НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИЙ РАЗДЕЛ

УДК 621.7:539.374

О зависимости напряжения от скорости деформации у сверхпластичных материалов*

Р. А. Васин, О. Г. Филиппов

НИИ механики МГУ, Москва, Россия

Стандартное определяющее соотношение для сверхпластичных материалов предполагает степенную зависимость напряжения от скорости деформации. Это предположение – частный случай более общего: напряженное состояние определяется только тензором скоростей деформаций. Предлагается методика экспериментального построения такой общей зависимости по данным опытов на сплошных или толстостенных трубчатых цилиндрических образцах.

Известно, что механические свойства материалов в состоянии сверхпластичности (СП) достаточно хорошо описываются моделями вязкой жидкости. Обычно материальные функции в таких моделях представляются зависимостью между вторыми инвариантами девиаторов тензора напряжений Коши $\hat{\sigma}$ и тензора скоростей деформаций $\hat{D}$. Как правило, вид такой зависимости сразу задается, т.е. она считается известной с точностью до входящих в нее констант, которые и подлежат экспериментальному определению. На практике наибольшее распространение получила степенная зависимость, которая в одноосном изотермическом случае записывается в виде

$$\sigma = K\xi^{m}, \tag{1}$$

где ξ – скорость деформации; K и m – материальные константы. Соотношение (1) помимо простоты привлекательно для инженеров и исследователей тем, что параметр m представляет для них наглядную характеристику скоростной чувствительности материала при K и m, независящих от ξ.

Из многочисленных экспериментов на разнообразных материалах известно, что параметр m не является константой и, в частности, зависит от ξ. Однако тогда привлекательность соотношения (1) в значительной мере утрачивается и следует говорить о зависимости σ от ξ общего вида:

$$\sigma = f(\xi). \tag{2}$$

* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант № 99-01-01032.

Именно такой, не степенной вид имеют зависимости $\sigma \sim \xi$, следующие из ряда физических моделей СП [1–4]. Исходя из сказанного обратимся к вопросу о методике экспериментального построения и аттестации математической модели сверхпластичных материалов (СПМ) вида (2). Для случая неодноосного нагружения при конечных деформациях этот вопрос, насколько известно авторам, детально не исследовался. Решение его должно быть получено не для одного частного вида нагружения, а по возможности для самого широкого набора историй деформирования. Это требование обусловлено как потребностями аттестации математической модели (определение области ее применимости), так и необходимостью учета того вида траекторий деформаций, который имеет место в конкретных технологических процессах обработки металлов давлением.

Будем считать рассматриваемый материал объемно-несжимаемым. Полагая связь между тензорами $\hat{\sigma}$ и $\hat{D}$ тензорно-линейной (девиаторы тензоров $\hat{\sigma}$ и $\hat{D}$ соосны), запишем ее в виде

$$\hat{\sigma} = -p\hat{I} + \frac{g(D)}{D}\hat{D}, \quad D_{ii} = 0, \tag{3}$$

где p – гидростатическое давление; $\hat{I}$ – единичный тензор; $D = \sqrt{\hat{D}...\hat{D}}$; равенство $D_{ii} = 0$ задает условие несжимаемости.

Рассмотрим задачу об определении материальной функции $g(D)$ из экспериментов на сплошных или толстостенных трубчатых цилиндрических образцах. Примем обычные при таких испытаниях кинематические гипотезы – гипотезу плоских сечений и гипотезу о том, что радиусы в ходе деформирования не искривляются. Тогда в случае нагружения образца осевой силой P и крутящим моментом M кинематика движения будет полностью определяться заданием двух параметров – относительным изменением длины рабочей части образца $\alpha = \alpha(t)$ и погонным (на единицу исходной длины) углом закручивания образца $\beta = \beta(t)$. Вводя для образца естественным образом лагранжевы $\{r, \varphi, z\}$ и эйлеровы $\{R, \Phi, Z\}$ цилиндрические координаты ($z \geq 0$, на торце $z = 0$ нет осевых смещений), можно записать закон движения точек образца в виде

$$R = z / \sqrt{\alpha}, \quad \Phi = \varphi + \beta z, \quad Z = \alpha z. \tag{4}$$

На основании формул (4) можно вычислить компоненты тензора $\hat{D}$ в ортонормированном эйлеровом базисе $\{\bar{e}_R, \bar{e}_\Phi, \bar{e}_Z\}$:

$$\hat{D} = \begin{pmatrix} -\dot{\alpha}/2\alpha & 0 & 0 \\ 0 & -\dot{\alpha}/2\alpha & R\dot{\beta}/2\alpha \\ 0 & R\dot{\beta}/2\alpha & \dot{\alpha}/\alpha \end{pmatrix} \tag{5}$$

и модуль этого тензора

$$D=\sqrt{\frac{3}{2}\frac{\dot{\alpha}^2}{\alpha^2}+\frac{1}{2}\frac{\dot{\beta}^2R^2}{\alpha^2}} \tag{6}$$

(здесь и далее точка означает производную по времени t).

Поскольку боковая поверхность образца свободна от нагрузок, можно на ней с использованием (3) и (5) выразить гидростатическое давление через $\alpha(t)$ и $D(t)$ при известной материальной функции $g(D)$:

$$-p=\frac{g(D)}{D}\frac{\dot{\alpha}}{2\alpha}. \tag{7}$$

В дальнейшем для определенности будем считать $\dot{\alpha}\geq 0$.

Рассмотрим сначала простейший случай, когда кручение отсутствует, т.е. $\dot{\beta}\equiv 0$, а величина $\dot{\alpha}\neq 0$. Тогда выражение для осевого усилия

$$P=2\pi\int_{R_0}^{R_1}\sigma_{ZZ}RdR \tag{8}$$

с учетом независимости σ_{ZZ} от координат (см. (3) и (5)) принимает вид

$$P=\sqrt{\frac{3}{2}}\pi g\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\frac{\dot{\alpha}}{\alpha}\right)(R_1^2-R_0^2), \quad \dot{\alpha}\neq 0, \tag{9}$$

где $R_1=r_1/\sqrt{\alpha}$, $R_0=r_0/\sqrt{\alpha}$; r_1 и r_0 – соответственно начальные наружный и внутренний радиусы трубы (для сплошного образца $r_0=0$). Таким образом, при заданном законе $\alpha(t)$, $\beta(t)\equiv 0$ и фиксируемом в эксперименте усилии $P(t)$ материальная функция g задается в неявном виде (параметрически) формулами

$$g(x)=\frac{P(t)\alpha(t)}{\sqrt{\frac{3}{2}}\pi(r_1^2-r_0^2)}, \quad x=\sqrt{\frac{3}{2}}\frac{\dot{\alpha}(t)}{\alpha(t)}. \tag{10}$$

Другой простейший случай задается условиями: $\dot{\alpha}\equiv 0$ (т.е. $\alpha=1$), $\dot{\beta}>0$. Тогда функция D имеет вид

$$D^2=f_1(t)r^2, \quad f_1(t)\equiv\dot{\beta}^2/2, \tag{11}$$

а крутящий момент M задается формулой

$$M = 2\pi \int_{R_0}^{R_1} Q(D) \frac{\dot{\beta}}{2\alpha} R^3 dR, \quad Q(D) \equiv \frac{g(D)}{D} \tag{12}$$

или с учетом $\alpha = 1$

$$M = \int_{r_0}^{r_1} Q(D) r^3 dr, \quad M \equiv \frac{1}{\pi \dot{\beta}} M. \tag{13}$$

Поскольку по смыслу $\dot{\beta}(t)$ – величина переменная (будем для определенности полагать ее возрастающей), то в качестве параметра прослеживания процесса (условного “времени”) можно взять величину

$$D_1 = D\big|_{r=r_1} = \sqrt{f_1}\, r_1. \tag{14}$$

Считая определяемую из эксперимента величину M функцией D_1, можно (аналогично тому, как это делается при построении диаграммы $\tau \sim \gamma$ для склерономного материала) продифференцировать левую и правую части равенства (13) по D_1 и затем интеграл в правой части взять по частям, вводя замену переменной $R = Dr_1 / D_1$. Тогда придем к выражению

$$Q(D_1) D_1^4 - Q(D_0) D_0^4 = 4 f_1^2 M + r_1 f_1^{5/2} \frac{dM}{dD_1}, \quad D_0^2 = f_1(t) r_0^2$$

или

$$D_1^3 g(D_1) - D_0^3 g(D_0) = \dot{\beta}^4 M + r_1 \left(\frac{\dot{\beta}}{\sqrt{2}} \right)^5 \frac{dM}{dD_1}. \tag{15}$$

В случае сплошного образца $r_0 = 0, D_0 = 0$ формула (15) соответственно упрощается. Следует отметить, что построение функции g по формуле (15) при $r_0 \neq 0$ не является тривиальным и требует разработки специальной методики (в случае склерономного упругопластического материала зависимость $\tau(\gamma)$ из опыта на кручение трубчатого образца удается построить, так как известно, что начальный участок диаграммы $\tau(\gamma)$ является линейным). Это замечание относится также ко всем последующим формулам, написанным для случая $r_0 \neq 0$.

Обратимся к общему случаю, когда $\dot{\alpha} \geq 0$ и $\dot{\beta} \geq 0$, а $D^2(t, r_1) > 0$ и, для определенности, возрастает со временем. В этом случае надо пользоваться общим выражением для D вида (6) и соответственно для функций времени:

$$D_1 \equiv D\Big|_{r=r_1} = A^2(t) + B^2(t) r_1^2, \; D_0 \equiv D\Big|_{r=r_0} = A^2(t) + B^2(t) r_0^2,$$
$$A^2(t) = \frac{3}{2}\left(\frac{\dot{\alpha}}{\alpha}\right)^2, \quad B^2(t) = \frac{1}{2}\frac{\dot{\beta}^2}{\alpha^3}. \tag{16}$$

Введем дополнительно для удобства выкладок следующие обозначения:

$$Q_k \equiv D_1^k Q(D_1) - D_0^k Q(D_0) = D_1^{k-1} g(D_1) - D_0^{k-1} g(D_0),$$
$$G_k \equiv \int_{D_0}^{D_1} Q(D) D^k dD = \int_{D_0}^{D_1} g(D) D^{k-1} dD. \tag{17}$$

Выпишем согласно (8), (3), (5) выражение для осевой силы $P = 2\pi \int_{R_0}^{R_1} \frac{3}{2} Q(D) \frac{\dot{\alpha}}{\alpha} R dR$ и перейдем в правой части к интегрированию по D:

$$P = \frac{6\pi\dot{\alpha}\alpha}{\dot{\beta}^2} \int_{D_0}^{D_1} g(D) dD = \frac{3\pi\dot{\alpha}}{\alpha^2 B^2} G_1. \tag{18}$$

Аналогично представим выражение для крутящего момента, задаваемого формулой (12) с функцией D, определяемой по формуле (6):

$$M = \frac{\pi\dot{\beta}}{\alpha^3}\left(-\frac{A^2}{B^4} G_1 + \frac{1}{B^4} G_3\right). \tag{19}$$

Если функции $\dot{\alpha}, \dot{\beta}$ не обращаются в ноль, то формула (18) позволяет определить не саму материальную функцию $g(D)$, а ее первообразную $G_1(D)$.

Рассмотрим возможность полного использования экспериментальных данных, т.е. обеих формул (18) и (19). Как и в описанном выше случае чистого кручения ($\alpha \equiv 1$), продифференцируем выражение (19) по параметру (условному "времени") D_1, предварительно переписав (19) в виде

$$\widetilde{M} \equiv M \frac{\alpha^3}{\pi\dot{\beta}} = (-A^2 G_1 + G_3) B^{-4}. \tag{20}$$

Отметим, что все производные по параметру D_1 фактически вычисляются с помощью производной по времени: $\frac{\partial(\ldots)}{\partial D_1} = \frac{\partial(\ldots)}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial D_1} = \frac{\partial(\ldots)}{\partial t}\frac{1}{D_1}$.

Опуская громоздкие выкладки, связанные с переходом от интегрирования по переменной R к интегрированию по переменной r, а затем по переменной D и с приведением подобных, выпишем окончательный результат:

$$\frac{d\widetilde{M}}{dD_1} = c_1(t)Q_0 + c_2(t)Q_2 + c_3(t)Q_4 + c_4(t)G_1 + c_5(t)G_3, \tag{21}$$

где

$$c_1(t) = F(t)(-aA^2B^2 + bA^4), \quad c_2(t) = F(t)(aB^2 - 2bA^2),$$

$$c_3(t) = F(t)b, \quad c_4(t) = -2c_2, \quad c_5(t) = -4c_3,$$

$$F(t) = (2B^6\dot{D}_1)^{-1}, \quad a = \frac{dA^2}{dt}, \quad b = \frac{dB^2}{dt}.$$

В уравнении (21) проблему для определения функции $g(D)$ (помимо ситуации с $r_0 \neq 0$) создает наличие величин G_1 и G_3, но именно эти величины входят в формулы (18) и (20) для осевого усилия и крутящего момента. Выражая G_1 и G_3 через $\widetilde{M}$ и $\widetilde{P} = P\alpha^2/(3\pi\dot{\alpha})$ и подставляя в (21), окончательно получаем

$$g(D_1)\left[\frac{c_1(t)}{D_1} + c_2(t)D_1 + c_3(t)D_1^3\right] - g(D_0)\left[\frac{c_1(t)}{D_0} + c_2(t)D_0 + c_3(t)D_0^3\right] =$$

$$= \frac{d\widetilde{M}}{dD_1} - c_5(t)B^4\widetilde{M} - [c_4(t) + c_5(t)A^2]B^2\widetilde{P}. \tag{22}$$

Уравнение (22) довольно громоздкое и возникает вопрос, в каких случаях его необходимо использовать. Такая необходимость обусловлена, по крайней мере, двумя обстоятельствами: 1) невозможностью проведения простейших испытаний только на растяжение (например, из-за образования шейки на образце) или только на кручение при условии $\alpha \equiv 1$; 2) как отмечалось выше, потребностью исследовать область применимости определяющих соотношений вида (3) и, следовательно, проводить испытания по различным программам $\alpha(t)$, $\beta(t)$.

Отметим, что предложенный выше подход может быть применен к описанию экспериментов не только с гладкими функциями $\dot{\alpha}(t)$, $\dot{\beta}(t)$, но и скачкообразно изменяющимися (как в известной методике определения параметра скоростной чувствительности материала по данным опыта на растяжение со скачком по скорости [1]).

Резюме

Стандартне визначальне співвідношення для надпластичних матеріалів припускає степеневу залежність напруження від швидкості деформації. Це при-

пущення – окремий випадок більш загального: напружений стан визначається тільки тензором швидкостей деформацій. Запропоновано методику експериментальної побудови такої загальної залежності за результатами дослідів на суцільних або товстостінних трубчастих циліндричних зразках.

1. *Грабский М. В.* Структурная сверхпластичность металлов / Пер. с польск. – М.: Металлургия, 1975. – 272 с.
2. *Смирнов О. М.* Обработка металлов давлением в состоянии сверхпластичности. – М.: Машиностроение, 1979. – 184 с.
3. *Padmanabhan K. A., Davies J. J.* Superplasticity. – Berlin: Springer-Verlag, 1980. – 314 p.
4. *Кайбышев О. А.* Сверхпластичность промышленных сплавов. – М.: Металлургия, 1984. – 264 с.

Поступила 20. 07. 99