

Моделирование процессов пропорционального нагружения простых по Ноллу материалов с упругопластическим поведением. Сообщение 2. Сопоставление теории с экспериментами

П. П. Лепихин

Институт проблем прочности НАН Украины, Киев, Украина

Для активных пропорциональных процессов нагружения простых изотропных материалов с упругопластическим поведением выполнены теоретический анализ и конкретизация построенных ранее автором определяющих соотношений теории бесконечно малых деформаций. Полученные данные сопоставлены с результатами известных экспериментов. Отмечена полная адекватность описания сконструированными физическими уравнениями малых деформаций ряда металлов.

Ключевые слова: простой изотропный упругопластический материал, определяющие соотношения, пропорциональное нагружение, бесконечно малые деформации.

В работе [1] для конечных и бесконечно малых деформаций выполнено построение определяющих соотношений, моделирующих реакцию простых упругопластических материалов с произвольным типом симметрии свойств на пропорциональное активное нагружение.

Проанализируем построенные в [1] определяющие соотношения теории бесконечно малых деформаций изотропных материалов и полученные данные сопоставим с известными экспериментальными.

Как показано ранее [1], в рамках теории бесконечно малых деформаций [2] физические уравнения, описывающие поведение простого изотропного упругопластического материала при пропорциональном активном нагружении, могут быть представлены таким образом:

$$\tilde{E}_0 = \frac{1}{3\tilde{K}} T_0; \quad (1)$$

$$\frac{\tilde{\mathbf{E}}_D}{\varepsilon_i} = \frac{3}{2\sin 3\alpha_{T_D}} \left\{ \frac{\sin(2\alpha_{T_D} + \alpha_{\tilde{\mathbf{E}}_D})}{\sigma_i} T_D + \sqrt{3} \sin(\alpha_{T_D} - \alpha_{\tilde{\mathbf{E}}_D}) \left[\frac{3T_D^2}{\sigma_i^2} - \frac{2}{3} \mathbf{1} \right] \right\}, \quad (2)$$

где \tilde{K} – обобщенный модуль объемного сжатия; $T_0 = tr \mathbf{T}$, $\tilde{E}_0 = tr \tilde{\mathbf{E}}$ и $T_D = \mathbf{T} - \frac{1}{3} tr \mathbf{T} \mathbf{1}$, $\tilde{\mathbf{E}}_D = \tilde{\mathbf{E}} - \frac{1}{3} tr \tilde{\mathbf{E}} \mathbf{1}$ – соответственно первые инварианты и девиаторы тензоров напряжений \mathbf{T} и бесконечно малых деформаций $\tilde{\mathbf{E}}$ (далее просто деформаций); $\mathbf{1}$ – единичный тензор; $\sigma_i = \sqrt{3I_{2_{T_D}}} = \sqrt{\frac{3}{2} tr(\mathbf{T}_D^2)}$ – интенсивность напряжений; $\varepsilon_i = 2\sqrt{\frac{1}{3} I_{2_{\tilde{\mathbf{E}}_D}}} = \sqrt{\frac{2}{3} tr(\tilde{\mathbf{E}}^2)}$ – интенсивность

деформаций; $I_{2_{\mathbf{T}_D}}$ и $I_{2_{\tilde{\mathbf{E}}_D}}$ – вторые инварианты девиаторов соответственно напряжений и деформаций; $tr \mathbf{T}$ и $tr \tilde{\mathbf{E}}$ – следы тензоров \mathbf{T} и $\tilde{\mathbf{E}}$; $\omega = \alpha_{\mathbf{T}_D} - \alpha_{\tilde{\mathbf{E}}_D}$ – угол рассогласования девиаторов; $\alpha_{\mathbf{T}_D}$ и $\alpha_{\tilde{\mathbf{E}}_D}$ – углы вида тензоров напряжений и деформаций, определяемые из соотношений

$$\cos 3\alpha_{\mathbf{T}_D} = \frac{3\sqrt{3}}{2} \frac{I_{3_{\mathbf{T}_D}}}{(I_{2_{\mathbf{T}_D}})^{3/2}}, \quad \cos 3\alpha_{\tilde{\mathbf{E}}_D} = \frac{3\sqrt{3}}{2} \frac{I_{3_{\tilde{\mathbf{E}}_D}}}{(I_{2_{\tilde{\mathbf{E}}_D}})^{3/2}}; \quad (3)$$

$$I_{3_{\mathbf{T}_D}} = tr(\mathbf{T}_D)^3 / 3, \quad I_{3_{\tilde{\mathbf{E}}_D}} = tr(\tilde{\mathbf{E}}_D)^3 / 3. \quad (4)$$

При этом $\alpha_{\tilde{\mathbf{E}}_D}$, ε_i , \tilde{K} в (1) и (2) можно представить так:

$$\begin{cases} \alpha_{\tilde{\mathbf{E}}_D} = \bar{f}_1(T_0 / \sigma_i, \sigma_i, \alpha_{\mathbf{T}_D}); \\ \varepsilon_i = \bar{f}_2(T_0 / \sigma_i, \sigma_i, \alpha_{\mathbf{T}_D}); \\ \tilde{K} = \bar{f}_3(T_0 / \sigma_i, \sigma_i, \alpha_{\mathbf{T}_D}). \end{cases} \quad (5)$$

Для заданного процесса пропорционального активного нагружения, в котором, как установлено в [1], T_0 / σ_i и $\alpha_{\mathbf{T}_D}$ неизменны, уравнения (5) принимают вид

$$\begin{cases} \alpha_{\tilde{\mathbf{E}}_D} = f_1(\sigma_i); \\ \varepsilon_i = f_2(\sigma_i); \\ \tilde{K} = f_3(\sigma_i). \end{cases} \quad (6)$$

Прежде чем перейти к анализу уравнений (1)–(6), рассмотрим важный и широко применяемый в приложениях случай активного нагружения материалов с упругопластическим поведением. Речь идет о p - P -экспериментах на трубчатых образцах при реализации в них условия

$$M = T_z / T_\theta = \text{const}, \quad (7)$$

где T_z и T_θ – главные напряжения соответственно в осевом и широтном направлениях.

Будем считать, как это обычно делается [3–5], что в рабочей части образца реализуется плоское напряженное состояние и имеет место однородное деформирование. Погрешность такого приближения оценивалась, например, в [3, 5]. Для плоского напряженного состояния при выполнении условия (7) в процессе нагружения, как следует из данных работы [5],

$$\mathbf{T}_0 / \sigma_i = \text{const} \quad (8)$$

и

$$\alpha_{T_D} = \text{const}. \quad (9)$$

Если учесть, что в p - P -опытах главные оси тензора напряжений неизменны, то в случае справедливости (8), (9) приходим к реализации в рассматриваемом процессе пропорционального нагружения.

Зависимости (1)–(6), как следует из [1], получены с помощью строгой специализации общих, допускающих обращение в смысле [1], определяющих соотношений простых упругопластических материалов. При этом предполагается, что траектории нагружения, пропорциональные деформации, бесконечно малы, а материал изотропный. Отсюда можно сделать вывод, что (1)–(6) могут описать все эффекты, имеющие место в произвольном простом изотропном упругопластическом материале (модельном материале), деформации которого достаточно малы и нагружается он в p - P -опытах по подчиняющимся условию (7) траекториям.

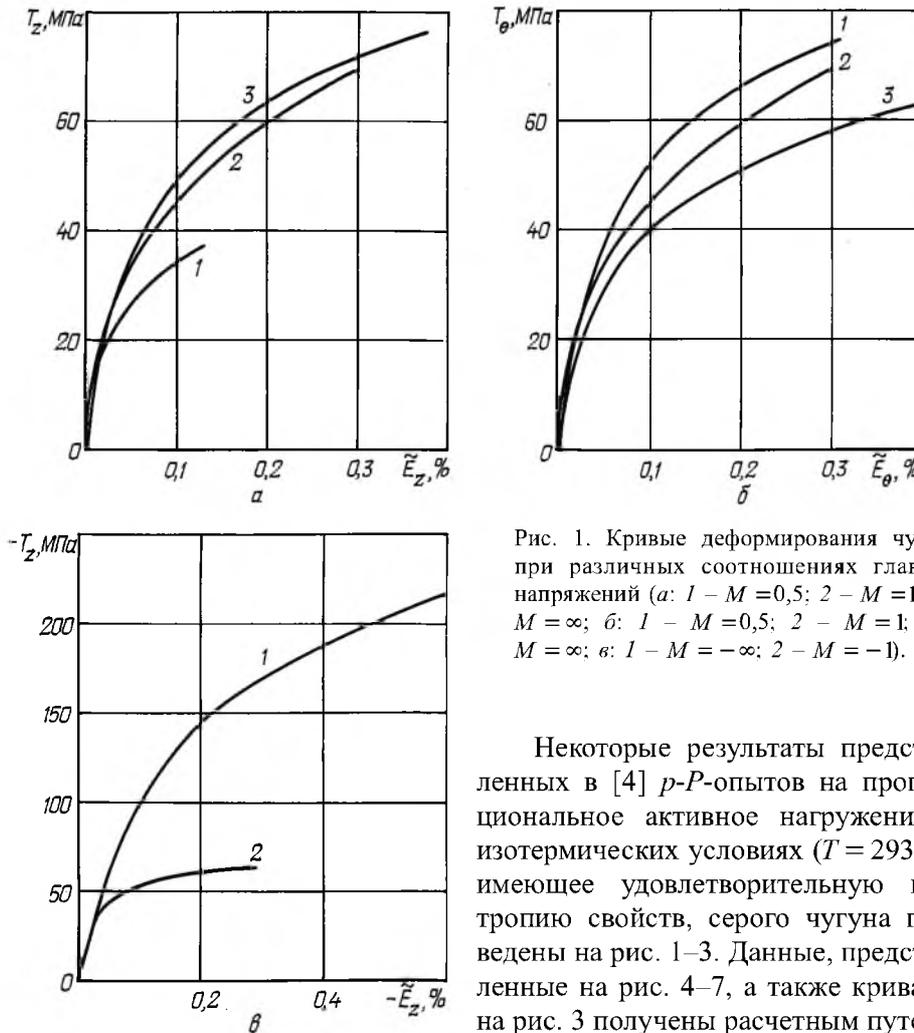


Рис. 1. Кривые деформирования чугуна при различных соотношениях главных напряжений (а: 1 – $M = 0,5$; 2 – $M = 1$; 3 – $M = \infty$; б: 1 – $M = 0,5$; 2 – $M = 1$; 3 – $M = \infty$; в: 1 – $M = -\infty$; 2 – $M = -1$).

Некоторые результаты представленных в [4] p - P -опытов на пропорциональное активное нагружение в изотермических условиях ($T = 293$ К), имеющее удовлетворительную изотропию свойств, серого чугуна приведены на рис. 1–3. Данные, представленные на рис. 4–7, а также кривая 5 на рис. 3 получены расчетным путем с

помощью этих результатов. При этом использованы обозначения: T_z, T_θ и $T_r = 0$ – главные значения соответственно осевых, широтных и радиальных напряжений; $\tilde{E}_z, \tilde{E}_\theta$ и \tilde{E}_r – то же для деформаций; ν – коэффициент поперечной деформации; $|\cdot|$ – абсолютное значение скалярной величины.

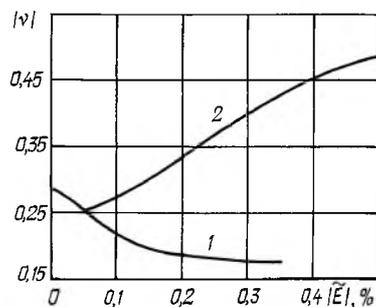


Рис. 2. Зависимость коэффициента поперечной деформации чугуна от величины деформации: 1 – растяжение; 2 – сжатие.

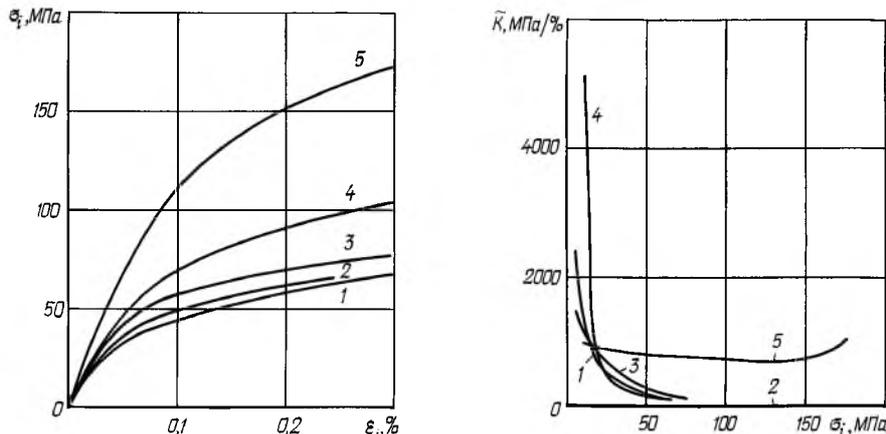


Рис. 3. Обобщенные кривые деформирования чугуна при различных соотношениях главных напряжений: 1 – $M = 1$; 2 – $M = 0,5$; 3 – $M = \infty$; 4 – $M = -1$; 5 – $M = -\infty$.

Рис. 4. Зависимость обобщенного модуля объемного сжатия чугуна от σ_i при различных соотношениях главных напряжений: 1 – $M = 0,5$; 2 – $M = -1$; 3 – $M = \infty$; 4 – $M = 1$; 5 – $M = -\infty$.

При построении обобщенной кривой деформирования 5 (рис. 3) для определения \tilde{E}_r , необходимого при вычислении ε_i , использовалась предложенная в [4] для полухрупких материалов методика. При этом для заданного T_z значение \tilde{E}_z определялось по кривой 1 (рис. 1,б), а ν – по кривой 2 (рис. 2). В остальных случаях значения ε_i для заданного тензора напряжений, а следовательно, и σ_i определялись по соответствующей кривой из представленных на рис. 3, а компонента \tilde{E}_r – по известному значению ε_i и найденным по тем или иным кривым (рис. 1) компонентам \tilde{E}_z и \tilde{E}_θ . Все приведенные на рис. 4–7 кривые рассчитывались в предположении реализации в опытах плоского напряженного состояния с заданным значением отношения M .

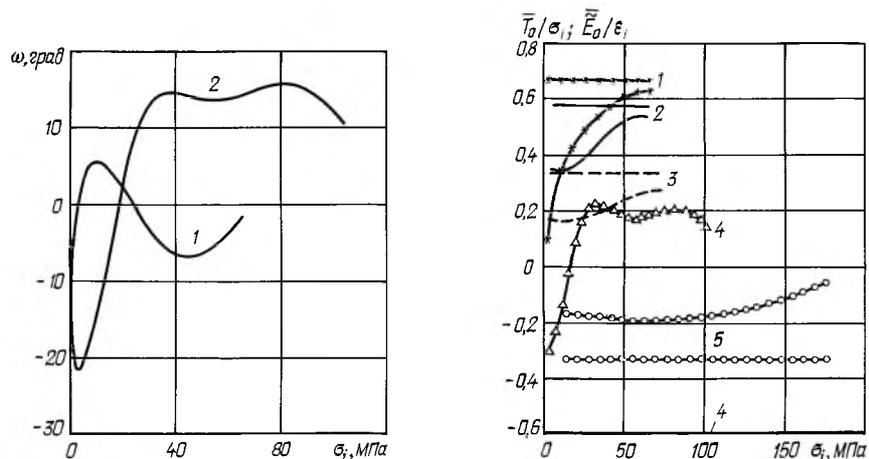


Рис. 5. Зависимость угла рассогласования девiatorов напряжений и деформаций для чугуна от интенсивности напряжений при различных соотношениях главных напряжений: 1 – $M = 0,5$; 2 – $M = -1$.

Рис. 6. Зависимость \bar{T}_0/σ_i (горизонтальные прямые линии) и \bar{E}_0/ε_i (кривые линии) от интенсивности напряжений для чугуна при различных соотношениях главных напряжений: 1 – $M = 1$; 2 – $M = 0,5$; 3 – $M = \infty$; 4 – $M = -1$; 5 – $M = -\infty$.

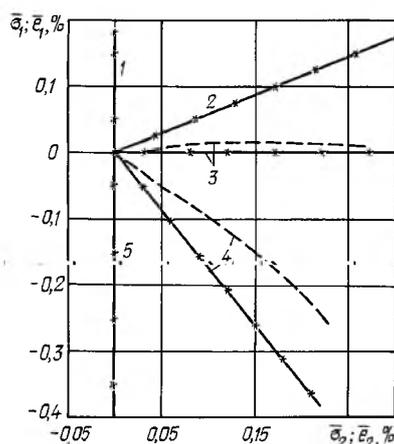


Рис. 7. Проекция траекторий нагружения (линии с крестиками) и деформаций (штриховые линии) серого чугуна на совмещенные плоскости $\bar{\sigma}_1\bar{\sigma}_2 - \bar{\varepsilon}_1\bar{\varepsilon}_2$ для различных соотношений главных напряжений: 1 – $M = \infty$; 2 – $M = 1$; 3 – $M = 0,5$; 4 – $M = -1$; 5 – $M = -\infty$.

Расчетные кривые строились с использованием следующих формул:

$$\varepsilon_i = \sqrt{2/3} \sqrt{(\tilde{E}_z - \tilde{E}_\theta)^2 + (\tilde{E}_\theta - \tilde{E}_r)^2 + (\tilde{E}_z - \tilde{E}_r)^2}; \quad (10)$$

$$T_0 = T_z + T_\theta + T_r, \quad \tilde{E}_0 = \tilde{E}_z + \tilde{E}_\theta + \tilde{E}_r, \quad \bar{T}_0 = T_0 / 3, \quad \bar{E}_0 = \tilde{E}_0 / 3; \quad (11)$$

$$\bar{\sigma}_1 = \sqrt{2/3} \left(T_z - \frac{1}{2} T_\theta \right), \quad \bar{\sigma}_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} T_\theta; \quad (12)$$

$$\bar{e}_1 = \sqrt{3/2}(\tilde{E}_z - \tilde{E}_0), \quad \bar{e}_2 = \sqrt{1/2}(\tilde{E}_\theta - \tilde{E}_r). \quad (13)$$

Здесь $\bar{\sigma}_j$ и \bar{e}_j ($j=1, 2$) – компоненты векторов напряжений $\bar{\sigma}$ и деформаций $\bar{\epsilon}$ в векторном пространстве Ильюшина [4]:

$$\bar{\sigma} = \bar{\sigma}_1 \bar{n}_1 + \bar{\sigma}_2 \bar{n}_2; \quad (14)$$

$$\bar{\epsilon} = \bar{e}_1 \bar{n}_1 + \bar{e}_2 \bar{n}_2; \quad (15)$$

\bar{n}_1 и \bar{n}_2 – ортонормированные векторы базиса.

Необходимые для вычисления ω значения углов вида определялись соответственно из соотношений (3).

Кривые на рис. 5 представляют собой смещенные на постоянную величину $\alpha_{T_D} = 30^\circ$ зависимости угла $\alpha_{\tilde{E}_D}$ от интенсивности напряжений, необходимые для конкретизации определяющего соотношения (2).

Значения некоторых параметров процесса нагружения, вычисленные по приведенным в статье формулам для различных M при условии реализации плоского напряженного состояния, приведены в таблице. При этом угол Φ_σ , задающий направление вектора напряжений в векторном пространстве Ильюшина, определялся из соотношений

$$\text{tg } \Phi_\sigma = \frac{\bar{\sigma}_2}{\bar{\sigma}_1} \quad \text{при} \quad \frac{\bar{\sigma}_2}{\bar{\sigma}_1} \geq 0; \quad (16)$$

$$\Phi_\sigma = 180^\circ + \text{arctg } \frac{\bar{\sigma}_2}{\bar{\sigma}_1} \quad \text{при} \quad \frac{\bar{\sigma}_2}{\bar{\sigma}_1} < 0. \quad (17)$$

Основываясь на зависимостях (1)–(6), теоретически установим основные закономерности деформирования для представленных в таблице случаев.

Значения $\Phi_\sigma, \alpha_{T_D}, \alpha_{\tilde{E}_D}$ и T_0/σ_i для различных M

M	Φ_σ , град	α_{T_D} , град	$\alpha_{\tilde{E}_D}$, град	T_0/σ_i
∞	0	0	0	1
1	60	60	60	2
0,5	90	30	var	$\sqrt{3}$
0	120	0	0	1
-1	150	30	var	0
$-\infty$	180	60	60	-1

При $M = \infty, -\infty, 0$ и 1 тензор напряжений имеет одну пару равных главных значений и, следовательно, как установлено в [1] и следует из таблицы, $\alpha_{T_D} = \alpha_{\tilde{E}_D} = \text{const}, \omega = 0$. При этом девиаторы напряжений и деформаций связаны следующим из (2) тензорно линейным физическим уравнением

$$\tilde{E}_D = \frac{2\varepsilon_i}{3\sigma_i} T_D. \quad (18)$$

Первый инвариант тензора деформаций определяется зависимостью (1), причем в рассматриваемом случае, согласно данным [1], формулы (5) упрощаются к виду

$$\begin{cases} \alpha_{\tilde{E}_D} = \alpha_{T_D}; \\ \varepsilon_i = \tilde{f}_2(T_0 / \sigma_i, \sigma_i); \\ \tilde{K} = \tilde{f}_3(T_0 / \sigma_i, \sigma_i). \end{cases} \quad (19)$$

Как видно из последних двух формул (19), для процессов с $M = \infty$ и 0 , когда $\alpha_{\tilde{E}_D} = \alpha_{T_D} = 0$, а $T_0 / \sigma_i = 1$ (таблица), кривые $\sigma_i \sim \varepsilon_i$ и $\tilde{K} \sim \sigma_i$ должны быть строго тождественны. Для M , равного 1 и $-\infty$, когда, как следует из таблицы, $\alpha_{\tilde{E}_D} = \alpha_{T_D} = 60^\circ$, а $T_0 / \sigma_i = 2$ при $M = 1$ и $T_0 / \sigma_i = -1$ при $M = -\infty$, зависимости $\sigma_i \sim \varepsilon_i$ и $\tilde{K} \sim \sigma_i$ при этих значениях M должны отличаться, так как при одинаковых α_{T_D} здесь имеют место разные значения T_0 / σ_i .

Анализ соотношения (18) показывает, что в процессах пропорционального активного нагружения ($M = \infty, -\infty, 1, 0$) имеет место простое деформирование [6]. При этом пропорциональное деформирование не реализуется, так как, учитывая данные [7], нет оснований считать, что в случае сжимаемого материала $\tilde{E}_0 / \varepsilon_i$ будет постоянным.

Из проведенного ранее теоретического анализа [1] для $M = 0,5$ и -1 , когда тензор напряжений имеет простой спектр (все три разных главных значения), реакция произвольного материала с упругопластическим поведением подчиняется определяющим соотношениям (1) и (2). При этом девиаторы напряжений и деформаций связаны тензорно нелинейным определяющим соотношением (2), $\alpha_{\tilde{E}_D} \neq \alpha_{T_D}, \omega \neq 0$, а $\alpha_{\tilde{E}_D}, \varepsilon_i$ и \tilde{K} подчиняются соотношениям (5). Как следует из (5), для процессов нагружения с M , равным -1 и $0,5$, при одинаковых $\alpha_{T_D} = 30^\circ$ имеют место разные постоянные значения T_0 / σ_i (таблица) и, следовательно, кривые $\sigma_i \sim \varepsilon_i, \tilde{K} \sim \sigma_i$ и $\alpha_{\tilde{E}_D} \sim \sigma_i$ для этих M должны отличаться.

Все прогнозы теории подтверждаются, в частности, приведенными выше экспериментами для серого чугуна [4]. Действительно, как отмечено в

[4], процессы деформирования при M , равном 0 и ∞ , практически не отличаются и, как следует из рис. 3–5 и 7, при $M = \infty, -\infty, 1, -1$ и 0,5 законы $\sigma_i \sim \varepsilon_i$, $\tilde{K} \sim \sigma_i$, а при $M = -1$ и 0,5 и законы $\omega \sim \sigma_i$ отличаются. Причем для $M = -\infty, 1, \infty$ (одна пара равных главных значений тензора напряжений) $\omega = 0$, для $M = 0,5$ и -1 (тензор напряжений имеет простой спектр) $\omega \neq 0$ (рис. 5). В последних двух случаях имеет место тензорно нелинейная связь напряжений и деформаций (рис. 5), которая и объясняет отмеченное в [4] возникновение осевых деформаций при кручении сплошных и трубчатых образцов, что связано с эффектом Пойнтинга. При этом чистый сдвиг по напряжениям не приводит к чистому сдвигу по деформациям.

Как следует из рис. 3, гипотеза единой кривой [6] для серого чугуна не выполняется. Из рис. 4 можно сделать вывод, что для серого чугуна закон упругого изменения объема не справедлив. При этом его применение может привести к существенным погрешностям при моделировании. Из рис. 6 видно, что для всех процессов пропорционального нагружения значение $\tilde{E}_0 / \varepsilon_i$ не остается постоянным, что свидетельствует о нарушении пропорциональности деформирования.

С использованием представленных на рис. 1 и 2 результатов экспериментов для серого чугуна были конкретизированы функции (6) – рис. 3–5 и проведены расчеты для значений M , равных $\infty, -\infty, 1, -1$ и 0,5, в соответствующих случаях либо по формулам (1) и (2) (M равно $-1; 0,5$), либо по (1) и (2) (M равно $\infty, -\infty, 1$). Расчеты проводились следующим образом. Задавались значения T_z , и для выбранного M определяли T_θ . Зная T_z и T_θ для плоского напряженного состояния, определяли T_0 и σ_i . Затем по соответствующим кривым (6) определяли значения ε_i , \tilde{K} и ω . По известному ω , зная для заданного M угол вида тензора напряжений, определяли $\alpha_{\tilde{E}_D}$. Значение \tilde{E}_0 вычисляли по формуле (1), \tilde{E}_{D_θ} и \tilde{E}_{D_z} – для трех различных главных значений тензора напряжений – по соотношению (2), в противном случае – по зависимости (18). Далее по известным формулам находили $\tilde{E}_z, \tilde{E}_\theta, \tilde{E}_r$ и ε_i . По вычисленным данным для реализуемого в опытах диапазона изменения T_z строили расчетные обобщенные кривые $\sigma_i(\varepsilon_i)$ и кривые деформирования $T_z(\tilde{E}_z)$ и $T_\theta(\tilde{E}_\theta)$. Полученные кривые сопоставляли с экспериментальными. При этом для всех M получено полное совпадение расчетных и экспериментальных данных при точности расчета шесть значащих цифр после запятой.

Проведенный анализ свидетельствует об адекватности описания как в качественном, так и в количественном отношении построенной в [1] моделью действительной реакции серых чугунов при пропорциональном активном нагружении.

Следует отметить, что построенная ранее иным способом для описания бесконечно малых деформаций изотропных несжимаемых упругопластических материалов по пропорциональным траекториям активного нагружения модель [6] является специальным случаем анализируемых здесь соотношений.

Резюме

Для активних пропорційних процесів навантаження простих ізотропних матеріалів із пружнопластичною поведінкою виконано теоретичний аналіз і конкретизацію побудованих раніше автором визначальних співвідношень теорії нескінченно малих деформацій. Одержані дані співставлено з результатами відомих експериментів. Відмічено повну адекватність опису сконструйованими фізичними рівняннями малих деформацій ряду металів.

1. *Лепихин П. П.* Моделирование процессов пропорционального нагружения простых по Ноллу материалов с упругопластическим поведением. Сообщ. 1. Построение определяющих соотношений // Пробл. прочности. – 2000. – № 3. – С. 57 – 68.
2. *Лепихин П. П.* Моделирование пропорционального деформирования простых по Ноллу материалов с упругопластическим поведением. Сообщ. 1. Построение определяющих соотношений // Пробл. прочности. – 1998. – № 5. – С. 59 – 70.
3. *Писаренко Г. С., Лебедев А. А.* Деформирование и прочность материалов при сложном напряженном состоянии. – Киев: Наук. думка, 1976. – 415 с.
4. *Ковальчук Б. И., Лебедев А. А., Уманский С. Э.* Механика неупругого деформирования материалов и элементов конструкций. – Киев: Наук. думка, 1987. – 280 с.
5. *Можаровский Н. С., Рудаков К. Н., Заховайко А. А.* Пластичность и долговечность элементов машин при различных траекториях нагружения. – Киев: Выща шк., 1988. – 147 с.
6. *Ильюшин А. А.* Пластичность. Ч. 1. Упругопластические деформации. – М.; Л.: Гостехиздат, 1948. – 376 с.
7. *Prager W.* Strain hardening under combined stresses // J. Appl. Phys. – 1945. – 16, N 12. – P. 837 – 840.

Поступила 26. 04. 99