима колебаний – признак нарушения сплошности, или повреждения материала упругого тела. Для количественной оценки повреждения можно использовать амплитуду первой гармоники субрезонансных колебаний. Один из недостатков этой характеристики – наличие в выражении (12) абсолютных значений параметров q_0 и λ , поскольку практически невозможно обеспечить идентичность условий испытаний элементов конструкций по этим параметрам на длительном интервале времени. Кроме того, могут возникнуть проблемы при возбуждении субгармонических колебаний требуемого уровня.

В качестве относительной характеристики можно принять соотношение

$$\kappa_0 = \frac{A_{1/2}}{A_\omega} \approx \frac{4\alpha}{9\pi}, \quad (13)$$

где A_ω – максимальная амплитуда колебаний исследуемой системы при основном резонансе ($\nu = \omega$),

$$A_\omega \approx \frac{q_0 (1 + \sqrt{1 - \alpha})}{4\lambda\omega_0 \sqrt{1 - \alpha}}. \quad (14)$$

4. Суперрезонансные колебания. В случае суперрезонансных колебаний для получения приближенного решения изложенный выше подход не применим, так как внешняя сила совершает работу на колебаниях с частотой ν , в S раз меньшей собственной частоты системы ω , т.е. с частотой,

отсутствующей в спектре собственных колебаний гармонике. Поэтому возникает сложность ввиду необходимости определения изменения амплитуды и сдвига фазы гармонике (9) при субгармонических колебаниях, которое обуславливает возможность поступления в систему дополнительной энергии для поддержания ее свободных колебаний.

В связи с этим был рассмотрен иной подход для приближенного определения амплитуд свободных колебаний в режиме супергармонического резонанса порядка $S/1$ при воздействии на систему гармонической вынуждающей силы $q_0 \cos \nu t$ при $\nu = \omega/S$. Представим колебания системы, моделирующей тело с закрывающейся трещиной, при суперрезонансе порядка $2/1$ в виде

$$u = A_0 + A_1 \cos(\nu t - \varphi_1) + A_2 \left[\cos(2\nu t - \varphi_2) + \sum_{n=2,4,\dots} (-1)^{n/2} \cos n(2\nu t - \varphi_2) \right]. \quad (15)$$

Подставляя это выражение в дифференциальное уравнение (6) для моментов времени, когда знак координаты перемещения u , определяющий значение функции (7), доподлинно известен, получаем систему уравнений. Из решения этой системы для случая $A_2 > A_1$ при $\varphi_2 = \pi/2$, $\nu = \omega/2$ находим

$$\operatorname{tg} \varphi_1 \approx - \frac{0,5\alpha + 2 \frac{\lambda\sqrt{1-\alpha}}{\omega_0(1+\sqrt{1-\alpha})}}{1 - 0,5\alpha - \frac{1-\alpha}{(1+\sqrt{1-\alpha})^2}}; \quad (16)$$

$$A_0 \approx \frac{\alpha}{2-\alpha} A_2; \quad A_1 \approx \frac{q_0 \sin \varphi_1}{0,5\alpha\omega_0^2 \cos 2\varphi_1 - \lambda\omega_0 \frac{\sqrt{1-\alpha}}{1+\sqrt{1-\alpha}}}. \quad (17)$$

Зная величины φ_1 и A_1 , амплитуду основной (в данном случае второй) гармоники субрезонансных колебаний A_2 находим из условия энергетического баланса. Например, для системы с вязким трением имеем

$$A_2 \approx \frac{1}{2} \sqrt{\frac{q_0 A_1 (1 + \sqrt{1-\alpha}) \sin \varphi_1}{2\lambda\omega_0 \sqrt{1-\alpha}} - A_1^2}. \quad (18)$$

В качестве относительных характеристик можно принять

$$\kappa_{0/1} = \frac{A_0}{A_1}; \quad \kappa_{2/1} = \frac{A_2}{A_1}; \quad \kappa_{0,2/1} = \frac{A_\Sigma}{A_\omega} \approx \frac{A_2 + 0,5A_1}{A_\omega}. \quad (19)$$

Как известно [20], точное аналитическое решение уравнения (6) без ограничений параметра α может быть получено методом припасовывания. Однако задача, за исключением случая свободных колебаний, сводится к составлению системы трансцендентных уравнений, решение которой возможно только численно. Построение периодического решения в рядах Фурье требует для определения его параметров принять априори его качественную структуру [20], т.е. последовательность и количество моментов изменения жесткости системы в течение периода, а также численного решения получаемой системы уравнений. Это в конечном итоге делает более эффективным использование численных методов для непосредственного решения дифференциального уравнения (6).

С целью определения параметров супер- и субгармонических колебаний рассматриваемой системы при различных видах неупругого сопротивления выполнено численное решение уравнения (6) методом усреднения по ускорению [21] в широком диапазоне соотношений частоты возбуждения и собственной частоты системы (0,1...2,0). Волны перемещения и ускорения при супер- и субгармонических резонансах системы представляли в виде ряда Фурье. На рис. 4 приведены амплитудно-частотные характеристики (АЧХ) для системы с вязким трением ($\lambda = 0,008$ и $0,024$, что соответствует значениям логарифмического декремента $\delta = 5$ и 15%) при $\alpha = 0,277$ и $\omega_0 = 1$. При данных условиях обнаруживаются суперрезонансы порядка $3/2$, $2/1$, $3/1$... $7/1$, а также субрезонанс порядка $1/2$.

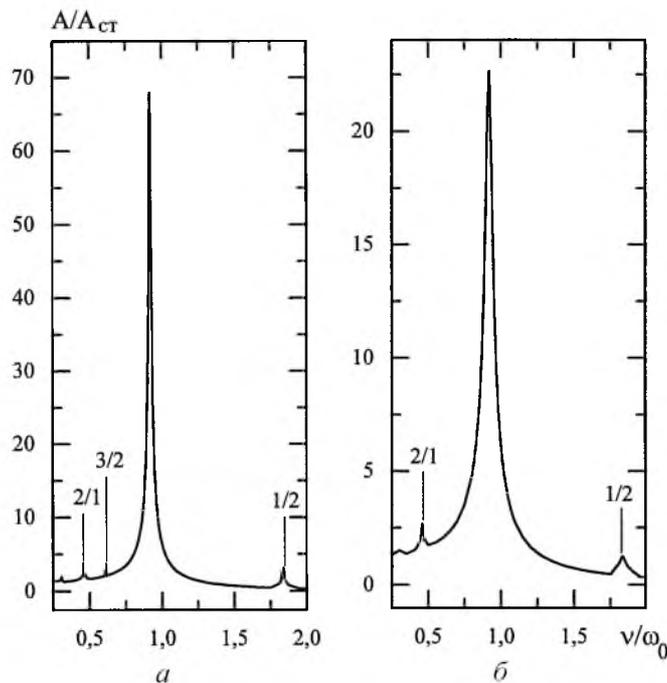


Рис. 4. Зависимости коэффициента динамичности для виброперемещения колебательной системы, моделирующей тело с закрывающейся трещиной ($\alpha = 0,277$), от относительной частоты вынуждающей силы: $a - \lambda = 0,008$; $b - \lambda = 0,024$.

Анализ суперрезонансных режимов колебаний показал их высокую чувствительность к повреждению, характеризуемому величиной параметра α . Так, суперрезонанс порядка 2/1 проявляется даже при $\alpha = 0,001$, что соответствует для испытываемого консольного образца при изгибных колебаниях по первой форме относительной глубине краевой трещины $\gamma = 0,005$ при $x_T / L = 0,2$. По мере увеличения демпфирующей способности системы суперрезонанс порядка 3/2 исчезает (рис. 4,б), а при $\lambda = 0,074$ уже не проявляется и субрезонанс порядка 1/2. Следует отметить, что поскольку уровень супер- и особенно субрезонансных колебаний существенно меньше уровня колебаний при основном резонансе и зависит от степени нелинейности колебательной системы, на практике для надежного выявления и анализа этих режимов колебаний потребуется значительная мощность возбуждения.

5. Оценка достоверности аналитического решения. Для оценки достоверности аналитического решения проведено сопоставление результатов аналитического и численного решений. Анализ показал хорошее качественное и удовлетворительное количественное соответствие результатов расчетов в случаях $A_{1/2} > A$ и $A_2 > A_1$. Так, для субгармонического резонанса при $\alpha = 0,3$ и $\lambda = 0,008$ значение параметра κ_0 (13), прогнозируемого аналитически, составило 0,0424, а численно – 0,0513 (расхождение 17%). При суперрезонансе для тех же значений α и λ при аналитическом расчете в соответствии с (19) получено $\kappa_{0/1} = 0,36$ и $\kappa_{2/1} = 2,07$, при численном решении – $\kappa_{0/1} = 0,422$ и $\kappa_{2/1} = 1,77$. При весьма большом значении $\alpha = 0,7$ согласно (19) имеем $\kappa_{0/1} = 1,287$ и $\kappa_{2/1} = 2,39$, при численном расчете – $\kappa_{0/1} = 1,84$ и $\kappa_{2/1} = 2,32$.

Следует отметить, что относительные характеристики (19) для суперрезонансных колебаний в определенной мере пригодны для экспресс-оценки характеристик этих колебаний и при $A_2 \approx A_1$. Так, при $\alpha = 0,1$ в результате численного решения получили $\kappa_{0/1} = 0,08$ и $\kappa_{2/1} = 0,91$, а по формулам (19) – $\kappa_{0/1} = 0,07$ и $\kappa_{2/1} = 1,26$.

Как видно, использование численного гармонического анализа регистрируемой в эксперименте волны суперрезонансных колебаний для диагностики повреждения является значительно более эффективным, чем при основном резонансе. При этом степень искажения гармоничности волны ускорения намного выше, чем волны перемещения. Это следует из рис. 5, на котором изображены формы волн вынуждающей силы, перемещения и ускорения, полученные численно при суперрезонансных колебаниях системы порядка 1/2 при $\alpha = 0,277$ и $\lambda = 0,074$.

Результаты гармонического анализа таких волн для рассматриваемой колебательной системы приведены на рис. 6 в виде зависимостей отношения амплитуды наиболее значимой второй гармоники к амплитуде первой от относительной длины трещины при двух значениях параметра λ . Сопоставление представленных на рис. 6 и 3 данных показывает, что чувствительность системы по параметру A_2 / A_1 к наличию трещины при супергармоническом резонансе на 2-3 порядка выше, чем при основном резонансе.

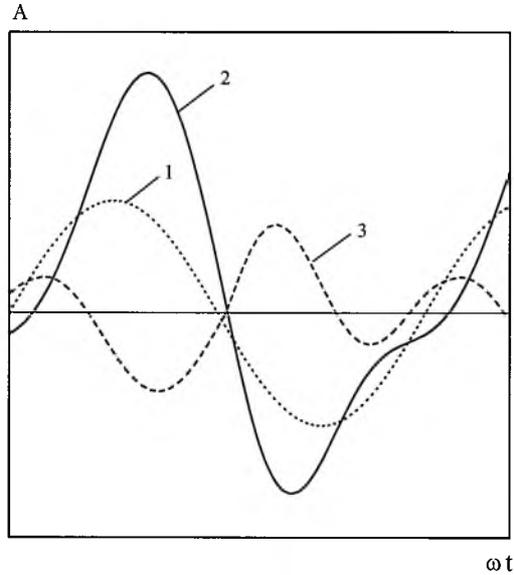


Рис. 5. Форма волны вынуждающей силы (1), перемещения (2) и ускорения (3) при суперрезонансных колебаниях системы порядка 2/1.

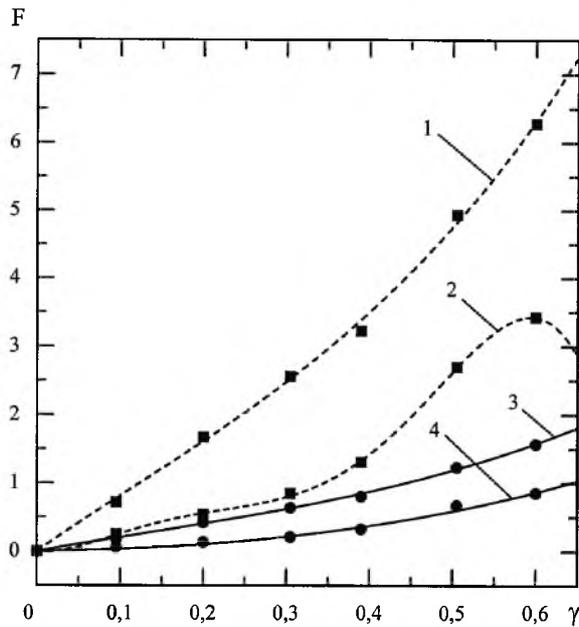


Рис. 6. Зависимости различных вибрационных признаков повреждения от относительной длины трещины при суперрезонансных колебаниях (порядка 2/1) системы, моделирующей тело с закрывающейся трещиной: 1 – $F = A_2^y / A_1^y$ ($\lambda = 0,008$); 2 – $F = A_2^y / A_1^y$ ($\lambda = 0,024$); 3 – $F = A_2 / A_1$ ($\lambda = 0,008$); 4 – $F = A_2 / A_1$ ($\lambda = 0,024$).

В качестве относительной характеристики степени поврежденности колебательной системы было также рассмотрено отношение $\bar{S}_{2/1}$ полуразмаха суперрезонансных колебаний поврежденной системы к амплитуде колебаний неповрежденной системы на частоте суперрезонансных колебаний.

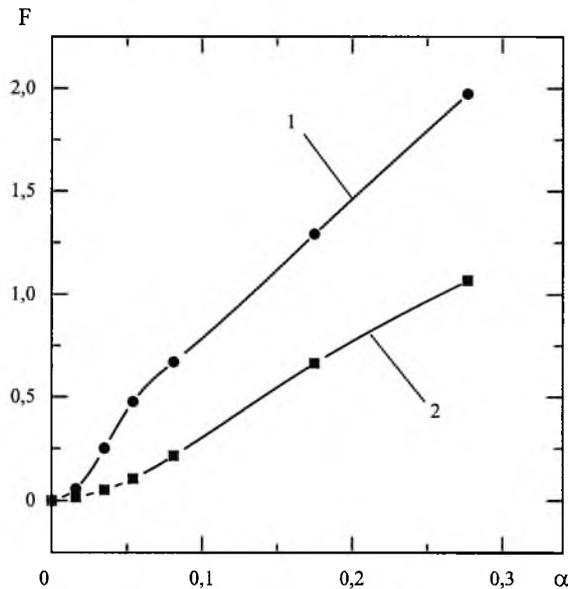


Рис. 7. Зависимости относительного изменения $F = \Delta \bar{S}_{2/1}$ от параметра α для системы с вязким трением при $\lambda = 0,008$ (1) и $\lambda = 0,024$ (2).

Рис. 7 иллюстрирует зависимости относительного изменения $\Delta \bar{S}_{2/1}$ этого отношения от параметра α для системы с вязким трением при $\lambda = 0,008$ и $0,024$. Как видно, эта характеристика, с одной стороны, является весьма чувствительным признаком повреждения, однако, с другой – ее чувствительность существенно снижается с увеличением уровня демпфирования колебаний в системе.

Заключение. Аналитически, численно и экспериментально обнаружено значительное различие в степени влияния нелинейности упругого тела, обусловленной дышащим нарушением его сплошности типа усталостной трещины, на характеристики периодических колебательных процессов при его свободных, резонансных, суб- и суперрезонансных колебаниях.

Получены аналитические зависимости характеристик колебаний модели тела с закрывающейся трещиной от безразмерного параметра α , определяющего относительное изменение жесткости упругого тела на полупериодах его деформирования разного знака.

На основании положений линейной механики разрушения выведены аналитические выражения для определения приближенного значения параметра α в случае продольных и изгибных колебаний призматических стержней с трещинами нормального отрыва. Выражения позволяют достаточно просто и с приемлемой точностью оценить возможное изменение собственных частот колебаний стержней в зависимости от типа, размеров и места расположения трещины, а также от соотношения размеров, условий закрепления и формы колебаний стержня.

Использование асимптотического метода нелинейной механики для решения во втором приближении дифференциального уравнения колебаний механической системы с билинейной упругой характеристикой позволило

вывести простые аналитические выражения, связывающие параметр нелинейности α с относительной величиной коэффициентов Фурье периодического колебательного процесса (постоянной составляющей и амплитудой второй гармоники) при свободных и резонансных колебаниях упругого тела с дышащей несплошностью материала.

С помощью полученных асимптотическим методом параметров гармонических составляющих свободных колебаний системы с одной степенью свободы, моделирующей тело с трещиной, и условия энергетического баланса найдена простая аналитическая зависимость, связывающая амплитуду первой (основной) гармоники субрезонансных колебаний порядка $1/2$ с параметром α .

Путем удовлетворения дифференциального уравнения колебаний модели тела с билинейной упругой характеристикой в моменты достоверного знания ее значения и использования условия энергетического баланса получены приближенные выражения для определения амплитуды второй, основной (A_2) и первой (A_1) гармоник суперрезонансных колебаний второго порядка при условии ($A_2 > A_1$) через параметр α .

Предложены различные относительные характеристики суб- и супергармонических колебательных процессов, исключаяющие параметры вынуждающей силы и сил неупругого сопротивления и являющиеся наиболее удобными для оценки степени нелинейности исследуемых тел.

Численное решение дифференциального уравнения колебаний одно-массовой модели тела с билинейной упругой характеристикой позволило выявить и исследовать закономерности проявления суб- и суперрезонансных режимов колебаний в широком диапазоне соотношения частоты возбуждения и собственной частоты системы ($0,25 \dots 2,0$), а также оценить пределы применимости полученных аналитических решений. Показано, что процесс виброускорения наиболее чувствителен к характеризующей параметром α нелинейности колебательной системы.

Анализ различных вибрационных признаков повреждения типа дышащей несплошности упругого тела с позиции оценки возможности их практического использования показал, что относительное изменение собственной частоты является просто определяемым (например, при возбуждении колебаний в режиме основного резонанса), но далеко не самым чувствительным признаком повреждения. Наиболее же чувствительными к параметрам повреждения оказались относительные характеристики суперрезонансных колебаний. Однако для возбуждения этих режимов колебаний требуется значительная мощность, что может ограничить область их практического использования.

Резюме

Наведено результати аналітичних, числових і експериментальних досліджень деяких вібраційних ознак при резонансних, суб- і суперрезонансних режимах коливань несутцільності пружного тіла, котра “дихає”, у широкому

діапазоні співвідношення частоти збудження і власної частоти коливальної системи (0,25...2,0). Проведено оцінку меж застосування отриманих аналітичних рішень.

1. *Ballo I.* Non-linear effects of vibration of a continuous transverse cracked slender shaft // *J. Sound and Vibration.* – 1998. – **217**, N 2. – P. 321 – 333.
2. *Cheng S. M., Swamidas A. S. J., Wu X. J., Wallace W.* Vibrational response of a beam with a breathing crack // *Ibid.* – 1999. – **225**, N 1. – P. 201 – 208.
3. *Chondros T. G., Dimarogonas A. D., Yao J.* Longitudinal vibration of a bar with a breathing crack // *Eng. Fract. Mech.* – 1998. – **61**, N 5-6. – P. 503 – 518.
4. *Ismail F., Ibrahim A., Martin H. R.* Identification of fatigue cracks from vibration testing // *J. Sound and Vibration.* – 1990. – **140**, N2. – P. 305 – 317.
5. *Rivola A., White P. R.* Bispectral analysis of the bilinear oscillator with application to the detection of fatigue cracks // *Ibid.* – 1998. – **216**, N 5. – P. 889 – 910.
6. *Ruotolo R., Surace C., Crespo P., Storer D.* Harmonic analysis of the vibrations of a cantilevered beam with a closing crack // *Computers and Structures.* – 1996. – **61**, N 6. – P. 1057 – 1074.
7. *Thyagarajan S. K., Schulz M. J., Pai P. F., Chung J.* Detecting structural damage using frequency response functions // *J. Sound and Vibration.* – 1998. – **210**, N 1. – P. 162 – 170.
8. *Tsyfansky S. L., Beresnevich V. I.* Detection of fatigue cracks in flexible geometrically non-linear bars by vibration monitoring // *Ibid.* – **213**, N 1. – P. 159 – 168.
9. *Zastrau B.* Vibration of cracked structures // *Archiv Mech.* – 1985. – **37**, N 6. – P. 731 – 743.
10. *Krawczuk M., Ostachowicz W.* Damage indicators for diagnostic of fatigue cracks in structures by vibration measurements – a survey // *J. Theor. Appl. Mech.* – 1996. – **34**, N 2. – P. 307 – 326.
11. *Матвеев В. В., Бовсуновский А. П.* К анализу эффективности метода спектральной вибродиагностики усталостного повреждения элементов конструкций. Сообщ. 2. Изгибные колебания, аналитическое решение // *Пробл. прочности.* – 1998. – № 6. – С. 9 – 22.
12. *Матвеев В. В., Бовсуновский А. П.* К анализу эффективности метода спектральной вибродиагностики усталостного повреждения элементов конструкций. Сообщ. 3. Аналитическое и численное определение собственных частот продольных и изгибных колебаний стержней с поперечными трещинами // *Там же.* – 1999. – № 4. – С. 19 – 31.
13. *Справочник по коэффициентам интенсивности напряжений.* В 2 т. Т. 1. Пер. с англ. / Под ред. Ю. Мураками. – М.: Мир, 1990. – 448 с.
14. *Ройтман А. Б., Пылов А. А., Александрова Н. Б.* Продольные колебания консольного стержня с поперечной трещиной. Сообщ. 1. Малые колебания // *Пробл. прочности.* – 1999. – № 2. – С. 23 – 34.

15. *Bovsunovsky A. P., Kratko A. G.* The shape of mechanical hysteresis loops for metals under harmonic loading // *J. Testing and Evaluation*. – 1998. – **26**, N 1. – P. 31 – 37.
16. *Матвеев В. В., Бовсуновский А. П.* К анализу эффективности метода спектральной вибродиагностики усталостного повреждения элементов конструкций. Сообщ. 4. Анализ искажения гармоничности цикла колебаний стержневых элементов при наличии закрывающихся поперечных трещин // *Пробл. прочности*. – 2000. – № 1. – С. 5 – 12.
17. *Bovsunovsky A. P., Matveev V. V.* Analytical approach to the determination of dynamic characteristics of a beam with a closing crack // *J. Sound and Vibration*. – 2000. – **235**, N 3. – P. 415 – 434.
18. *Бидерман В. Л.* Теория механических колебаний. – М.: Высшая школа, 1980. – 408 с.
19. *Матвеев В. В.* К анализу эффективности метода спектральной вибродиагностики усталостного повреждения элементов конструкций. Сообщ. 1. Продольные колебания, аналитическое решение // *Пробл. прочности*. – 1997. – № 6. – С. 5 – 20.
20. *Крюков Б. И.* Вынужденные колебания существенно нелинейных систем. – Москва: Машиностроение, 1984. – 216 с.
21. *Тимошенко С. П., Янг Д. Х., Уивер У.* Колебания в инженерном деле. – М.: Машиностроение, 1985. – 472 с.

Поступила 29. 06. 2000